This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

Usage guidelines

Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

+ *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.

+ *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.

+ *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.

+ *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

About Google Book Search

Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at `http://books.google.com/`

Mathematisches Wörterbuch

oder

Erklärung

der

Begriffe, Lehrsätze, Aufgaben und Methoden

der Mathematik

mit den nöthigen Beweisen

und literarischen Nachrichten begleitet

in alphabetischer Ordnung

von

Georg Simon Klügel

Professor der Mathematik und Physik auf der Friedrichs-Universität zu Halle, Mitgliede der Akademien und Societäten der Wissenschaften zu Petersburg, Berlin, Göttingen und Frankfurt an der Oder, Ehrenmitgliede der ökonomischen Gesellschaft zu Leipzig.

Erste Abtheilung

Die reine Mathematik.

Erster Theil

von A bis D

mit acht Kupfertafeln.

Leipzig

im Schwickertschen Verlage 1803.

187. S. 7.

Vorrede.

Wörterbücher über wissenschaftliche Kenntnisse sind, ungeachtet der ungünstigen gegen sie oft gefällten Urtheile, dennoch sehr beliebt geblieben, weil sie denjenigen, die eine genaue, zusammenhangende Einsicht in ein Fach sich zu verschaffen nicht Zeit oder Fähigkeit haben, ein bequemes Hülfsmittel sind, sich von einzelnen Materien nach ihren Bedürfnissen zu unterrichten. Dadurch ist selbst in der Mathematik, so vorzüglich sie auch einer systematischen Behandlung fähig ist, die nach der Folge der Buchstaben zerstückte Anordnung ihrer Lehren eine brauchbare Form des Vortrages, desto mehr, weil es in dieser Wissenschaft schwieriger ist, über die Anfangsgründe hinaus, weiter, und aus den ausführlichern Werken einzelne Untersuchungen herauszunehmen, ohne sie ganz zu

ſtudieren. Die mathematiſchen Lehren machen nicht eine Folge wie die Glieder einer Kette aus, ſondern mehrere Ketten, die durch gewiſſe Hauptglieder verbunden ſind. Man kann alſo einzelne Sätze oder kleine Syſteme von Lehrſätzen recht gut abgeſondert aufſtellen, wenn man von denjenigen allgemeinen Sätzen ausgeht, an welche ſie ſich knüpfen. Dadurch wird der Zuſammenhang deſto deutlicher, welchen man in einem Syſtem erſt aufſuchen muß. Der ſyſtematiſche Vortrag muß oft Materien, welche dem Inhalte nach zuſammen gehören, trennen, weil die Sätze, worauf die ſchwerern unter ihnen beruhen, vorher erwieſen werden müſſen, ehe ſie aufgeſtellt werden können. In den Artikeln eines Wörterbuchs kann man hingegen unter eine Rubrik alles bringen, was dahin gehört, das ſchwerere wie das leichtere. Selbſt für Geübte gewährt ein Wörterbuch mehr als eine Bequemlichkeit zum Gebrauch.

Da ich hier die Vortheile der alphabetiſchen Anordnung aus einander ſetze, weil ich ein mathematiſches Wörterbuch auszuarbeiten übernommen habe, ſo will ich doch dadurch dem ſyſtematiſchen Vortrage

nichts vergeben; vielmehr empfehle ich dem Leſer die zerſtreuten, ſich auf einander beziehenden Artikel in einer guten Ordnung zuſammen zu ſtellen, wozu ich am Ende durch ein ſyſtematiſches Verzeichniß der vornehmſten Artikel behülflich ſeyn werde. In dem Artikel, Analyſis als Wiſſenſchaft, habe ich ſchon einen Abriß über den Inhalt der Analyſis endlicher Größen mitgetheilt, nach welchem man ſich die dazu gehörigen Lehren aus dem Werke bekannt machen mag. Ich werde, ſo wie es in dieſem erſten Theile geſchehen iſt, das zuſammengehörige immer in einen Artikel zu einander bringen, wenn auch dieſer dadurch faſt zu einer förmlichen Abhandlung erwachſen ſollte, werde aber durch bequeme Abtheilungen für die leichte Ueberſicht des Ganzen ſorgen.

Die reine oder abſtracte Mathematik habe ich von der angewandten getrennt, und ihr eine eigene Abtheilung, nach der alphabetiſchen Folge der zu ihr gehörigen Artikel, gewidmet. Dieſes war nöthig, damit der Leſer die theoretiſchen Sätze, wovon bey der Anwendung Gebrauch gemacht wird, alle zur Hand hätte. Es wäre zu unbequem aus vielen

Bänden die Hülfssätze zusammen zu suchen. Auch würde mich die Ausarbeitung so vieler ungleichartigen Materien zu sehr ermüdet und zerstreut haben.

Es scheint zuträglich, daß auch die physische angewandte Mathematik von der technischen getrennt werde, und jede eine besondere Abtheilung erhalte. Ein allgemeines Register der Artikel aus allen drey Abtheilungen wird jeden leicht nachweisen.

Dieser erste Theil ist nicht so weit fortgerückt, als ich es bey dem Anfange der Ausarbeitung erwartete. Es sind aber in demselben viele Materien zusammen gekommen, die eine ausführlichere Behandlung erforderten. Die literarischen Nachrichten haben hier auch beträchtlich vielen Raum eingenommen.

Dieses Wörterbuch ist zunächst für solche bestimmt, die mit den ersten Anfangsgründen schon bekannt sind, und ihre Kenntniß über diese hinaus erweitern wollen. Es soll ihnen mehr leisten, als selbst ausführliche mathematische Lehrbücher, und wird dadurch, bey dem gegenwärtigen großen Reichthum der

Mathematisches
Wörterbuch

oder

Erklärung

der

Begriffe, Lehrsätze, Aufgaben und Methoden

der Mathematik

mit den nöthigen Beweisen

und literarischen Nachrichten begleitet

in alphabetischer Ordnung

von

Georg Simon Klügel

Professor der Mathematik und Physik auf der Friedrichs-Universität zu Halle, Mitgliede der Akademien und Societäten der Wissenschaften zu Petersburg, Berlin, Göttingen und Frankfurt an der Oder, Ehrenmitgliede der ökonomischen Gesellschaft zu Leipzig.

Erste Abtheilung

Die reine Mathematik.

Erster Theil

von A bis D

mit acht Kupfertafeln.

Leipzig

im Schwickertschen Verlage 1803.

187. f. 7.

Was veraltet iſt, muß darin zwar, wie in einem A
chiv aufbewahrt, aber ſehr kurz abgethan werden.

Literariſche Nachrichten, beſonders in Rückſi
der Sachen ſelbſt, habe ich, wo es erheblich und n
thunlich war, beygebracht, und werde es mit Da
erkennen, wenn gelehrte Leſer mir beſonders in dieſe
Fache Ergänzungen mittheilen wollen.

In der angewandten Mathematik werde ich da
jenige, was zu der Naturbeſchaffenheit der Ding
oder zu techniſchen Einrichtungen gehört, nur in Rüc
ſicht auf die mathematiſchen Unterſuchungen anführe
Dieſe werden der Hauptzweck der Behandlung ſey
Dadurch wird ſich dieſer Theil des Wörterbuchs vo
phyſikaliſchen und techniſchen Werken dieſer Form u
terſcheiden.

Ich wünſche, daß das von mir unternommen
Werk zur Ausbreitung mathematiſcher Kenntniſſe b
förderlich werde.

Halle, im Junius
1803.

Mathematiſches Wörterbuch,

oder

Erklärung der Begriffe, Lehrſätze, Aufgaben und Methoden der Mathematik, mit literariſchen Nachrichten, in alphabetiſcher Ordnung.

Erſte Abtheilung.

Arithmetik, Analyſis und Geometrie, die niedere und die höhere.

A.

Abaciſta, in dem mittlern Zeitalter ein Rechner. S. den folgenden Artikel.

Abacus, ein Wort griechiſchen Urſprungs, welches einen Tiſch bedeutet, worauf allerley Gefäße, nutzbare, oder Kunſt- und Prachtſtücke, aufgeſtellt wurden. Zweytens iſt es eine oder andere Art von Rechenbrett, deſſen ſich die Alten bedienten, weil ihre Zahlzeichen zu arithmetiſchen Operationen ungeſchickt waren. Von dieſen und ähnlichen Einrichtungen handelt der Artikel, inſtrumental Arithmetik. Drittens hieß Abacus in den mittlern Zeiten die Rechnung mit dekadiſchen Ziffern. Der in dem Artikel: Zahlzeichen, angeführte **Leonardus von Piſa** (um 1200) nennt ſein Buch über die dekadiſche Rechenkunſt, Liber abaci. **Jodocus Clichthoväus** gab 1503 des Jacobi Fabri Introductio in Boëthii Arithmeticam heraus, welcher er eine praktiſche Arithmetik beyg

von zwey Abmessungen. Eine Linie, gerade oder krumme, ist eine Ausdehnung von einer einzigen Abmessung.

Man hat den Begriff von Dimension oder Abmessung auch auf Rechnungsgrößen übergetragen. Eine Fläche ist dem Product zweyer Zahlen proportional, welche bey Rechtecken ihre beiden Seiten sind. Daher sieht man das Product ab zweyer Zahlen, a, b, als gleichgültig mit dem Rechtecke an, dessen Seiten sich wie die Zahlen a, b verhalten, und giebt den Factoren, a, b, eine Abmessung, dem Producte ab zwey Abmessungen. Eben so, da ein Körper dem Product dreyer Zahlen proportional ist, die für ein senkrechtes Parallelepipedum die drey Seitenlinien desselben sind, sieht man das Product abc dreyer Zahlen, a, b, c, als gleichgültig mit einem Körper an, und giebt demselben drey Abmessungen, den Factoren eine einzige. Ob nun gleich ein Ausgedehntes nicht mehr als drey Abmessungen haben kann, so fahrt man doch bey Rechnungsgrößen nach der Analogie fort, ihnen so viele Abmessungen beyzulegen, als sie Factoren haben, denen man eine einzige Abmessung giebt. So ist abcd eine Größe von vier, abcde, von fünf Abmessungen. Daher sind auch die Benennungen für die Potenzen über die dritte hinaus aus der Geometrie genommen, ob man sie gleich gar nicht geometrisch darstellen kann. (S. Potenz §. 6. 8.) Die Factoren einer Größe betrachtet man als Abmessungen, wenn man sie auf keine Einheit bezieht, in Gegensatz gegen numerische Factoren, so daß dadurch jene Größe eine bestimmte Form erhält, die entweder mit einer der drey geometrischen Formen übereinstimmt, oder analogisch gebildet ist. Größen von vier oder mehr Dimensionen kann man als ein Glied eines zusammengesetzten Verhältnisses, das aus Verhältnissen geometrischer Größen entsteht, betrachten.

Eine gebrochne Größe hat so viele Abmessungen als der Unterschied der Abmessungen des Zählers und Nenners anzeigt. Z. B. der Bruch $\frac{x^5 + ax^4 + b^5x^2 + c^5}{x^2 + dx}$.

hat drey Abmeſſungen. Hat der Nenner mehr Abmeſſungen, als der Zähler, ſo iſt die Anzahl der Dimenſionen negativ. Jener Bruch umgekehrt hat — 3 Dimenſionen.

Iſt die Anzahl der Abmeſſungen im Zähler und Nenner gleichgroß, ſo iſt der Bruch eine Größe von o Abmeſſungen, das iſt eine bloße Zahl, z. B. $\frac{ab}{cd}$ iſt die Zahl, welche anzieht, wie vielmahl die Fläche cd in der ab enthalten iſt, wenn nämlich dieſe Producte Flächen darſtellen.

Eine Zahl iſt eine Größe von o Abmeſſungen. Sie kann als Multiplicator oder Diviſor nur die Größe (Quantität), nicht die Beſchaffenheit ändern.

Die Quadratwurzel aus der Größe a iſt eine Größe von der Abmeſſung $\frac{1}{2}$, wenn a eine Größe von einer Abmeſſung iſt. Denn dieſe würde zwey Abmeſſungen haben, wenn der Wurzel eine beygelegt würde. So iſt $\sqrt[3]{a}$ eine Größe von der Abmeſſung $\frac{1}{3}$. Nach derſelben Analogie iſt $\sqrt[n]{a^m}$ oder $a^{\frac{m}{n}}$ eine Größe von $\frac{m}{n}$ Abmeſſungen.

Bey der Anwendung der Rechnung auf die Geometrie müſſen alle Theile des Ausdrucks einer Größe gleich viele Abmeſſungen haben, oder homogen ſeyn. Denn nur gleichartige Größen laſſen ſich zuſammen zählen, oder eine von der andern abziehen.

In einer Formel für geometriſche Größen können ſehr wohl Producte von mehr als drey Abmeſſungen vorkommen, nur werden dieſe immer durch andere Producte dividirt ſeyn, ſo daß der Unterſchied der Dimenſionen im Dividendus und Diviſor nicht über Drey groß iſt, wenn die ganze Formel eine geometriſche Größe darſtellen ſoll. So iſt $\frac{abcd}{ef}$ eine Fläche. Denn wenn man ſie ſo dar-

Bänden die Hülfssätze zusammen zu suchen. Auch würde mich die Ausarbeitung so vieler ungleichartigen Materien zu sehr ermüdet und zerstreut haben.

Es scheint zuträglich, daß auch die physische angewandte Mathematik von der technischen getrennt werde, und jede eine besondere Abtheilung erhalte. Ein allgemeines Register der Artikel aus allen drey Abtheilungen wird jeden leicht nachweisen.

Dieser erste Theil ist nicht so weit fortgerückt, als ich es bey dem Anfange der Ausarbeitung erwartete. Es sind aber in demselben viele Materien zusammen gekommen, die eine ausführlichere Behandlung erforderten. Die literarischen Nachrichten haben hier auch beträchtlich vielen Raum eingenommen.

Dieses Wörterbuch ist zunächst für solche bestimmt, die mit den ersten Anfangsgründen schon bekannt sind, und ihre Kenntniß über diese hinaus erweitern wollen. Es soll ihnen mehr leisten, als selbst ausführliche mathematische Lehrbücher, und wird dadurch, bey dem gegenwärtigen großen Reichthum der

ſtand der Erde von der Sonne zur Einheit genommen zu werden.

Der Verfaſſer des Artikels, Dimenſion, in der Encyclop. méthodique, d'Alembert, führt an, daß jemand den Gedanken gehabt hätte, die Zeit als eine vierte Dimenſion einzuführen, ſo daß das Produkt aus einer körperlichen Größe in die Zeit eine Größe von vier Dimenſionen vorſtelle. Er fügt hinzu, man könne dagegen zwar etwas einwenden, doch verdiene der Gedanke bemerkt zu werden, wenn es auch nur wegen der Neuheit wäre. Allein man hat hiebey nicht bedacht, daß Zeit ſich allemal auf eine Einheit bezieht, und daß daher mit einer Zeit multipliciren, zugleich mit dieſer Zeiteinheit dividiren iſt, daher in der That mit einer Größe von der Dimenſion Null oder einer bloßen Zahl multiplicirt wird.

Abſchnitt (Segmentum) einer Figur iſt ein Theil ihrer Fläche, der von einer geraden, durch zwey Puncte des Umfanges gezogenen, Linie abgeſchnitten wird. Iſt der Umfang krummlinicht, ſo wird der Abſchnitt durch einen Bogen der krummen Linie und die gerade Linie begränzt. Eine Figur mit einer in ſich zurücklaufenden Umfangslinie wird durch die ſchneidende Linie in zwey Abſchnitte getheilt. Ein Kreis wird durch den Durchmeſſer in zwey gleiche Abſchnitte getheilt; durch jede andere ſchneidende Linie in zwey ungleiche. Den Inhalt des Abſchnittes eines Kreiſes oder einer andern krummlinichten Figur zu finden, lehrt die Integralrechnung. (S. Quadratur.)

Abſchnitt eines Körpers, iſt ein Theil deſſelben, der von einer durch den Körper gelegten Ebene abgeſchnitten wird. Der Abſchnitt einer Kugel wird durch einen Theil ihrer Oberfläche und eine Kreisfläche begränzt, weil die Durchſchnitte einer Kugel mit einer Ebene Kreisflächen ſind. Den Inhalt eines körperlichen Abſchnittes zu finden, gehört zu den Anwendungen der Integralrechnung. (S. Cubatur.) Der Abſchnitt eines Cylinders oder Kegels, an deſſen krummen Oberfläche kein Theil

ganz cylindriſch oder koniſch iſt, heißt ein **hufförmiger Abſchnitt**, und iſt ein etwas ſchweres Beyſpiel der Cubatur. In der Baukunſt kommt eine Anwendung davon vor. (S. hufförmiger Abſchnitt.)

Abſchnittswinkel (Angulus Segmenti) iſt der von dem Umfange eines Kreiſes und einer Chorde eingeſchloſſene Winkel, welchen die berührende Linie an dem Durchſchnitte des Kreiſes und der Chorde mit dieſer macht. In (Fig. 1. T. 1.) iſt A D B E ein Kreis, A B eine Chorde, F A G die in A berührende, ſo iſt G A B der Winkel des Abſchnittes A E B, und F A B der Winkel des Abſchnittes A D B.

Der **Winkel in einem Abſchnitte** (Angulus in Segmento) iſt der Winkel, deſſen Spitze in den Bogen des Abſchnittes fällt, und deſſen Schenkel durch die Endpuncte deſſelben gehen. So iſt der ſpitze A D B der Winkel in dem größeren Abſchnitte, und der ſtumpfe A E B der Winkel in dem kleinern Abſchnitte.

Der Winkel G A B iſt gleich dem W. A D B und F A B dem A E B. (Euklides III. 32.)

Abſciſſe. S. Coordinaten.

Abſolute Zahl oder Größe überhaupt iſt diejenige, bey welcher ſchlechtweg nur auf die Quantität geſehen wird, ohne eine Beziehung auf andere bey ihr zu beachten, als ob ſie poſitiv oder negativ zu nehmen, wenn ſie eine Linie iſt, nach welcher Gegend ſie zu ziehen ſey. Wachsthum einer abſoluten Größe iſt Vergrößerung der Quantität; Abnehmen, Verminderung derſelben, dagegen eine negative Größe als wachſend betrachtet wird, wenn ihre Quantität durch Addition einer poſitiven Größe vermindert wird, und als abnehmend bey der Addition einer negativen.

Abſolute Zahl wird auch das gegebene Glied einer Gleichung genennt, welches ſo groß iſt als alle übrigen Glieder zuſammen genommen, wenn es nämlich einen Theil der Gleichung allein ausmacht. Als in der Gleich-

ung $x^2 + 12x = 85$ iſt 85 die abſolute Zahl, da ſie $= 25 + 12.5$ iſt. Vita nennt dieſes Glied das Homogeneum comparationis. Eigentlicher ſollte dieſes Glied nur das gegebene heißen. Stifel nennt es die ledige Zahl, in der Ausgabe der Coß von Rudolph.

Abſolut wird auch in der Lehre von der Bewegung von Raum und Bewegung gebraucht.

Abſtand eines Punctes von einer geraden Linie oder Ebene iſt das Perpendikel, welches von dem Puncte auf die Linie oder Ebene gelaſſen wird, als die kürzeſte unter allen Linien, die von dem Puncte dahin gezogen werden können. Iſt die Linie eine krumme, ſo kann man entweder gar nicht nach einem Abſtande des Punctes von derſelben fragen, oder man muß darunter eine gerade Linie verſtehen, welche die krumme Linie unter einem rechten Winkel ſchneidet. Dieſe iſt die kürzeſte von allen an ſie gezogenen, wenn nicht etwa mehrere, die krumme Linie ſenkrecht ſchneidende, Linien von dem Puncte aus gezogen werden können. Mit dem Abſtande eines Punctes von einer krummen Fläche iſt es eben ſo beſchaffen.

Abſtand einer Linie von einer ihr parallelen iſt die ſenkrechte von einem Punkte jener auf dieſe. Dieſe iſt allenthalben von gleicher Größe. S. Parallelen.

Abſtand zweyer Puncte auf einer Kugelfläche iſt der Bogen eines großen durch ſie gelegten Kreiſes, und zwar der kleinere zwiſchen ihnen enthaltene.

Abſtract iſt, was unabhängig von phyſiſchen Beſchaffenheiten gedacht wird.

Abſtracte Mathematik, oder die reine, iſt der Theil dieſer Wiſſenſchaft, worin die Größe und ihre Formen an und für ſich, als bloß in der Vorſtellung vorhanden, betrachtet werden. Sie begreift die Arithmetik, Analyſis und Geometrie. Doch möchte man auch die abſtracte Lehre von der Bewegung dahin zu rechnen haben, ſo fern man dabey bloß hypothetiſch verfährt, ohne Anwendungen auf die Wirklichkeit. S. Mathematik.

lonius der Schnitt eines spitzwinklichten Kegels. S. Kegelschnitt.

Addiren ist das Verfahren bey der Addition.

Addition, Zusammenzählung, ist ein Rechnungsverfahren, bey welchem ein Ganzes aus seinen erschöpfenden Theilen zusammengesetzt wird. Das Ganze, welches gefunden ist, heißt die Summe. Die Addition wird entweder mit bestimmten Zahlen, oder mit allgemeinen Größenzeichen vorgenommen.

Addition ganzer Zahlen, die sich auf eine einzige Einheit, benannte oder unbenannte, beziehen, (Additio simplex) ist die Vereinigung mehrerer Zahlen zu einer einzigen von derselben Form wie jene, also von der dekadischen, wenn jene diese Form haben, nach der dodekadischen, oder sonst einer andern, wenn die zu addirenden Zahlen diese haben. Da das Verfahren leicht und allgemein bekannt ist, so werden zwey Beyspiele genügen.

795083	8476454
48624	307843
32798	83495
543	9637
68	549
7	4086
765893	8882064
11123	
877123	

Die Einer werden alle unter einander gesetzt, wodurch alle Einheiten derselben Classe unter einander zu stehen kommen. Man addirt nun die Ziffern jeder Verticalreihe als Dinge einerley Art. In dem ersten Beyspiele ist von den Partial-Summen die Ziffer rechter Hand unter diejenige Reihe gesetzt, wozu sie gehört, die linker Hand befindliche, deren Einer zehnfach größer sind als die von jener, unter die linker Hand folgende Reihe, jedoch her-

abgerückt, um für die Einer dieſer Reihe Platz zu laſſen. Man erhält nun zwey Theile für die Summe, welche auf dieſelbe Art wie vorher addirt werden. Geübte nehmen die Zehner jeder Partialſumme gleich zu den Einern der nächſt höhern, wie in dem zweyten Beyſpiele.

Wenn viele Zahlen zu addiren ſind, ſo theile man ſie in zwey oder mehrere Haufen, ſuche deren Summen einzeln, und addire dieſe zuſammen. Theilt man die gegebenen Zahlen auf verſchiedene Arten in Haufen, ſo muß bey der Addition der einzelnen Summen daſſelbe Facit erhalten werden.

Wenn man zur Sicherheit die Addition widerholt, ſo addire man die Ziffern der Verticalreihen in einer der zum erſtenmahle beobachteten entgegengeſetzten Ordnung.

Von der Neuner- und Eilferprobe der Addition ſ. Rechnungsprobe.

Addition ganzer Zahlen mit verſchiedenen benannten Einheiten. (Additio compoſita). Sie erfordert nichts weiter als daß man wiſſe, wie viel Einer der geringern Einheit auf einen Einer von der höhern gehen, um für ſo viele Einer von jener Gattung einen von dieſer zu ſetzen. Z. B.

384 ℔	15 ℋ	7 ℏ		172 R.	9 F. 10 Z.
293 ″	20 ″	8 ″		218 ″	8 ″ 9 ″
162 ″	22 ″	10 ″		307 ″	11 ″ 8 ″
58 ″	17 ″	9 ″		41 ″	7 ″ 6 ″
897 ″	74 ″	34 ″		738 ″	35 ″ 33 ″
900 ℔	4 ℋ	10 ℏ		741 R.	1 F. 9 Z.

Addition dodekadiſcher Zahlen. Sie geſchieht auf eine ganz ähnliche Art wie der dekadiſchen. Für je 12 Einer einer Claſſe ſetzt man einen Einer in der nächſt höhern. Die Einer jeder Claſſe werden von den andern durch Puncte abgeſondert. (S. Dodekadik.) Z. B.

8.	7.	10.	6.	4.		5.	3.	11.	7.	9.
9.	4.	7.	0.	11.			8.	7.	6.	10.
	5.	8.	4.	3.				9.	11.	4.
	2.	9.	10.	5.				8.	10.	6.
		8.	4.	7.					5.	3.
			5.	9.					4.	9.
	17.	18.	42.	29.	39.		6.	2.	2.	10.	5.
	1.	6.	9.	8.	8.	3.					

Addition dyadischer Zahlen. Es wird nur ein Beyspiel nöthig seyn sie zu lehren. (S. Dyadik.)

1100101111000111	26055
101111011110011	24291
11101110100	1900
1111011	123
1111	15
1100111001010100000	52384

Die dekadischen Zahlen rechter Hand sind die Übersetzung von den dyadischen.

Das Zeichen der Addition ist +

Addition der Brüche. S. Bruchrechnung und Decimalrechnung.

Addition allgemeiner Größen, oder algebraische. S. unter Buchstabenrechnung.

Addition der Verhältnisse ist ein zweydeutiger Ausdruck, wofür man besser gebraucht, Zusammensetzung der Verhältnisse. S. Verhältniß.

Additiv ist eine Größe, die zu einer andern, zufolge der Vorschrift bey einer Rechnung, zu addiren ist. Man muß es nicht mit positiv verwechseln, welches bedeutet, daß eine Größe in einer gewissen bestimmten Relation gegen andere genommen werde. Das positive kann bey

der Zuſammenſetzung einer Größe aus andern ſubtractiv ſeyn.

Ähnlichkeit, mathematiſche, iſt Übereinſtimmung der Form, oder der Art der Entſtehung einer Größe aus andern, entweder ohne Gleichheit der Quantität, oder auch mit Gleichheit derſelben. Größen, die ähnlich ſind, ohne gleich zu ſeyn, ſtimmen in allen Stücken, bis auf die Quantität, überein. Die Ähnlichkeit iſt entweder die geometriſche oder die analytiſche.

Die **geometriſche Ähnlichkeit** beſteht in der gleichen Lage der geraden Linien und Ebenen, wodurch geometriſche Größen beſtimmt werden, oder, wenn es krumme Linien und Flächen ſind, ihrer kleinſten Theile, verbunden mit den gleich großen Verhältniſſen der correſpondirenden Linien, Flächen und körperlichen Theile, wie auch mit der gleichartigen Zuſammenſetzung aller einzelnen Theile oder Beſtimmungsſtücke.

Gerade Linien ſind ſich alle ähnlich, weil die Theile derſelben, ſie mögen an einander ſtoßen, oder von einander getrennt ſeyn, in einerley Lage gegen einander, abgeſehen von den Zwiſchenräumen, gedacht werden.

Geradlinichte Figuren ſind ähnlich, wenn die Winkel der Seiten in der einen den Winkeln in der andern, ſo wie ſie auf einander folgen, gleich ſind, und die von den gleichſtelligen Winkeln eingeſchloſſenen, oder gleichnamigen Seiten einerley Verhältniſſe haben. — Alle regelmäßigen Vierecke von einer gleichen Anzahl Seiten ſind daher einander ähnlich.

Alle Kreiſe ſind ſich ähnlich, weil ſie die Gränzen von regulären Vielecken ſind, daher das, was dieſen allgemein zukommt, auch der Gränze zukommt.

Alle Parabeln ſind ſich ähnlich, weil ſie, wie der Kreis, durch eine einzige gerade Linie, den Parameter, beſtimmt werden. Nimmt man die Abſciſſen auf der Axe vom Scheitel an in dem Verhältniß der Parameter, ſo haben die Ordinaten eben daſſelbe.

Ähnliche Ellipſen ſind diejenigen, in welchen die beiden Axen einerley Verhältniß zu einander haben. Die Ellipſe wird durch zwey Linien, die beiden Axen, beſtimmt, daher dieſe einerley Verhältniß haben müſſen, wenn Ellipſen ähnlich ſeyn ſollen.

Ähnliche geradlinichte Figuren verhalten ſich wie die Quadrate der gleichnamigen Seitenlinien oder wie die Quadrate der auf gleiche Art in ihnen gezogenen Linien. Von krummlinichten Figuren wird das letztere durch die Integralrechnung, oder ein von ihr entlehntes Verfahren bewieſen. Kreisflächen verhalten ſich wie die Quadrate ihrer Durchmeſſer: ähnliche Ellipſen wie die Quadrate ihrer großen oder ihrer kleinen Axen.

Prismen ſind ähnlich, wenn ihre Grundflächen ähnliche Figuren ſind, die Seitenlinien ſich wie die gleichnamigen Seiten der Grundfläche verhalten, und dieſelbe Lage gegen die Grundflächen haben.

Cylinder ſind ähnlich, wenn ihre Axen ſich wie die Durchmeſſer ihrer Grundflächen verhalten, und gleiche Winkel mit denſelben machen.

Ähnliche Kegel ſind Abſchnitte eines und deſſelben unbeſtimmt weit fortgeführten Kegels.

Alle Kugeln ſind ähnliche Körper.

Körper ſind ähnlich, wenn in beiden parallele Durchſchnitte unter einem gegebenen Winkel gegen einen Durchmeſſer ſo geführt werden können, daß ſie ähnlich ſind, und ihre Abſtände von den gleichnamigen Endpuncten der Durchmeſſer ſich wie die Durchmeſſer verhalten, wie auch der Durchmeſſer und die Lage der Durchſchnitte verändert werden mag. In jedem Körper, der nur nach irgend welchen Regeln gemacht wird, giebt es Hauptdurchſchnitte, auf welche die übrigen Durchſchnitte und Durchmeſſer jeder Art (Linien von einem Puncte der Oberfläche zu irgend einem andern) bezogen werden können, um ihre Lage anzugeben; z. B. in einem elliptiſchen Sphäroid zwey Durchſchnitte ſenkrecht auf einander, einer durch die große Axe, und einer durch die kleine Axe; in einem Schiffe

ein lothrechter Durchſchnitt nach der Länge des Kiels, ein anderer lothrechter, auf jenen zugleich ſenkrechter durch den Hauptmaſt oder durch die Mitte der Längenlinie, und ein horizontaler durch einen gewiſſen Punct, z. B. den Schwerpunct des Schiffes.

Ähnliche Abſchnitte eines Körpers ſind ſolche, wenn die Grundflächen ähnliche Figuren ſind, und gleiche Lagen gegen die Hauptdurchſchnitte haben, in welchen auch die Abſtände dieſer Grundflächen von den gleichnamigen Endpuncten ähnlich liegender Durchmeſſer (in Rückſicht der Hauptdurchſchnitte) einerley Verhältniß zu den ganzen Durchmeſſern haben.

Ähnliche Körper und ihre ähnlichen Abſchnitte verhalten ſich wie die Würfel der ähnlichen Durchmeſſer. Dieſes kann im Allgemeinen nur durch die Integralrechnung oder ein von ihr entlehntes Verfahren bewieſen werden.

Die **analitiſche Ähnlichkeit** beſteht in der Übereinſtimmung des analytiſchen Ausdrucks zweyer Größen und der Gleichheit der Verhältniſſe zwiſchen den componirenden Größen. Z. B. a b und c d ſind gleichartige Formen, weil ſie aus zwey, und beide aus verſchiedenen Factoren beſtehen. Verhält ſich nun a : c wie b : d, ſo ſind die Formen auch ähnlich. Man nennt ſolche Producte **ähnliche Flachen-** oder **Plan-Zahlen**, wie z. B. 3. 9 (= 27) und 6. 18 (= 108.)

So ſind a b c und d e f gleichartige Formen, und wenn a : d = b : e = c : f iſt, ähnliche Formen. Dergleichen Producte nennt man **ähnliche Körperzahlen**, wiewohl dieſe und jene gleich vorher angeführte Benennungen veraltet ſind, und nur noch in einem Wörterbuche aufbewahrt werden.

Demnach ſind a b c und d e e nicht ähnliche Formen, aber wohl a b b und d e e, wenn zugleich a : d = b : e iſt.

Ähnliche Gleichungen ſind ſolche, welche aus gleichartigen Gliedern beſtehen, deren correſpondirende oder gleichnamige Factoren in beiden ein gegebenes Verhältniß

haben, mit derſelben Folge der Vorzeichen, z. B.

$$x^3 + ax^2 - bcx + def = 0$$
$$y^3 + \alpha y^2 - \beta\gamma y + \delta\varepsilon\zeta = 0$$

Wenn die Verhältniſſe $a:\alpha$; $b:\beta$; $c:\gamma$, etc. gleich ſind, ſo haben die Wurzeln x, y daſſelbe Verhältniß gegen einander. Denn wenn die Wurzeln der erſten Gleichung ſind p, q, r, ſo iſt $+a$ die Summe ihrer entgegengeſetzten Werthe, $-bc$ die Summe der Binionen derſelben, und $+def$ das Product aller drey (Gleichung III. 5). Verändert man die Wurzeln in dem Verhältniſſe $m:n$, ſo wird ihre Summe in demſelben Verhältniſſe verändert, die Summe der Binionen in dem $m^2:n^2$, das Product aller drey in dem Verhältniſſe $m^3:n^3$. Nun ſey ebenfalls $m:n = a:\alpha = b:\beta = c:\gamma$ u. ſ. f. ſo iſt $bc:\beta\gamma = m^2:n^2$; $def:\delta\varepsilon\zeta = m^3:n^3$, alſo ſind die Wurzeln der zweyten Gleichung

$$\frac{n}{m}p, \frac{n}{m}q, \frac{n}{m}r.$$

Wenn die Wurzeln einer Gleichung auf keine Einheit bezogen, ſondern als Größen ſchlechtweg gedacht werden, ſo erhalten alle Glieder der Gleichung gleich viel Abmeſſungen (Dimenſionen). Denn der Coefficient des zweyten Gliedes iſt das Aggregat der den Wurzeln entgegengeſetzten Größen, der Coefficient des dritten das Aggregat der Binionen; der des vierten das Aggregat der Ternionen, u. ſ. w. Die Stellen der Glieder werden hierbey wie in einer vollſtändigen Gleichung gezählt. In ähnlichen Gleichungen bekommen die Coefficienten auch ähnliche Formen. Iſt z. B. der des vierten Gliedes einer Gleichung $= def$, wie in dem obigen Beyſpiele, ſo iſt in der ähnlichen Gleichung derſelbe $= \delta\varepsilon\zeta$: iſt er in jener $= dde$ oder d^3 ſo iſt er in dieſer $= \delta\delta\varepsilon$ oder δ^3, und die gleichnamigen Factoren in allen Coefficienten haben einerley Verhältniß. Werden die Wurzeln als Zahlgrößen betrachtet, und die Coefficienten ſind bloße Zahlen, ſo verhalten ſich die Coefficienten des zweyten Gliedes in ähnlichen Gleichungen wie ein Paar gleichſtel-

liger Wurzeln, wenn die Wurzeln nach ihrer Größe geordnet werden. Dieſes Verhältniß ſey $= m : n$, ſo verhalten ſich die Coefficienten des dritten Gliedes wie $m^2 : n^2$; des vierten wie $m^3 : n^3$ u. ſ. f. eben ſo wie die Coefficienten, wo keine Einheit angenommen wird. Enthalten die Coefficienten noch unbeſtimmte, aber nach Willkühr beſtimmbare Factoren, ſo müſſen die Producte aus denſelben ähnliche Formen, die Factoren ſelbſt das Verhältniß der gleichſtelligen Wurzeln, die numeriſchen beygefügten Factoren aber ein ſolches Verhältniß haben, daß die Coefficienten ſelbſt das ihrer Stelle nach ihnen zukommende Verhältniß erhalten.

Hieraus ergiebt ſich auch, wie Gleichungen zwiſchen zwey veränderlichen Größen ſich verhalten müſſen, um ähnlich zu ſeyn. Es ſey z. B. $2abx - bx^2 = 2ay^2$, welches eine Gleichung für die Ellipſe iſt, worin die große Are $= 2a$, der Parameter $= b$ iſt. Man ſetze in derſelben na und nb für a und b, und vertauſche die Coordinaten x, y mit t und u, ſo iſt $2n^2abt - nbt^2 = 2nau^2$. Dieſe Gleichung iſt jener ähnlich. Denn wenn man $t = nx$ nimmt, ſo iſt $2n^3abx - n^3bx^2 = 2nau^2$, alſo $u^2 = n^2y^2$, oder $u = ny$. Wenn alſo die Abſciſſen x und t ſich wie $1 : n$ verhalten, ſo verhalten ſich die Ordinaten eben ſo, und die Gleichungen ſind ähnlich, wie die dadurch beſtimmten Linien.

In Gleichungen, deren Glieder alle gleich viele Dimenſionen haben, verändere man die gegebenen Größen nach einem beſtimmten Verhältniſſe $1 : n$, und vertauſche die coordinirten, durch x, y bezeichneten, veränderlichen Größen mit t, u, ſo iſt die Gleichung eine der primitiven ähnliche. Verhalten ſich x und t wie $1 : n$, ſo iſt auch $y : u = 1 : n$. Durch die Subſtitution von nx für t, und ny für u verwandelt ſich die zweyte Gleichung wieder in die primitive.

Wenn in einer Gleichung zwiſchen zwey veränderlichen Größen x und y für x geſetzt wird $t = nx$, und für y eine andere, $u = ny$, ſo iſt die neue Gleichung der primitiven zwar nicht ähnlich, aber doch mit ihr verwandt

lonius der Schnitt eines spitzwinklichten Kegels. S. Kegelschnitt.

Addiren ist das Verfahren bey der Addition.

Addition, Zusammenzählung, ist ein Rechnungsverfahren, bey welchem ein Ganzes aus seinen erschöpfenden Theilen zusammengesetzt wird. Das Ganze, welches gefunden ist, heißt die Summe. Die Addition wird entweder mit bestimmten Zahlen, oder mit allgemeinen Größenzeichen vorgenommen.

Addition ganzer Zahlen, die sich auf eine einzige Einheit, benannte oder unbenannte, beziehen, (Additio simplex) ist die Vereinigung mehrerer Zahlen zu einer einzigen von derselben Form wie jene, also von der dekadischen, wenn jene diese Form haben, nach der dodekadischen, oder sonst einer andern, wenn die zu addirenden Zahlen diese haben. Da das Verfahren leicht und allgemein bekannt ist, so werden zwey Beyspiele genügen.

795083	8476454
48624	307843
32798	83495
543	9637
68	549
7	4086
765893	8882064
11123	
877123	

Die Einer werden alle unter einander gesetzt, wodurch alle Einheiten derselben Classe unter einander zu stehen kommen. Man addirt nun die Ziffern jeder Verticalreihe als Dinge einerley Art. In dem ersten Beyspiele ist von den Partial-Summen die Ziffer rechter Hand unter diejenige Reihe gesetzt, wozu sie gehört, die linker Hand befindliche, deren Einer zehnfach größer sind als die von jener, unter die linker Hand folgende Reihe, jedoch her-

werden kann, so können ähnliche Dinge, ihrer Ähnlichkeit unbeschadet, in der Quantität verschieden seyn, und Quantität ist also ein innerer Unterschied ähnlicher Dinge. In einer im J. 1715 lateinisch geschriebenen Abhandlung von der Ähnlichkeit krummlinichter Figuren wendet er diesen Begriff auf geometrische Größen an, insbesondere auf die Construction ähnlicher Lunularum cyclico-parabolicarum (Christ. L. B. de Wolf Meletemata mathematico-philosophica. Halae Magdeb. 1755 nr. 24). Kreise sind nach ihm, so wie Parabeln, ähnliche Figuren, weil die geraden Linien, wodurch sie bestimmt werden, Durchmesser und Parameter, nicht unterschiedbar sind. — Es wird rathsam seyn, Ähnlichkeit nur für mathematische Gegenstände zu erklären, und sie in die Übereinstimmung der Form oder der Art der Zusammensetzung zu setzen. Auf die Form allein kommt es bey dem Unterschiede mathematischer Zusammensetzungen an, so lange man sie nicht auf wirkliche Gegenstände anwendet.

Euklides giebt keinen allgemeinen Begriff von Ähnlichkeit, sondern setzt die Bestimmungen, die zur Ähnlichkeit erforderlich sind, für jede Gattung von Größen besonders fest, als für ähnliche geradlinichte Figuren, ähnliche Körper, Kegel, Cylinder, Flächenzahlen und Körperzahlen.

Nicolaus Bernoulli macht dreyerley Arten von Ähnlichkeit der Figuren. Die Abscissen der einen und der andern seyn in einem gegebenen Verhältnisse, so sind die krummen Linien lateraliter ähnlich, wenn die zu den Abscissen in beiden Linien gehörigen Ordinaten sich wie die Abscissen verhalten: exponentialiter oder potentialiter, wenn die Ordinaten sich wie Potenzen der Abscissen verhalten; functionaliter, wenn die Ordinaten denselben Functionen der Abscissen proportional sind. (Joh. Bernoulli Operum T. II. p. 451.)

Zu vergleichen: Euler de similitudine et affinitate curvarum, in Introd. in Anal. Infin. Tab. II. c. 18.

Aenigma Florentinum. S. Florentiner Aufgabe.

Aequatio. S. Gleichung.

Aequatio ſummatrix, ein Ausdruck, von Leibnitz gebraucht iſt, und daſſelbe bedeutet, was n jetzt Integralrechnung nennt. Er ſah Integriren als Summiren an, daher er auch das Zeichen $\int$ nahm, das Integral eines Differentials zu bezeichnen. Als w die Differentialgleichung iſt $p\,d\,y = x\,d\,x$, ſo iſt die dar folgende Summatrix, $\int p\,d\,. = \int x\,d\,x$. Leibnit. Opp. T. p. 192. In einem Briefe an Joh. Bernoulli, der Benennung, Integralrechnung, eingeführt hat, ſagt L nitz, daß er dieſe Rechnung Calculum ſummatori nenne; hingegen calculum integralem die Rechnun weiſe arithmetiſche Aufgaben in ganzen Zahlen, wo es geht, aufzulöſen. Commerc. phil. et mathem. L nitii et Joh. Bernoulli. T. II. p. 161.

Aequiangula figura, eine geradlinichte Fi deren Winkel alle unter ſich gleich ſind.

Aequicrurum triangulum, gleichſchenklic Dreyeck.

Aequidiſtans, eine Linie, die von einer andern i len Puncten gleichen Abſtand hat. S. Abſtand.

Aequilatera figura, eine geradlinichte Fi deren Seiten alle unter ſich gleich ſind.

Äußerer Winkel (angulus externus), in ei Dreyeck der Nebenwinkel eines der drey Winkel deſſel bey Parallelen der Nebenwinkel desjenigen, welchen ſie dem zwiſchen ihnen enthaltenen Theile einer ſchneide geraden Linie machen. S. Parallelen.

Äußerſter Theil in einem ſphäriſchen rechtwinl ten Dreyecke. S. Nepers Regel von ſphär. Dreyec

Affecta aequatio, eine Gleichung, n mehr als eine Potenz der unbekannten Größe vorko ein Gegenſatz gegen aequatio pura, worin nur eine P derſelben ſich findet.

Affectio, Beſchaffenheit einer krummen Lini Abſicht auf ihren Lauf ins Unendliche, wenn ſie ſo

nimmt, ihre Berührungsart mit einer geraden Linie oder andern krummen, ihre vielfachen Puncte, wenn sie solche hat, und dergleichen. Diese Erklärung ist nach dem Cap. XIII. der Introd. in Anal. Inf. P. II. von Euler gemacht, welcher proprietates und affectiones zu unterscheiden scheint, wie es sehr wohl thunlich ist. Nach d' Alembert in der Encycl. method. ist Affection einerley mit propriété.

Affinitas. S. Ähnlichkeit.

Affirmativ, so viel als positiv, womit besonders in lateinischen Schriften die Wörter affirmativus und affirmative als gleichbedeutend vorkommen. Der Ausdruck ist von Vieta eingeführt, aber in der Bedeutung wie additiv. Das Affirmative ist dem Negativen entgegengesetzt. S. Entgegengesetzte Größen.

Afterkegel, ein Körper, der durch die Umdrehung einer krummen Linie mit zwey unendlichen Schenkeln um ihre Axe entsteht, wie einer Parabel und Hyperbel. Die deutsche Benennung ist von J. Ch. Sturm in seiner Übersetzung der Archimedeischen Schriften aufgebracht, so wie er überhaupt alle darin vorkommenden Kunstwörter deutsch giebt. Allein das Wort After bedeutet eine Folge der Zeit, dem Orte oder der Ordnung nach, wie das Niedersächsische Achter (z. B. Aftergeburt, Afterdarm), und wenn man es auch in einer herabwürdigenden Bedeutung gelten lassen will, so wäre diese doch hier nicht passend. Man behalte das griechische Wort **Konoid**. S. Conoides.

Afterkugel. S. Sphäroid.

Afterwalze. S. Cylindroid.

Aggregat ist algebraische Summe, oder der Werth einer Größe, die aus mehrern Theilen zusammengesetzt ist, diese mögen alle gleichnamige Vorzeichen haben, oder mit verschiedenen begleitet seyn, und der Werth selbst mag positiv oder negativ zu nehmen seyn. Sind die Vorzeichen gleichnamig, so ist Aggregat dasselbe mit der arithmetischen Summe, ein Ganzes, das seinen erschöpfenden Theilen zusammengenommen gleich ist.

D' Alemberts Lehrſatz iſt folgender. Es ſey φx eine Function von x, und $y = x - \varphi x$; ferner ſey ψx eine andere Funktion von x, ſo iſt

$$\psi x = \psi y + \varphi x \cdot \frac{d\psi y}{dy} + (\varphi x)^2 \cdot \frac{d^2\psi y}{2\,dy^2} + (\varphi x)^3 \cdot \frac{d^3\psi y}{1.2.3.dy^3} + (\varphi x)^4 \cdot \frac{d^4\psi y}{1.2.3.4.dy^4} + \text{etc.}$$

Dieſe Formel wird in der Encyclopédie méthodique in dem Art. er es als ein Theorem von d' Alembert angeführt, woraus daſelbſt die wichtige Reverſions- oder Umwandlungs-Formel von la Grange hergeleitet wird. Der Verfaſſer des Artikels, Condorcet, giebt nicht an, wo d' Alembert jenen Satz vorgetragen hat.

In der That iſt dieſer Satz nichts anders als der ſchon lange bekannte Taylorſche Lehrſatz. Nach demſelben iſt irgend eine Function von $y + u$, die durch das vorgeſetzte Functionszeichen ψ bedeutet wird, $\psi(y + u) = \psi y + u \cdot \frac{d\psi y}{dy} + \frac{u^2}{1.2.} + \frac{d^2\psi y}{dy^2} + \frac{u^3}{1.2.3.} \cdot \frac{d^3\psi y}{dy^3} + \text{etc.}$ Da $x = y + \varphi x$ geſetzt iſt, ſo iſt $u = \varphi x$ und $\psi x + \psi(y + \varphi x)$, ſo daß der d' Alembertiſche Lehrſatz völlig mit dem Taylorſchen übereinkommt.

Leſern der Encyclopédie iſt vielleicht dieſe Bemerkung willkommen.

Algebra iſt die Lehre von den Gleichungen. Dieſe ſind ſymboliſche Formeln, wodurch die Verbindungen mehrerer Größen ausgedruckt werden (ſ. Gleichung). Die Eigenſchaften der Gleichungen, die Verwandlungen ihrer Form, die Zuſammenſetzung neuer Gleichungen aus mehreren gegebenen, die Ausſonderung einer jeden der geſuchten Größen durch eine Gleichung, in welcher ſie allein mit gegebenen Größen vorkommt, und beſonders die Auflöſung der Gleichungen ſind die Hauptſtücke dieſer Wiſſenſchaft. Die Auflöſung beſteht darin, daß aus der Relation der geſuchten Größe zu den gegebenen, welche in der Gleichung auf eine unentwickelte Art, durch Vermiſchung des Bekannten mit

annten, dargeſtellt wird, der Werth der un-
Größe bloß durch bekannte Größen ausge-
de. Die Auflöſung iſt der Zweck der Alge-
: Wolf und Hutton ſie erklären als Methode,
durch Gleichungen aufzulöſen. Nach Käſtners
lehrt ſie unbekannte Größen aus gegebenen
ten derſelben durch Gleichungen finden.
lgebra bedient ſich, wie die ganze Analyſis, alle
zeichen, um ihren Lehrſätzen und Auflöſungen
e Allgemeinheit zu geben. Darum wird oft die
nrechnung, welche die arithmetiſchen Zuſammen-
nd Entwickelungen der Größen mit allgemeinen
chen lehrt, zur Algebra gerechnet. Es iſt aber
davon abzuſondern, weil ſie das allgemeine Werk-
ie Algebra und Analyſis überhaupt iſt.
Erfindung der Gleichungen iſt das Werk des ma-
en Scharfſinns. Darüber laſſen ſich keine Re-
llen, ſo wie es überhaupt keine Methoden zur
giebt. Die Algebra lehrt eigentlich die ganze
ngsart gegebener Gleichungen. Hierzu iſt ſie im
eſtimmte Vorſchriften zu liefern. Sie weiſet
matiſchen Unterſuchungen einen gewiſſen Gang
die Methoden über die Combinationen, Ver-
n und Auflöſungen der Gleichungen. Ihre
ber die Relationen der gegebenen Größen zu den
en ſind Data, woraus man auf einem kurzen
dem beſondern Falle wichtige Lehrſätze und bequeme
en herleiten kann. Inzwiſchen iſt das Verfahren
wendung der Algebra nicht mechaniſch. Ein me-
Algebraiſt wird nur auf mühſamen Umwegen zum
men. Zu einer geſchickten Benutzung der alge-
Lehren iſt Überlegung, und nicht ſelten Scharf-
ig, um die Rechnung möglichſt kurz, deutlich
u führen, kurz, ihr eine Eleganz, wie man ſie von
hen Beweiſen und Auflöſungen fordert, zu ver-
Man muß nicht kurzſichtig auf die Symbole
heften, ſondern die Verbindungen der Größen
ar durchzuſchauen ſuchen.

(affinis). Die krummen Linien, die durch ſie dargeſtellt werden, ſind verwandte. Z. B. die Gleichung ſey $2at - xx = yy$, welche dem Kreiſe zugehört. Es ſey $t = mx$; $u = ny$, ſo iſt

$$\frac{2at}{m} - \frac{t^2}{m^2} = \frac{u^2}{n^2} \quad \text{oder}$$

$$\frac{n^2}{m^2} \cdot 2mat - \frac{n^2}{m^2} t^2 = u^2,$$

eine Gleichung für eine Ellipſe, deren halbe große Axe $= 2ma$ und Parameter $= \frac{n^2}{m^2} \cdot 2ma$ iſt.

Beſteht die Gleichung zwiſchen zwey veränderlichen Größen nur aus zwey Gliedern, ſo wird Verwandtſchaft zugleich Ähnlichkeit. Z. B. die Gleichung für die Parabel iſt $ax = yy$. Setzt man $t = mx$; $u = ny$, ſo verwandelt ſich dieſe Gleichung in folgende: $\frac{n^2 a}{m} t = u^2$, welche wiederum eine Parabel mit dem Parameter $\frac{n^2 a}{m}$ giebt. Nimmt man $u = my$, wie $t = mx$, ſo iſt $mat = uu$. Alle Parabeln ſind daher nicht allein verwandt, ſondern auch ähnlich. Oder es ſey die Gleichung, $ax^2 = y^5$, ſo erhält man durch jene Subſtitution $\frac{n^5 a}{m^3} t = u^5$, und, wenn $n = m$ genommen wird, $mat = u^5$.

Wolf hat zuerſt den allgemeinen Begriff von Ähnlichkeit in die Mathematik aufgenommen, wozu er durch Leibnitz veranlaßt iſt, der, wie er ſagt, zu allererſt einem deutlichen Begriff von Ähnlichkeit gegeben hat, dieſem nämlich, daß ähnliche Dinge nur durch das Bey einander ſeyn (compraeſentia) unterſchieden werden können. Wolf ſagt: Similia ſunt, in quibus eadem ſunt, per quae a ſe invicem diſcerni debebant. (Elem. Arithm. §. 24.) Weil die Quantität, ſetzt er hinzu, ohne Vergleichung mit einem andern Dinge für ſich nicht begriffen, ſondern nur gegeben

rmen, z. B. in einer Gleichung zwiſchen zwey unbe-
nten x und y die Form derſelben zu finden, wodurch
de ganze Zahlen werden; die Form von x zu beſtimmen,
durch eine Function dieſer Größe, wie $a + bx + cx^2$
c. ein rationales Quadrat oder ein ſolcher Cubus werde;
nen Ausdruck, wie $ax^2 + bxy + cy^2$ in Factoren zu
legen; die Summe $x^3 + y^3$ zu einem Quadrate zu
chen, oder ſie in zwey andere Quadrate zu verwandeln.
Man nennt dieſen Theil auch die Diophanteiſche Ana-
ſis, von Diophantus, der darüber ein ſchätzbares Werk
nterlaſſen hat. Doch mag derſelbe füglich zur Algebra
rechnet werden. Die Bedingung der Form dient ſtatt
ner Gleichung. Euler hat die Rechnung der unbeſtimm-
n Größen ſeinem Lehrbuche von der Algebra beygefügt,
nd ſie die unbeſtimmte Analytik genannt. Sie unter-
heidet ſich von der Analyſis unbeſtimmter Größen dadurch,
ß in dieſer die unbeſtimmten veränderlichen Größen keiner
ondern Form unterworfen werden. Ein Abriß derſel-
n iſt in dem Artikel, unbeſtimmte Analytik, um die
Benennung, die Euler ihr gegeben hat, beyzubehalten.

In Abſicht auf den Vortrag unterſcheidet man die nu-
meriſche und die ſymboliſche Algebra.

Die numeriſche Algebra (Algebra numeroſa) iſt
jenige, deren ſich die alten Algebraiſten bedienten, und
war bloß zur Auflöſung arithmetiſcher Aufgaben, die
leichſam als Räthſel zu Übung des arithmetiſchen Scharf-
nnes vorgelegt werden. Die unbekannte Größe allein
ard durch einen Buchſtaben oder ſonſt ein Zeichen darge-
ellt; alle bekannten und gegebenen Größen aber wurden
rch Zahlen ausgedruckt. Dieſer Methode mag man
ch für Anfänger, wenn ſie bey den allgemeinen Ausdrücken
chwierigkeiten finden, bedienen.

Die ſymboliſche Algebra (A. literalis, ſpecioſa)
zeichnet alle Größen, die gegebenen, ſo wie die geſuch-
n, durch Buchſtaben als Symbole. Dadurch iſt ſie im
tande, ihre Auflöſung auf alle nur mögliche Fälle und
f alle Arten von Größen anzuwenden, der Gegenſtand
ng in die Arithmetik, oder Geometrie, oder Mechanik,

Aequatio ſummatrix, ein Ausdruck, von Leibnitz gebraucht iſt, und daſſelbe bedeutet, was n jetzt Integralrechnung nennt. Er ſah Integriren als Summiren an, daher er auch das Zeichen $\int$ nahm, das Integral eines Differentials zu bezeichnen. Als w die Differentialgleichung iſt $p\,dy = x\,dx$, ſo iſt die dar folgende Summatrix, $\int p\,dy = \int x\,dx$. Leibnit. Opp. T. p. 192. In einem Briefe an Joh. Bernoulli, der Benennung, Integralrechnung, eingeführt hat, ſagt L nitz, daß er dieſe Rechnung Calculum ſummatori nenne; hingegen calculum integralem die Rechnun weiſe arithmetiſche Aufgaben in ganzen Zahlen, wo es geht, aufzulöſen. Commerc. phil. et mathem. L nitii et Joh. Bernoulli. T. II. p. 161.

Aequiangula figura, eine geradlinichte Fi deren Winkel alle unter ſich gleich ſind.

Aequicrurum triangulum, gleichſchenklich Dreyeck.

Aequidiſtans, eine Linie, die von einer andern i len Puncten gleichen Abſtand hat. S. Abſtand.

Aequilatera figura, eine geradlinichte Fi deren Seiten alle unter ſich gleich ſind.

Äußerer Winkel (angulus externus), in ei Dreyeck der Nebenwinkel eines der drey Winkel deſſel bey Parallelen der Nebenwinkel desjenigen, welchen ſie dem zwiſchen ihnen enthaltenen Theile einer ſchneide geraden Linie machen. S. Parallelen.

Äußerſter Theil in einem ſphäriſchen rechtwinl ten Dreyecke. S. Nepers Regel von ſphär. Dreyeck

Affecta aequatio, eine Gleichung, n mehr als eine Potenz der unbekannten Größe vorko ein Gegenſatz gegen aequatio pura, worin nur eine P derſelben ſich findet.

Affectio, Beſchaffenheit einer krummen Lini Abſicht auf ihren Lauf ins Unendliche, wenn ſie ſo

nimmt, ihre Berührungsart mit einer geraden Linie oder dem krummen, ihre vielfachen Puncte, wenn sie solche at, und dergleichen. Diese Erklärung ist nach dem ap. XIII. der Introd. in Anal. Inf. P. II. von Euler gemacht, welcher proprietates und affectiones zu unterscheiden scheint, wie es sehr wohl thunlich ist. Nach d' Alembert in der Encycl. method. ist Affection einerley mit propriété.

Affinitas. S. Ähnlichkeit.

Affirmativ, so viel als positiv, womit besonders in lateinischen Schriften die Wörter affirmativus und affirmative als gleichbedeutend vorkommen. Der Ausdruck ist von Vieta eingeführt, aber in der Bedeutung wie additiv. Das Affirmative ist dem Negativen entgegengesetzt. S. Entgegengesetzte Größen.

Afterkegel, ein Körper, der durch die Umdrehung einer krummen Linie mit zwey unendlichen Schenkeln um ihre Axe entsteht, wie einer Parabel und Hyperbel. Die deutsche Benennung ist von J. Ch. Sturm in seiner Übersetzung der Archimedeischen Schriften aufgebracht, so wie er überhaupt alle darin vorkommenden Kunstwörter deutsch giebt. Allein das Wort After bedeutet eine Folge der Zeit, dem Orte oder der Ordnung nach, wie das niedersächsische Achter (z. B. Aftergeburt, Afterdarm), und wenn man es auch in einer herabwürdigenden Bedeutung gelten lassen will, so wäre diese doch hier nicht passend. Man behalte das griechische Wort **Konoid**. S. Conoides.

Afterkugel. S. Sphäroid.

Afterwalze. S. Cylindroid.

Aggregat ist algebraische Summe, oder der Werth einer Größe, die aus mehrern Theilen zusammengesetzt ist, diese mögen alle gleichnamige Vorzeichen haben, oder mit verschiedenen begleitet seyn, und der Werth selbst als positiv oder negativ zu nehmen seyn. Sind die Vorzeichen gleichnamig, so ist Aggregat dasselbe mit der arithmetischen Summe, ein Ganzes, das seinen erschöpfenden Theilen zusammengenommen gleich ist.

D'Alemberts Lehrsatz ist folgender. Es sey φx eine Function von x, und y = x − φx; ferner sey ψx eine andere Function von x, so ist

$$\psi x = \psi y + \varphi x \cdot \frac{d\psi y}{dy} + (\varphi x)^2 \cdot \frac{d^2\psi y}{2\,dy^2} + (\varphi x)^3 \cdot \frac{d^3\psi y}{1.2.3.\,dy^3} + (\varphi x)^4 \cdot \frac{d^4\psi y}{1.2.3.4.\,dy^4} + \text{etc.}$$

Diese Formel wird in der Encyclopédie méthodique in dem Art. series als ein Theorem von d'Alembert angeführt, wovon daselbst die wichtige Reversions- oder Umwandlungs-Formel von la Grange hergeleitet wird. Der Verfasser des Artikels, Condorcet, giebt nicht an, wo d'Alembert jenen Satz vorgetragen hat.

In der That ist dieser Satz nichts anders als der schon lange bekannte Taylorsche Lehrsatz. Nach demselben ist irgend eine Function von y + u, die durch das vorgesetzte Functionszeichen ψ bedeutet wird, $\psi(y+u) = \psi y + u.\frac{d\psi y}{dy} + \frac{u^2}{1.2.} + \frac{d^2\psi y}{dy^2} + \frac{u^3}{1.2.3.} \cdot \frac{d^3\psi y}{dy^3}$ + etc. Da x = y + φx gesetzt ist, so ist u = φx und ψx + ψ(y + φx), so daß der d'Alembertische Lehrsatz völlig mit dem Taylorschen übereinkommt.

Lesern der Encyclopédie ist vielleicht diese Bemerkung willkommen.

Algebra ist die Lehre von den Gleichungen. Diese sind symbolische Formeln, wodurch die Verbindungen mehrerer Größen ausgedruckt werden (s. Gleichung). Die Eigenschaften der Gleichungen, die Verwandlungen ihrer Form, die Zusammensetzung neuer Gleichungen aus mehreren gegebenen, die Aussonderung einer jeden der gesuchten Größen durch eine Gleichung, in welcher sie allein mit gegebenen Größen vorkommt, und besonders die Auflösung der Gleichungen sind die Hauptstücke dieser Wissenschaft. Die Auflösung besteht darin, daß aus der Relation der gesuchten Größe zu den gegebenen, welche in der Gleichung auf eine unentwickelte Art, durch Vermischung des Bekannten mit

kannten, dargestellt wird, den Werth der un-
r Größe bloß durch bekannte Größen anzuge-
erde. Die Auflösung ist der Zweck der Alge-
er Wolf und Hutton sie erklären als Methode,
durch Gleichungen aufzulösen. Auch Kästners
g lehrt sie unbekannte Größen aus gegebenen
ssen derselben durch Gleichungen finden.

Algebra bedient sich, wie die ganze Analysis, allg-
Zeichen, um ihren Lehrsätzen und Auflösungen
sie Allgemeinheit zu geben. Darum wird oft die
rechnung, welche die arithmetischen Zusammens
und Entwickelungen der Größen mit allgemeinen
achen lehrt, zur Algebra gerechnet. Es ist aber
davon abzusondern, weil sie das allgemeine Werk
die Algebra und Analysis überhaupt ist.

Erfindung der Gleichungen ist das Werk des men-
hen Scharfsinns. Darüber lassen sich keine Re-
eilen, so wie es überhaupt keine Methoden zur
n giebt. Die Algebra lehrt eigentlich die ganze
lungsart gegebener Gleichungen. Hierzu ist sie im
bestimmte Vorschriften zu liefern. Sie weiset
matischen Untersuchungen einen gewissen Gang
h die Methoden über die Combinationen, Ver-
gen und Auflösungen der Gleichungen. Ihre
über die Relationen der gegebenen Größen zu den
ten sind Data, woraus man auf einem kurzen
jedem besondern Falle wichtige Lehrsätze und bequeme
igen herleiten kann. Inzwischen ist das Verfahren
Anwendung der Algebra nicht mechanisch. Ein me-
r Algebraist wird nur auf mühsamen Umwegen zum
nmen. Zu einer geschickten Benutzung der alge-
n Lehren ist Überlegung, und nicht selten Scharf-
nig, um die Rechnung möglichst kurz, deutlich
zu führen, kurz, ihr eine Eleganz, wie man sie von
schen Beweisen und Auflösungen fordert, zu ver-

Man muß nicht kurzsichtig auf die Symbole
e heften, sondern die Verbindungen der Größen
bar durchzuschauen suchen.

Die Erfindung der Gleichungen pflegt bey reinen arithmetiſchen Aufgaben keine Schwierigkeit zu haben, weil die Bedingungen der Frage alle in der Frage ſelbſt ſchon gegeben werden. Allein bey der Anwendung der Rechnung auf Gegenſtände aus der Geometrie, Phyſik und techniſchen Mathematik iſt es oft nicht leicht zu den Gleichungen zu gelangen, weil vielleicht nicht alle Größen, die auf die Beſtimmung des Geſuchten Einfluß haben, gegeben werden, oder weil zwiſchen den gegebenen und geſuchten Größen, Bedingungen und Verhältniſſe Statt haben, die aus der Beſchaffenheit des Gegenſtandes fließen, aber in der Aufgabe nicht vorkommen. Wird nach mehrern Größen gefragt, ſo muß man diejenige ausſuchen, aus welcher die übrigen am leichteſten hergeleitet werden. Zuweilen iſt es nützlich, nicht die Größe, welche gefunden werden ſoll, unmittelbar zu ſuchen, ſondern eine andere, aus welcher jene ſich leicht herleiten läßt. Z. B. wenn die Summe zweyer unbekannten Größen ein Datum iſt, ſo iſt es am bequemſten, ihren Unterſchied zu ſuchen, weil daraus und aus der Summe ſich die beiden Größen ganz leicht ergeben. — Wenn nun alle Bedingungen einer Frage in die algebraiſche Sprache überſetzt, oder in Gleichungen gefaßt ſind, ſo daß man ſo viele Gleichungen als unbekannte Größen hat, ſo hat man aus dieſer für jede derſelben eine Gleichung zu ſuchen, in welcher ſie allein nebſt gegebenen Größen vorkommt, indem die andern unbekannten Größen aus der Verbindung mit ihr gebracht oder weggeſchafft werden (ſ. Elimination). Hierauf wird jede Gleichung für ſich aufgelöſet, welches bey den Gleichungen, die nicht über den vierten Grad ſteigen, auf eine directe Art geſchehen kann, bey höhern aber nur indirecte auszuführen iſt.

Die Algebra hat zwey Haupttheile. In dem erſten wird von den Relationen der bekannten und unbekannten Größen gehandelt, wenn die letztern ihre beſtimmten Werthe haben. In dem zweyten werden diejenigen Relationen betrachtet, wodurch die Werthe der unbekannten Größen ſelbſt nicht beſtimmt werden, ſondern nur ihre

formen, z. B. in einer Gleichung zwiſchen zwey unbekannten x und y die Form derſelben zu finden, wodurch beide ganze Zahlen werden; die Form von x zu beſtimmen, wodurch eine Function dieſer Größe, wie $a + bx + cx^2$ etc. ein rationales Quadrat oder ein ſolcher Cubus werde; einen Ausdruck, wie $ax^2 + bxy + cy^2$ in Factoren zu zerlegen; die Summe $x^3 + y^3$ zu einem Quadrate zu machen, oder ſie in zwey andere Quadrate zu verwandeln. Man nennt dieſen Theil auch die **Diophanteiſche Analyſis**, von **Diophantus**, der darüber ein ſchätzbares Werk hinterlaſſen hat. Doch mag derſelbe füglich zur Algebra gerechnet werden. Die Bedingung der Form dient ſtatt einer Gleichung. Euler hat die Rechnung der unbeſtimmten Größen ſeinem Lehrbuche von der Algebra beygefügt, und ſie die **unbeſtimmte Analytik** genannt. Sie unterſcheidet ſich von der Analyſis unbeſtimmter Größen dadurch, daß in dieſer die unbeſtimmten veränderlichen Größen keiner beſondern Form unterworfen werden. Ein Abriß derſelben iſt in dem Artikel, **unbeſtimmte Analytik**, um die Benennung, die Euler ihr gegeben hat, beyzubehalten.

In Abſicht auf den Vortrag unterſcheidet man die **numeriſche** und die **ſymboliſche** Algebra.

Die **numeriſche Algebra** (Algebra numeroſa) iſt diejenige, deren ſich die alten Algebraiſten bedienten, und zwar bloß zur Auflöſung arithmetiſcher Aufgaben, die gleichſam als Räthſel zu Übung des arithmetiſchen Scharfſinnes vorgelegt werden. Die unbekannte Größe allein ward durch einen Buchſtaben oder ſonſt ein Zeichen dargeſtellt; alle bekannten und gegebenen Größen aber wurden durch Zahlen ausgedruckt. Dieſer Methode mag man ſich für Anfänger, wenn ſie bey den allgemeinen Ausdrücken Schwierigkeiten finden, bedienen.

Die **ſymboliſche Algebra** (A. literalis, ſpecioſa) bezeichnet alle Größen, die gegebenen, ſo wie die geſuchten, durch Buchſtaben als Symbole. Dadurch iſt ſie im Stande, ihre Auflöſung auf alle nur mögliche Fälle und auf alle Arten von Größen anzuwenden, der Gegenſtand mag in die Arithmetik, *oder Geometrie*, oder Mechanik,

viele hiſtoriſche Nachrichten eingerückt, iſt aber zu partheyiſch für ſeinen Landsmann Harriot, ſo wie auf der andern Seite Gua in ſeiner Geſchichte der Algebra (Mém. de l'acad. des scienc. 1741) zu viele Vorliebe für Vieta zeigt.

Hutton hat in ſeinem mathematiſchen und phyſikaliſchen Wörterbuche Vol I. p 65 — 97 eine Geſchichte der Algebra geliefert, die in Abſicht auf die Schriftſteller des 16ten und 17ten Jahrhunderts ſehr ausführlich iſt, in der neuern aber nur kurze Anzeigen enthält. Er verſichert, daß er alle ältern Schriftſteller über die Algebra, deren er habhaft werden können, nach ihrer Folge ſorgfältig durchgeleſen, und eine umſtändliche Beſchreibung der von ihnen abgehandelten Lehren, ihrer Verbeſſerungen und Fortſchritte, ihres Eigenthümlichen und ihrer Bezeichungsarten gemacht habe, wovon er inzwiſchen nur einen Auszug mittheilen könne. Da die von Hutton gelieferten hiſtoriſchen Nachrichten Sorgfalt und Unpartheylichkeit zeigen, ſo werden ſie in der folgenden Geſchichte der Algebra zur Ergänzung meiner eigenen Unterſuchungen gebraucht werden.

Geſchichte der Algebra.

Das älteſte Werk über die Algebra, welches wir haben, iſt von **Diophantus** aus Alexandrien, deſſen Zeitalter aber unbekannt iſt, wiewohl man ihn in das vierte Jahrhundert zu ſetzen pflegt. Er hat 13 Bücher von arithmetiſchen Aufgaben in griechiſcher Sprache geſchrieben, wie er ſelbſt am Ende der Einleitung es angiebt. Von dieſen ſind nur ſechs zu uns gekommen, mit einem Buche von den Polygonalzahlen. Die erſte Ausgabe iſt von Xylander, in einer lateiniſchen Ueberſetzung, Baſel 1575, Fol. Den griechiſchen Text mit einer lateiniſchen Überſetzung gab Bachet zu Paris 1621. Fol. heraus. Die beſte iſt griechiſch und lateiniſch, mit einem Commentar von Bachet und Bemerkungen von Fermat. Toulouſe 1670 Fol. Die in dieſen Büchern vorgetragenen Aufgaben gehören größtentheils zur unbeſtimmten Analytik. Die Aufgaben in

i erſten Buche aber ſind beſtimmte, und führen alle Gleichungen vom erſten Grade, auſſer die Aufgaben ; 31; 33, welche die Auflöſung einer Gleichung vom ten Grad erfordern. Doch vermeidet Diophantus ch die Wahl der unbekannten Größe die Form, welche ſt dem Quadrat die unbekannte Größe ſelbſt enthält,) findet ſie durch eine reine oder einfache quadratiſche ichung. Die ganze Sammlung iſt ein Beweis von meiſterhaften Geſchicklichkeit des Verfaſſers, und zeigt, er in die mathematiſche Analyſis tief eingedrungen iſt. i er aber die unbekannten Größen ſo wählt, und die ſöſung ſo einrichtet, daß er alle Bedingungen in Gleich- en vom erſten Grade oder höchſtens einfache quadra- he Gleichungen bringt, ſo kann man nicht wahrnehmen, s ihm von der Auflöſung zuſammengeſetzter Gleichungen, eigentlichen Algebra, bekannt geweſen ſey. Die arith- tiſche Analyſis des Diophantus hat, wie die geome- ſche der Alten, nur wenige und einfache Hülfsmittel. zu jeden beſondern Falle war alſo erfinderiſche Geſchick- chkeit nöthig, die ſich nicht in Regeln und ſymboliſchen ätzen mittheilen ließ. Daher haben wir bey den Alten ne techniſche Analyſis oder Algebra zu ſuchen. Ihre alyſis war eine geiſtige, keine formulare. Diophantus t ſeine Aufgaben durch einfache Gleichungen auf, und raucht in der Rechnung nur eine unbekannte Größe mit em Symbol, wählt aber dieſe ſo ſinnreich, daß alle die igen unbekannten Größen in der Aufgabe dadurch leicht gedruckt werden, und daß die Endgleichung die einfach- Geſtalt, die möglich ſeyn mag, erhält. Das feine rfahren bey der Beſtimmung der zu ſuchenden Größe bt dieſer Sammlung von Aufgaben ihren vorzüglichen rth. Iſt dieſe feſtgeſetzt, ſo findet ſich die Endgleich- g leicht und ſehr deutlich. Die gegebenen Größen druckt ophantus zwar in Zahlen aus. Man ſieht aber doch i der Rechnung, wie ſie für andere Zahlen zu führen

Die unbekannte Größe nennt er ſchlechtweg eine Zahl) bezeichnet ſie durch ς. Bekommt ſie einen Zahlcoeffi- ten, ſo wird dieſer nachgeſetzt, und jenes Zeichen ver-

doppelt, z. B. $\varsigma\varsigma^{\alpha}\bar{\gamma}$, das ist nach unserer Bezeichnung $3x$, oder es wird das Zahlwort selbst nachgesetzt. Das Quadrat einer Zahl bezeichnet Diophantus durch δ^{υ}. den Cubus durch κ^{υ}, das Biquadrat durch $\delta\delta^{\upsilon}$ die fünfte Potenz durch $\delta\kappa^{\upsilon}$, die sechste durch $\kappa\kappa^{\upsilon}$, die Einheit hat das Zeichen μ^{o}. Die vier Species der Rechenkunst bey Größen, die aus bekannten und unbekannten bestehen, setzt er voraus. Daß ein Defect (λειψις) mit einem Defect multiplicirt einen Ueberschuß (ὑπαρξις) giebt, und daß ein Defect mit einem Ueberschuß multiplicirt einen Defect giebt, nimmt er als erwiesen an. Von seinem Verfahren werden in der unbestimmten Analytik ein paar Beyspiele gegeben werden.

In Europa ist die Algebra nicht durch das Werk des Diophantus bekannt geworden, sondern wie die meisten andern Kenntnisse von den Arabern mitgetheilt worden. Cardanus giebt auf das Zeugniß des Leonardo von Pisa den Araber **Mahomet Ben Musa** (Sohn des Mose) als den ersten Schriftsteller über die Algebra an. Ein Werk von ihm ist in einigen Bibliotheken handschriftlich vorhanden. Die Araber haben ohne Zweifel die Schriften der Griechen über die höhere Arithmetik gekannt; nach dem Zeugnisse des Abulpharagi ist Diophantus ins Arabische übersetzt worden. Die Behandlung der Gleichungen vom ersten Grade ist von dem griechischen Schriftsteller schon in den Beyspielen gut gewiesen worden. Die Araber haben sie vielleicht systematischer gemacht, und durch den Gebrauch ihrer bequemen Zahlzeichen erleichtert. Insbesondere mögen sie die Vorschriften zur Auflösung zusammengesetzter quadratischer Gleichungen herausgebracht haben, welches für uns gegenwärtig zwar etwas sehr leichtes ist, allein in dem Anfange der Kunst ein wichtiger Fortschritt war. Die Araber haben sich auch schon mit den cubischen Gleichungen beschäftigt. In der Bibliothek zu Leiden ist ein arabisches Manuscript über diese Gleichungen vorhanden, wovon Hutton eine Abschrift oder eine Übersetzung durch den zu früh verstorbenen Professor Damen zu Leiden zu erhalten hoffte.

n den Mauro-Arabern ward die Kenntniß der
nach Spanien verpflanzt. Aus dieſem Lande mö-
Italiener ſie zum Theil erhalten haben. Doch
e auch unmittelbar von den Arabern durch einen
ndsleute Unterricht in dieſer Kunſt bekommen. Le-
o von Piſa, ein Kaufmann, der um das J. 1200
Reiſen nach dem Orient unternahm, brachte von da
ntniß der arabiſchen Arithmetik und Algebra mit
lzeichen). Er hat eine noch ungedruckte Algebra
ſſen. In Italien fand dieſe neue Art der Arith-
iele Liebhaber, welches die in Bibliotheken noch
denen Manuſcripte arithmetiſcher Werke bezeugen.
erfaſſer der erſten, nach der Erfindung der Buch-
kunſt erſchienenen Schriften über die Algebra füh-
nche ältere Schriftſteller als ihre Vorgänger und
in dieſer Kunſt an.

as älteſte arithmetiſch-algebraiſche Werk unter
druckten iſt das vorher angeführte von Lucas Pa-
, oder Frater Lucas de Burgo ſancti ſepulcri, einem
rten Mönch. (Käſtners Geſch. der Math. I. S.

Die damahls in Europa vorhandene Kenntniſſe in
ithmetik, Algebra und Geometrie ſind darin voll-
ſ und ſehr gut vorgetragen. Die gemeine Arith-
nd die Ausziehung der Quadrat- und Cubikwurzeln
i darin faſt auf die jetzt gebräuchliche Art gelehrt.
ner höhern Arithmetik oder A te maggiore handelt
ſt von den Proportionen, ſowohl der arithmetiſchen
metriſchen, mit vielen Beyſpielen von Aufgaben über
ometriſche Progreſſion, die er durch eine Art von
a auflöſet. Ferner von der Regula falſi, der ein-
und gedoppelten, die er mit einem arabiſchen oder
iſchen Worte el Catayn nennet. Dann von den
meinen Species in der Algebra, wo er zeigt, daß
r Multiplication und Diviſion gleiche Vorzeichen +,
he — geben. Weiter von der Ausziehung der Wur-
nd der Rechnung mit Wurzelgrößen. Auch lehrt
erfaſſer die Ausziehung der Quadratwurzeln aus
n von der Form wie $23 + \sqrt{448}$ und $\sqrt{18 + \sqrt{10}}$,

zur Erläuterung des 10ten Buchs vom Euklides. Darauf handelt er die Gleichungen vom ersten und zweyten Grade ab. Die Auflösung der letztern bewerkstelligt er so, wie wir es jetzt thun, durch Ergänzung des Quadrats, und dann durch die Ausziehung der Wurzel aus beiden Theilen der Gleichung. Auch löset er Gleichungen vom vierten Grade auf, welche die Form einer quadratischen haben. Bey quadratischen Gleichungen mit zwey positiven Wurzeln gebraucht er die Wurzeln beide; allein bey denen mit einer negativen Wurzel giebt er auf diese nicht Acht. Die cubischen Gleichungen und die höhern (die schon gedachten vom vierten Grade ausgenommen) aufzulösen, giebt er als unmöglich auf, mit dem Beyfügen, daß man dazu so wenig als für die Quadratur des Kreises eine allgemeine Vorschrift gefunden habe. Die Bezeichnungen des Lucas sind n° für die bekannte Größe, co (d. i. cosa) für die unbekannte Größe; ce. (censo) für ihr Quadrat; cu. (cubo) für den Cubus; ce. ce. für das Biquadrat; p° r° (primo relato) für die fünfte Potenz; ce. cu für die sechste Potenz; p (piu) für das Zeichen der Addition; m (meno) für die Subtraction. Z. B. 3co. p. 4ce. m. 5cu. p. 2ce. ce. m. 6n° ist, was wir jetzt so schreiben: $3x + 4x^2 - 5x^3 + 2x^4 - 6$. Für die Auflösung der quadratischen Gleichungen findet man bey ihm die Regeln in barbarisch-lateinischen, nach seinem Urtheil eleganten Versen, Hier ist eine derselben, für den Fall $x^2 + mx = a$, wo $x = \sqrt{(a + \frac{1}{4}m^2)} - \frac{1}{2}m$.

Si res et census numero coequantur, a rebus
Dimidio sumto censum producere debes,
Addereque numero, cuius a radice totiens
Tolle semis rerum, census latusque redibit.

Das Werk des Lucas scheint das Studium der Algebra allgemeiner und eifriger gemacht zu haben. Nicht lange nach der Erscheinung desselben, um das J. 1505, fand Scipio Ferreo, Professor der Mathematik zu Bologna, zuerst die Regel für die Auflösung eines Falles

ischen Gleichungen, nämlich den, $x^5 + mx = a$,
ch damahliger Art des Ausdrucks, capitulum cubi
m numero aequali m. Er entdeckte einem seiner
r, Florido, oder Fiore, die Auflösung, woraus
gens ein Geheimniß machte. Dieser bediente sich
i mitgetheilten Verfahrens, andere mit Aufgaben
n, deren Auflösung von der Regel für jenen Fall
r Gleichungen abhieng. Insbesondere brachte er
rtalea (richtiger als Tartaglia) aus Brescia, der
edig die Mathematik lehrte, durch seine Aufforde-
dahin, daß er mit ihm eine Wette eingieng, wer
nen beiden dreyßig Aufgaben, die der eine dem
vorlegen würde, auflösen könnte. Nun hatte
ea schon im J. 1530 für zwey Fälle der cubischen
ungen, nämlich $x^3 + mx^2 = a$, und $x^3 = nx^2$
die Auflösung gefunden. Auf Veranlassung der
sforderung von Florido bemühte er sich um die Auf-
der Fälle, $x^3 + mx = a$ und $x^3 = mx + a$.
t sie gefunden hatte, legte er seinem Gegner manche
ben vor, die auf die letztere dieser Gleichungen, oder
e, die das Quadrat der unbekannten Größe nebst dem
enthalten, führten. Dieser war nicht im Stande sie
ösen, dagegen Tartalea alle ihm zugestellten beant-
rn. Die ganze Geschichte der Entdeckung, und die
l, welche darüber mit Cardanus entstanden, erzählt
ea in dem 9ten Buche seiner Quesiti et Inventioni
, Venedig 1546. Dieses Werk enthält die Be-
tungen von mancherley Fragen, die dem Verfasser
gt sind, größtentheils die Artillerie, Taktik und Fe-
igskunst betreffend, und in dem letzten Buche, wel-
s neunte ist, die Fragen arithmetischen und geo-
hen Inhalts. Das vornehmste und letzte Werk des
ea ist sein Trattato d numeri e misure, Venedig
und 1560. Da der Verfasser im J. 1557 starb,
er Theil, der von der Algebra handelt, unvollendet
en, und erstreckt sich nur bis zu den Gleichungen
ierten Grade.

Hieronymus Cardanus, aus Mayland, ein sehr gelehrter und mit allen seinen Wunderlichkeiten merkwürdiger Mann, erhielt von Tartalea auf sein inständiges Bitten, und gegen die heiligste Versicherung, die Entdeckung nicht bekannt zu machen, die Mittheilung der von diesem gefundenen Auflösung cubischer Gleichungen. Er machte sie aber doch 1545 bekannt in dem Werke: Artis magnae sive de regulis Algebrae Liber unus, welches als das 10te Buch zu den 9 Büchern der Practica arithmeticae generalis, Mediol. 1539, gehört. Es ist auch zu Basel 1570 herausgekommen, nebst andern mathematischen Werken des Verfassers: Opus novum de proportionibus numerorum, motuum, etc. — Praeterea, Artis magnae — liber unus — item de Aliza regula Liber. — Tartalea empfand dies sehr übel, und ward dadurch veranlaßt, seine Verhandlungen mit Cardan bekannt zu machen. Die Zänkereyen zwischen beiden dauerten bis zum Tode des erstern. Cardan suchte sich dadurch zu rechtfertigen, daß er die Beweise zu den ihm mitgetheilten Regeln der Auflösung gefunden, und die Erfindung des Tartalea erweitert hätte. Er hat durch die Bekanntmachung der Vorschrift, cubische Gleichungen aufzulösen, die Ehre erhalten, daß man sie allgemein Cardans Regel nennt, da sie eigentlich nach ihrem Erfinder die Regel des Tartalea heißen sollte. Inzwischen hat doch auch Cardan sich um die Theorie der cubischen Gleichungen verdient gemacht, und zu allgemeinern Bemerkungen und Behandlungen der Gleichungen den Weg gewiesen. Er sah zuerst ein, daß eine Gleichung auch negative Wurzeln haben könne; nur nannte er sie erdichtete (fictas), wie auch noch Wolf sie falsche Wurzeln nannte. Er erklärte ihre Beschaffenheit aber sehr gut dadurch, daß er sagte, die erdichtete Wurzel der Gleichung $x^3 + a = mx$ komme überein mit der wahren Wurzel der Gleichung $x^3 = mx + a$, und daß die Veränderungen der Vorzeichen des zweyten und letzten Gliedes in einer vollständigen cubischen Gleichung die positiven Wurzeln negativ und die negativen positiv mache. Da Tartalea dem Cardanus nur die Regel

zur Auflösung cubiſcher Gleichungen für drey Fälle, I. $x^3 + mx = a$, II. $x^3 = mx + a$, III. $x^3 + a = mx$ mitgetheilt hatte, ſo ſuchte er Regeln für alle Formen und Abänderungen der cubiſchen Gleichungen, wobey er faſt alle Verwandlungen der Formen aufſtellte, wie es bis dahin noch nicht geſchehen war. Er fand, wie in cubiſchen und höhern Gleichungen das zweyte Glied weggeſchafft werden könne. Mit dem Falle, den man den casus irreducibilis nennt, gab er ſich viele Mühe, ohne damit zu Stande zu kommen. Dies thut er beſonders in dem Buche, welches er betitelt hat, de Aliza regula, ein Ausdruck, den er nicht erklärt. Er giebt in dieſem Buche (C. 31) eine Regel für den Fall $x^3 = bx + c$, die ſich darauf gründet, daß die Gleichung $x^3 = (m^3 + n^3)x + 2mn(m+n)$ die Wurzel $x = m + n$ hat. Er erkannte, daß eine Gleichung mehrere Wurzeln zuläßt, und zeigte an Beyſpielen, daß eine cubiſche drey Wurzeln haben kann. Doch rechnete er zwey gleiche und gleichnamige Wurzeln nur für eine einzige. Z. B. In der Gleichung, $x^3 - 12x = 16$, findet er nur zwey Wurzeln, $+4$ und -2, da ſie doch zwey gleiche negative Wurzeln hat. Dennoch hatte er eingeſehen, daß in einer cubiſchen Gleichung der Coefficient des zweyten Gliedes der Unterſchied der wahren und erdichteten Wurzeln iſt; daß alſo, wenn dieſes Glied fehlt, die Summe jener oder dieſer ſo groß iſt als die entgegengeſetzte Wurzel. Er bemerkte, daß in einer cubiſchen Gleichung, deren Glieder alle auf eine Seite gebracht worden, die Anzahl der poſitiven Wurzeln der Anzahl der Abwechſelungen unter den Vorzeichen gleich iſt, wofern nur alle drey Wurzeln möglich ſind; auch daß die unmöglichen Wurzeln immer ſich gedoppelt finden. Er wandte die Algebra zur Auflöſung geometriſcher Aufgaben an. Auch gebrauchte er ſchon manchmahl Buchſtaben, um Größen auf eine allgemeine Art zu bezeichnen und zu behandeln.

Die Aufgabe, drey Zahlen zu finden, die in geometriſcher ſtetigen Proportion ſind, deren Summe eine gegebene Zahl (als 60) iſt, und von welchen die erſte und

zweyte mit einander multiplicirt ein gegebenes Product (als 6) machen, war die Veranlassung zur Erfindung eines Verfahrens, biquadratische Gleichungen aufzulösen. Die Aufgabe führt, bey den vorher genannten Zahlen, auf die Gleichung $x^4 + 6x^2 + 36 = 60x$. Cardan ermunterte den Ludovico Ferrari aus Bologna, einen jungen Mann von mathematischen Talenten, die Auflösung zu suchen. Dieser fand auch dazu ein Verfahren, welches darin bestand, daß auf beiden Seiten der auf eine gewisse Art geordneten Gleichung solche Größen hinzu gethan werden, daß die Quadratwurzel aus beiden Theilen sich ausziehen läßt (s. Gleichung IV. 14.). Cardan theilt diese Auflösung in seiner Ars magna mit. Hernach hat sie auch Bombelli in seiner italienisch geschriebenen Algebra, Bologna 1579. angeführt, daher einige, als Wallis und Euler, dieselbe dem Bombelli zueignen. Die Methode, welche Bombelli zur Ausziehung der Cubikwurzel aus einer zweytheiligen Größe, $a + \sqrt{b}$, angiebt ist unbrauchbar, wenigstens so, wie Hutton sie vorträgt, aber zur Ausziehung der Cubikwurzel aus dem Binomium $a + \sqrt{-b}$ giebt er ein Verfahren an, welches in denen Fällen brauchbar ist, da die Wurzel dieselbe Form, $x + \sqrt{y}$ mit rationalen Werthen für x und y hat. Nämlich, wenn diese Wurzel cubirt wird, so ist der mögliche Theil $= a$, der unmögliche $= \sqrt{-b}$ woraus sich die Gleichungen für x und y ergeben. Bombelli hätte ein ähnliches Verfahren auch für die Ausziehung der Cubikwurzel aus $a + \sqrt{b}$ anwenden können. Jenes führte ihn auf die Bemerkung, daß die beiden Theile der Cardanischen Formel, wenn sie gleich einzeln keine wahren Größen sind, doch in der Summe eine wahre Größe geben können. Er machte auch die wichtige Bemerkung, daß mittelst der cubischen Gleichung, $x^3 = bx + c$, ein Winkel in drey gleiche Theile getheilt werden kann. Eine merkwürdige Stelle, die Algebra des Diophantus betreffend, ist in des Bombelli Algebra befindlich. Er erzählt, daß in der Vaticanischen Bibliothek ein griechisches Werk über die Algebra vorhanden sey, welches er mit einem römischen

u übersetzen unternommen habe; sie hätten
vorhandenen Büchern schon fünf übersetzt.
inzu, sie hätten gefunden, daß in diesem
he Schriftsteller oft angeführt würden, wor-
, daß die Indier die Algebra vor den Ara-
haben müßten. In dem Diophantus, wie
ben, findet sich keine Citation eines Indischen
ers. Das Manuscript, welches Bombelli ge-
, muß interpolirt gewesen seyn.

eutschland war, nach Huttons Urtheil, in der
te des 16. Jahrhunderts die Algebra schon wei-
ückt, als selbst in Italien, nur freylich die über
en Gleichungen hier gemachten Entdeckungen
nen. Sie näherte sich schon mehr der neuern
Die älteste algebraische Schrift in Deutschland,
; **Christoph Rudolphs** (aus Jauer) die im
:4 gedruckt ist. Weil sie sich selten gemacht
orgte **Mich. Stifel** aus Eßlingen eine neue
welcher er viele Zusätze beyfügte. Der Titel ist:
Christoph Rudolphs mit schönen Exempeln der
h Michael Stifel gebessert und sehr gemehrt,
1 Bl. in 4. (Kästners Gesch. der Mathematik
Von diesem Buche ist auch eine Ausgabe zu Am-
)15; 827 S. in 8. in deutscher Sprache heraus-

Stifel hat auch ein eigenes Werk über Arith-
) Algebra geliefert: Arithmetica integra, Norib.
2 Bl. in 4. (Kästner a. a. O). In diesem
die Arithmetik nach ihrem damahligen Zustande
vorgetragen. Es sind darin außer der praktischen
enthalten: Untersuchungen über die arithme-
ihen, die Polygonalzahlen, die geometrischen
Bemerkungen über die Verbindung derselben mit
metischen, die erste Idee von Logarithmen, die
n der Potenzen einer zweytheiligen Zahl bis
ten, die Rechnung mit Irrationalgrößen, und
tten Buche die Algebra mit der Überschrift: de
)licis et de regula eorum, id est, de perfecta
ndi. Hutton rühmt dieses Werk sehr. Stife

bekennt in der Vorrede zu Rudolphs Coß, daß er diese wunderbarliche und ganz philosophische Kunst des Rechnens aus Rudolphs Buche erlernt habe. Rudolph hatte keine Beweise seiner Regeln gegeben; diese fügte Stifel bey, oder machte sie vielmehr durch Erläuterungen begreiflich. Rudolph gebrauchte zur Bezeichnung der Potenzen eigene Charaktere, die aus den Anfangsbuchstaben der Wörter für dieselben mit Nebenzügen gebildet waren (s. Potenz). Die Quadratwurzel bezeichnete er auf die jetzt übliche Art durch Vorsetzung des Zeichens $\sqrt{}$, die Cubik- und Biquadratwurzel durch eigene Zeichen. Dafür setzt Stifel hinter das Zeichen $\sqrt{}$ den Charakter der Potenz, deren Grad oder Exponent mit dem Grade der Wurzel derselben ist, und nach diesem Charakter die Zahl, woraus die Wurzel irgend eines Grades gezogen werden soll. Rudolph und Stifel führten die Zeichen + und — für die Addition und Subtraction ein, deren man sich in Italien erst lange nachher bedient hat. Die Gleichheit zweyer Größen ward von ihnen noch wörtlich angegeben; ausser daß Stifel manchmahl das Facit oder den Werth einer Größe durch einen Punct als Zeichen der Gleichheit angiebt, z. B. 1 A. 20 — 5 x. das ist A = 20 — 5 x, wo nur x statt seiner Radikalgröße gesetzt ist. Für die quadratischen Gleichungen der höhern Ordnungen geben sie eine allgemeine Regel. Die von Rudolph gegebene Regel zur Ausziehung der Wurzel aus einem Binomium von der Form $a + \sqrt{b}$ ist genau dieselbe mit der von Newton in der Arithmetica universali pag. 49 edit Graves. vorgetragenen. Doch hat schon Lucas de Burgo sie aufgestellt. Zur Ausziehung der Cubikwurzel aus einem solchen Binomium giebt Stifel in der Ausgabe von Rudolphs Coß. (S. 815) eine gute Regel, die einige, vielleicht auch viele Versuche erfordert, in manchen Fällen aber sehr leicht ausgeführt werden kann. Albert Girard hat sie in der nachher anzuführenden Schrift auch vorgetragen. Tartalea hat ein anderes Verfahren angewiesen (s. Wurzel aus einem Binomium). Stifel führt noch an, wie man durch ein ähnliches Verfahren auch Wurzeln von höhern Graden

ausziehen könne. Wenn mehr als eine unbekannte Größe in einer Frage vorkamen, ſetzten Cardan und Rudolph für die zweyte das Zeichen 1 q. Dafür nimmt Stifel das Zeichen 1 A, um, wenn drey oder mehr unbekannte Größen geſucht werden, für dieſe die Zeichen 1 B, 1 C, u. m. zu gebrauchen. Die Reduction der Gleichungen durch Verſetzung der Glieder und andere Veränderungen, um ihnen die zur Auflöſung ſchickliche Form zu geben, lehrte Stifel kürzer und allgemeiner als ſeine Vorgänger. Stifel bezeichnete den Grad einer Potenz durch die Anzahl der darin enthaltenen gleichen Factoren, nannte ſie **Exponens**, und betrachtete die Exponenten der Quotienten von Eins durch eine Potenz dividirt als negativ, wie in folgender Reihe von Potenzen und Exponenten

... $\frac{1}{8}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{2}$, 1, 2, 4, 8 ...,
..— 3, — 2, — 1, 0, 1, 2, 3 ....

Er zeigt, daß ſich die negativen Exponenten bey der Multiplication und Diviſion der Potenzen eben ſo verhalten wie die poſitiven. Von ſeinen Lehrſätzen über die Verbindung zweyer ſolchen Reihen ſ. Logarithmen.

Ein guter deutſcher Schriftſteller über die Algebra um die Mitte des ſechzehnten Jahrhunderts iſt **Johann Scheybl** oder Scheubelius, des Euclids und Arithmetik Ordinarius auf der Univerſität Tübingen. Von ihm iſt Algebrae compendioſa facilisque deſcriptio, qua deprompuntur magna Arithmetices miracula. Authore Joh. Scheubelio, Mathem. Prof in Acad. Tubingenſi. Pariſiis, 1552, vielleicht ein Nachdruck einer frühern in Deutſchland gedruckten Ausgabe. Hutton ſagt, daß der Vortrag in dieſem Buche ſehr deutlich und nett ſey, ſo daß es durch den Inhalt, wie auch durch die äuſſere Geſtalt, da es ſehr ſchön gedruckt iſt, einem neuern Werke ähnlich ſehe. Seine Rechnungsweiſe und ſeine Bezeichnung iſt die, wie bey Rudolph und Stifel. Die Gleichungen, welche er auflöſet, ſind nur vom erſten und zweyten Grade mit Einſchluß der höhern von der Form der quadratiſchen. Negative Wurzeln kennt er noch nicht. Mit der Wurzel-

rechnung beſchäftigt ſich der Verfaſſer auch. Sie geht bey Binomien von zwey irrationalen Theilen, oder einem rationalen und einem irrationalen, nur auf die Quadratwurzel. Der Verfaſſer hat eine deutſche Überſetzung der erſten drey arithmetiſchen Bücher des Euklides herausgegeben, im J. 1558.

In England gab **Robert Recorde** 1552 eine Arithmetik, und als den zweyten Theil 1557 eine Algebra heraus, letztere unter dem Titel: The Whetſtone of Witte, which is the ſeconde parte of Arithmetike: containing the extraction of Rootes: The Coſſike Praktiſe with the Rule of Equation: and the Woorkes of Surde Numbers. Das Buch iſt in Geſtalt eines Geſprächs zwiſchen einem Lehrmeiſter und ſeinem Schüler abgefaßt. Die deutſchen Algebraiſten ſind dabey viel benutzt. Die Zeichen für die Potenzen hat er von dieſen genommen. Der Verf. ahmt bey der Ausziehung einer Wurzel aus zuſammengeſetzten algebraiſchen Größen (wie $25x^6 + 80x^5 - 26x^4 - 144x^3 + 81x^2$, nach unſerer Bezeichnung der Potenzen), das Verfahren bey der Ausziehung aus Zahlgrößen nach. Die Quadratwurzel aus jenem Ausdruck iſt $5x^3 + 8x^2 - 9x$. Das Zeichen der Gleichheit, =, hat Recorde eingeführt, wie er es ſelbſt bemerkt, mit dem Beyfügen, daß keine zwey Dinge gleicher ſeyn könnten, als ein paar parallele gleich große gerade Linien.

In Frankreich kamen 1558 zu Paris heraus: *Jacobi Peletarii* Cenomani de occulta parte numerorum, quam Algebram vocant, libri duo. In den Bezeichnungen der Potenzen kommt er mit den deutſchen Algebraiſten zum Theil überein; aber die Zeichen + und − hat er nicht von ihnen angenommen, ſondern gebraucht ſtatt deren die Anfangsbuchſtaben p und m. Den Gebrauch der Exponenten lehrt er wie Stiefel und Scheybl. Er bemerkte, daß die rationalen Wurzeln einer Gleichung, ſie mögen ganze oder gebrochene Zahlen ſeyn, unter den Factoren des gegebenen Gliedes anzutreffen ſind. Er zeigte, wie man eine trinomiſche irrationale Größe durch die Multiplication in eine rationale verwandeln könne, ſo daß man dadurch

nem Bruche mit einem ſolchen triomiſchen Nenner ei
n rationalen geben kann. (Wenn das Trinomium iſt
$+\sqrt{b}+\sqrt{c}$, ſo entſteht daraus durch die Multiplica-
tion mit $a+\sqrt{b}-\sqrt{c}$ und mit $a^2+b-c-2a\sqrt{b}$,
as Product $(a^2+b-c-c)^2-4a^2b^2$). In Ru-
ſchē Coß oder Algebra iſt ein ähnliches Verfahren für
Formeln. Peletarius fand, daß Tafeln der Quadrat-
nd Cubikzahlen mittelſt der Differenzreihen durch die
leße Addition verfertigt werden können. Er entdeckte
erſchiedene merkwürdige Eigenſchaften dieſer Zahlen, na-
entlich dieſe, daß die Summe der Cubikzahlen 1^3+2^3
$+3^3+4^3+5^3\ldots+n^3=(1+2+3+4$
$+5\ldots+n)^2=\frac{1}{4}n^2(n+1)^2$. Von der Auf-
ſung cubiſcher Gleichungen war ihm noch nichts bekannt.

Simon Stevin, ein niederländiſcher Mathematiker
us Brügge, gab 1585 eine Arithmetik, und bald darauf
ine Algebra heraus. In dieſer braucht er eine neue
Bezeichnung der Potenzen, die aber keinen Beyfall erhal-
en hat. Er bezeichnet ſie durch einen Kreis, in welchem
der Exponent der Potenz eingeſchloſſen iſt. Auch deutete
er die Wurzeln aus Potenzen durch einen Bruch innerhalb
des Kreiſes an. Wichtiger iſt, daß er die zuſammenge-
ſetzten Benennungen der Potenzen, Quadrato-Quadrat,
Quadrato-Cubus, Cubo-Cubus, u. dgl. verließ, und ſie
durch ihre Exponenten benannte, welches er auch auf ge-
brochene und negative Exponenten ausdehnte. Auch den
Begriff der Coefficienten erweiterte er auf gebrochene und
rationale Zahlen. Er gab eine allgemeine Methode an,
die Wurzeln jeder Gleichung durch Näherung zu finden,
aber noch auf eine mühſame Art, indem er die Ziffern nach
der Reihe durch Probiren fand.

Franciſcus Vieta (François Viete, geb. 1540 zu
Fontenai in Poitou, geſt. 1603), einer der vorzüglichſten
Mathematiker ſeines Zeitalters, führte die allgemeine Rech-
nungsart in der Algebra ein. Denn wenn gleich Cardan
hat auch zuweilen allgemeiner Zeichen für die ſämmtlichen
mit einander verbundenen Größen bedient hat, oder die
Form der Gleichungen auf ſolche Art darſtellte, ſo iſt doch

Vieta derjenige, der die algebraiſchen Rechnungen durchgehends auf eine allgemeine Art machen lehrte. Er bezeichnete die bekannten Größen durch die Conſonanten, die unbekannten durch die Vocalen aus dem großen lateiniſchen Alphabet, wofür man hernach bequemer die erſten und letzten Buchſtaben des kleinen Alphabets genommen hat. Von ihm rühren verſchiedene jetzt übliche Kunſtwörter her, als Coefficient, affirmativ und negativ (ſtatt additiv und ſubtractiv), poteſtas pura und affecta, woraus man jetzt aequatio p. et a. gemacht hat. Er nahm mit den Gleichungen faſt alle erſinnliche Verwandlungen vor, wodurch er denſelben eine zur Auflöſung bequeme Geſtalt gab. Inzwiſchen hat Cardan dieſe auch ſchon größtentheils gefunden, nur nicht in der Allgemeinheit wie Vieta. Cardan fiel nicht darauf, die Wurzeln einer Gleichung in einem gegebenen Verhältniſſe zu verändern, welches Vieta gewieſen hat. Die Gleichungen vom dritten Grade löſet er mittelſt einer angenommenen Hülfsgleichung auf, als die Gleichung $x^3 + 3bx = 2c$ durch die Gleichung $y^2 + xy = b$ (ſ. Gleichung V. 5). Wegen des Falles, da eine cubiſche Gleichung mehr als eine Wurzel hat, verweiſet er in der Schrift über die Gleichungen auf die Analytik der Winkeltheilungen, die er aber nur gelegentlich in einer an den Adriamus Romanus gerichteten Schrift, und in einer kleinen Sammlung mathematiſcher Sätze vorträgt. In jener giebt er einer cubiſchen Gleichung mit drey Würfeln nur zwey poſitive durch die Dreytheilung eines Winkels. Die Gleichungen vom vierten Grade löſet er nach Ferrari's Methode auf. Von den Gleichungen bis zum fünften Grade giebt er die Zuſammenſetzung der Coefficienten durch die Wurzeln an, aber nur für den Fall, da alle Wurzeln poſitiv ſind. Er ſagt nicht, wie er dieſes gefunden habe. Die merkwürdigen Sätze ſtehen am Ende der Schrift de emendatione aequationum. Dieſe iſt nebſt der de recognitione aequationum erſt nach des Verfaſſers Tode, zu Paris 1615 von Anderſon, einem Schüler und Freunde des Vieta, herausgegeben, daher man ſie vielleicht für unvollſtändig halten möchte. Doch ſagt Vieta ausdrücklich, daß er mit

dieſen ſchönen und fein erdachten Sätzen, (elegans et perpulchrae ſpeculationis Sylloge) den ſchon weitläufigen Tractat endlich beſchließen wolle. Die beiden Schriften ſcheinen zum Druck ganz ausgearbeitet geweſen zu ſeyn. Wahrſcheinlich hat Vieta den Beweis ſeinen Leſern aufzuſuchen überlaſſen. Denn er ſagt von dieſen Sätzen: Quae jam ſequitur collectio, ſua analytico examini ſubjicienda libere relinquit theoremata; pertinet autem ad aequalitates de multiplicibus radicibus mire explicabiles. Die Entſtehungen der Gleichungen aus der Multiplication einfacher Factoren, wie $x - a$, hat Vieta vielleicht nicht gekannt. Man kommt aber auf jene Sätze auch, wenn man die Summen der Combinationen von jeder Art als gegeben annimmt, und daraus die combinirten Größen ſucht (ſ. Gleichung, VI. 1.). Vieta hat viele Aufgaben, die ihm mancherley Formen von Gleichungen an die Hand geben, ſo daß daraus die Beſchaffenheit der Wurzeln und ihrer Relation gegen die Coefficienten erkannt wird. In dem 15ten Capitel u. ff. des Buchs de recognitione aequationum kommen Lehrſätze über die Zuſammenſetzung der Coefficienten gewiſſer Gleichungen mit drey Gliedern vor. Demnach hat er wahrſcheinlich aus der Summe der Unionen, Binionen, Ternionen, u. ſ. die Größen (oder Elemente) dieſer Verbindungen zu ſuchen unternommen. Die Berechnung der Wurzel einer Gleichung mit numeriſchen Coefficienten lehrt er in einer beſondern Schrift, de numerosa potestatum affectarum resolutione, auf eine ähnliche Art wie in den Anfangsgründen der Arithmetik die Ausziehung der Quadrat- und Cubikwurzel vorgetragen wird. Doch iſt das Verfahren beſchwerlich. Seine Vorſchriften nehmen fünf Folioſeiten ein. Sie können aber ſehr kurz gefaßt werden. Die Mehrheit der Wurzeln macht beſondere Schwierigkeit. Es iſt auffallend, daß Vieta die negativen Wurzeln einer Gleichung gar nicht mit in Betrachtung zieht, da doch ſchon Cardanus es gethan hatte. Gua und Montucla, die ihren Landsmann über alle Algebraiſten der ältern Zeiten ſetzen, ſind hier verlegen. Doch hat Vieta die negativen Wurzeln nicht gänzlich verkannt

haben. In der Schrift de recogn. aequ. Cap. 19. 20 et 21. verbindet er Gleichungen, in welchen die unbekannten Größen entgegengesetzt sind, als $x^2 + ax = b$, und $y^2 - ay = b$. Nun sagt er von diesen Gleichungen (C. 19, prop. 1), daß $x - y$ oder $y - x = a$, und $xy = b$ ist. In dem Beyspiele prop. 4, setzt er die Gleichungen $x^4 + 5x^3 = 216$, und $x^4 - 5x^3 = 216$, und giebt die Wurzel der erstern an $= 3$, die Wurzel der andern $= 6$. Vieta hat also in einigen Fällen die negativen Wurzeln als positive Wurzeln einer andern entgegengesetzten Gleichung betrachtet, wie es geschehen muß, wenn man das Entgegengesetzte vermeiden will. Er verfuhr wie die alten Mathematiker, welche alle Fälle eines Satzes, die sie durch das Entgegengesetzte unterschieden, besonders betrachteten. Vermuthlich hat er gewußt, daß Cardan negative Wurzeln zur Auflösung gewisser Gleichungen gebrauchte; weil ihm aber dieses keine deutliche Darstellung gewähren mochte, so vermied er das Negative ganz, und nahm nur in den Gleichungen, die er contradicentes und inversas nannte, die negativen Wurzeln als Wurzeln der einen dieser Gleichungen auf. Freylich ist hier noch eine große Lücke in Vieta's Theorie. Den oben angeführten Satz von der Zusammensetzung der Coefficienten aus den Combinationen der Wurzeln hätte er auf die Fälle erweitern sollen, worin eine oder mehrere der combinirten Größen negativ sind, und hätte die daraus entstehenden Formen der Gleichungen entwickeln müssen. Bey den Gleichungen für die Winkeltheilungen setzte er auch die negativen Wurzeln bey Seite. Er begieng hiedurch selbst einen Fehler gegen die Allgemeinheit der Auflösung, da er einem andern Mathematiker einen solchen Fehler vorwarf. Dieser (er hieß Adrianus Romanus) hatte den Mathematikern eine Gleichung vom 45sten Grade aufgegeben, deren Auflösung die Theilung eines gegebenen Winkels in 45 gleiche Theile erfordert. Vieta fand sie zu des Adrianus Erstaunen, und zeigte diesem, daß nicht bloß eine Wurzel der Gleichung eine Genüge thue, sondern daß 23 Antworten gleich möglich sind. Er hätte noch hinzufü-

gen müſſen, daß mit der gegebenen Gleichung noch eine andere verbunden ſey, deren poſitive Wurzeln mit in die Reihe der poſitiven Wurzeln der aufgegebenen Gleichung gehören, ſo daß erſt beide Reihen zuſammen genommen eine vollſtändige Auflöſung geben. So viel Scharfſinn und Erfindungskraft auch Vieta in ſeinen Schriften zeigt, ſo konnte er ſich doch noch nicht zu den allgemeinern Lehrſätzen erheben, ſondern blieb bey der Betrachtung beſonderer Fälle ſtehen, welches ſeinen Vortrag weitſchweifig macht. Seine Bezeichnungsart iſt auch unvollkommen. Er druckt in den Lehrſätzen und allgemeinen Rechnungen die Potenzen durch Worte aus, und hat keine Zeichen für Multiplication und Gleichheit, welches er ebenfalls mit Worten anzeigt. Den numeriſchen Coefficienten druckt er auch mit Worten hinter der Potenz aus, wofür in der Sammlung ſeiner Werke eine Zahl hinter der Potenz ſteht. In den Beyſpielen iſt der Coefficient vor das Zeichen der Potenz geſetzt. Dazu kommt eine große Menge Kunſtwörter, die er für die einzelnen Fälle der Gleichungen und die Operationen der Rechnung bildet. Dieſes macht ſeine Werke beſchwerlich zu leſen, und giebt ihnen das Anſehen, als wenn ſie in viel frühere Zeiten gehörten. — Die Werke des Vieta hat Schooten in einem Folianten herausgegeben, ſoviel er deren hat erhalten können, zu Leyden 1656. Die bey ſeinem Leben gedruckten Schriften waren ſchon damahls ſehr ſelten, weil ihr Verfaſſer ſie nur zum Geſchenk ausgab. Eine zur Trigonometerie und Kreismeſſung gehörige, ſehr ſeltene Sammlung iſt zu Paris 1579 in Fol. gedruckt. Aus dieſer iſt nichts in die von Schooten beſorgte aufgenommen, ſ. Cyklotechnie.

Um dieſelbe Zeit mit Vieta bearbeitete gleichfalls mit glücklichem Erfolge in England Thomas Harriot die Algebra. Das Werk, welches er darüber verfaßt hat, iſt erſt 10 Jahre nach ſeinem Tode herausgekommen. Es hat den Titel: Artis analyticae Praxis, ad aequationes algebraicas nova, expedita et generali methodo reſolvendas. Londini 1631; 180 pag. in Fol. Der Herausgeber hat ſich nicht genannt. Es war ein Freund des Ver-

faſſers, Namens Walter Warner. Das Werk hat zwey Haupttheile. Der erſte enthält eine Theorie der Gleichungen, und ſoll nur als Grundlage zu dem zweyten und wichtigern, der die Auflöſung numeriſcher Gleichungen, den Hauptgegenſtand der Harriotiſchen Algebra, vorträgt, angeſehen werden. Inzwiſchen iſt das, was Harriot in dem erſten Theile über die Entſtehung der Gleichungen aus der Multiplication binomiſcher Factoren lehrt, ſein wichtigſtes Verdienſt um die Algebra. Er entwickelt die Producte aus zwey, drey und vier Factoren $a \pm b$; $a \pm c$; $a \pm d$; $a \pm t$ nach den verſchiedenen Abwechslungen der Vorzeichen des zweyten Theils, da der erſte ihm zur Bezeichnung der Wurzel einer Gleichung dient. Die Gleichungen zwiſchen dem Product der Factoren, und dem Aggregat der Theile, welche die Entwickelung giebt, nennt er aequatio originalis. Nun ſetzt er einen der Factoren $= o$, und bringt alsdann das Glied, welches keinen Factor a enthielt, auf die andere Seite ganz allein. Dieſe Gleichung nennt er eine aequationem canonicam. Z. B. Aus der Multiplication der Factoren $a - b$, $a + c$, $a + d$, wenn einer derſelben Null genommen wird, entſteht die canoniſche Gleichung der cubiſchen Ordnung,

$$aaa - baa - bca + caa - bda + daa + cda = bcd.$$

Werden die Größen b, c, d, etc. ſo beſtimmt, daß ein Coefficient dadurch Null wird, ſo heißt die Gleichung eine aequatio canonica ſecundaria, da die primaria eine vollſtändige Gleichung iſt. Von beiden Gattungen der Gleichungen werden alle Fälle durchgegangen, und diejenigen, die nur durch Veränderung der Vorzeichen verſchieden ſind, beſonders aufgeführt. Denn Harriot iſt noch mit dem Gebrauch der negativen Wurzeln ganz unbekannt. Der Gleichung $aa - (b - c)\,a = bc$ giebt er nur eine Wurzel b, und überhaupt giebt er jeder Gleichung nur ſo viele Wurzeln als poſitive darin vorhanden ſind. Wenn eine Gleichung keine poſitive Wurzel hat, ſo erklärt er ſie für

unmöglich, wie die Gleichung $e^5 - 3b^2e = -c^5 - 2b^5$ in Sect VI. probl. 1. Mit den canoniſchen Gleichungen, deren poſitive Wurzeln aus ihrer Formation bekannt ſind, vergleicht Harriot andere, worin die Coefficienten eine andere Form haben, als in jenen. Er nennt dieſe aequationes communes. Wenn eine ſolche mit einer der canoniſchen in Abſicht auf die Vorzeichen übereinkommt, und ihre Coefficienten unter einander auf ähnliche Art gröſſer oder kleiner ſind, als in dieſer, ſo eignet er derſelben eben ſo viele Wurzeln zu, als für die canoniſche gefunden ſind. Z. B. Die Gleichung $a^5 - 3b^2a = 2c^5$, in welcher $c > b$ iſt, vergleicht Harriot mit der canoniſchen, $a^5 - 3rqa = r^5 + q^5$. Da die Vorzeichen in beiden gleichnamig ſind, und in der canoniſchen $(r\ldots)^5 < \frac{1}{4}(r^5 + q^5)^2$, in jener auch $b^6 < \frac{1}{4}(2c^5)^2$ iſt, ſo hat jene nur eine Wurzel, wie die canoniſche, deren Wurzel $q + r$ iſt. Die Cardaniſche Formel findet er auf eine ähnliche Art wie Vieta. Er reducirt nämlich die Gleichung $a^5 + 3b^2a = 2c^5$, durch die Subſtitution, $a = \frac{e^2 - b^2}{e}$, auf die einfache, $e^5 = c^5 + \sqrt{(c^6 + b^6)}$. Die Gleichung $a^5 - 3b^2a = 2c^5$, wenn c kleiner iſt als b, giebt ihm eine unmögliche reducirte, $e^5 = c^6 + \sqrt{-d^6}$, mit welcher er ſich nicht weiter beſchäftigt.

Die numeriſche Auflöſung der Gleichungen, worin Harriot nach dem Urtheil des Herausgebers den Vieta weit übertroffen hat, die auch de Gua a. a. O. für beſſer erklärt, als die von Vieta angewandte, beruht darauf, daß er die Wurzel a in zwey Theile $b + c$ zerlegt, und in der verwandelten Gleichung zuerſt b beſtimmt, darauf einen Theil von c findet, dieſen zu dem Werthe von b ſetzt, und das Aggregat als den erſten Theil b betrachtet, und ſo fortfährt, bis die Wurzel vollkommen gefunden, oder die Annäherung hinlänglich iſt. Inzwiſchen iſt das Verfahren mit Schwierigkeiten unterworfen, beſonders wegen der mittlern Wurzeln zwiſchen der gröſten und kleinſten; überhaupt noch weitläufig und verworren.

In der Bezeichnung der Größen ist Harriot geschickter als Vieta. Erstlich gebraucht er kleine Buchstaben anstatt der großen von Vieta gewählten; er setzt diese bey der Multiplication der Größen unmittelbar zusammen, wie die Buchstaben eines Wortes, bezeichnet auch die Potenzen durch die Wiederholung des Buchstabens, der die Wurzel bedeutet (welches auch schon Rudolph in seiner Coß als dienlich angiebt), statt daß Vieta sie, wie andere Operationen der Rechnung, durch Worte anzeigt; er setzt den Zahlcoefficienten vor das Zeichen der Größe, durch einen Punct abgesondert; er gebraucht nicht nur das von Recorde schon angenommene Symbol der Gleichheit, sondern setzt auch für die Ungleichheit die jetzt üblichen. Daß Harriot den Vieta benutzt habe, erhellet aus seinen Anführungen dieses Analysten, auch aus der übereinstimmenden Bezeichnung der Größen. Harriot gebraucht häufig ein Kunstwort, welches dem Vieta eigen ist, gradus parodicus, wodurch eine niedrigere Potenz in Vergleichung mit einer höhern angezeigt wird. Doch mag Harriot die beiden wichtigsten Schriften von Vieta, die erst 1615 herausgekommen, nicht gesehen oder gebraucht haben.

Gewöhnlich wird dem Harriot auch die Erfindung eines Lehrsatzes zugeschrieben, die Anzahl der positiven und der negativen Wurzeln einer Gleichung zu erkennen, jene aus der Anzahl der Abwechselungen der Vorzeichen + — oder — +, diese aus der Anzahl der Folgen + + oder — —, (s. Gleichung VI. 3.). Wolf thut dieses in den Elem. Anal. Finit. §. 330, mit der Bemerkung, daß Harriot die Regel durch Induction gefunden habe. Saunderson sagt in seiner Algebra §. 434, daß man die Regel dem Harriot zuschreibe, und daß man noch keinen allgemeinen Beweis derselben gefunden habe. Die Regel findet sich aber gar nicht in Harriots Werke. Erstlich weiß H. nichts von negativen Wurzeln, oder setzt sie ganz bey Seite. Aber auch der Satz, daß eine Gleichung so viele (positive) Wurzeln habe, als Abwechselungen der Vorzeichen vorhanden sind, ist nicht bey Harriot anzutreffen. Diesen Satz auch nur für die niedrigern Gleichungen aus der Vergleichung der Com-

binationen der Wurzeln herzuleiten, muß gezeigt werden, in welchen Fällen das Aggregat ähnlicher Combinationen das eine oder das andere Vorzeichen bekommt, wie es in dem Artikel, Gleichung, bey den cubiſchen und biquadratiſchen geſchieht. Auch hat Harriot das abſolute Glied der Gleichung immer auf eine Seite des Gleichheitszeichens allein geſtellt. Wallis hat in ſeiner hiſtoriſchen Abhandlung der Algebra einen ausführlichen Auszug aus Harriots Werke eingerückt, mit übermäßigen Lobeserhebungen, um die franzöſiſchen Analyſten, als Vieta und beſonders Descartes, herabzuſetzen. Er glaubt, daß letzterer, der zuerſt jenen Lehrſatz vorgetragen hat, ihn aus der bloßen Anſicht der von Harriot aufgeſtellten Fälle gezogen haben möge, ohne die dabey nöthige Einſchränkung zu beachten. Das iſt in der That kein Lob für Harriot, wenn dieſer den Satz in ſeinem eigenen Werke aus der Acht gelaſſen hätte. Wallis würdigt den Lehrſatz ſelbſt herab, weil Descartes ihn vorgetragen hat. Er ſey trüglich, und Harriot habe zuverläſſigere Regeln gegeben, die Anzahl der poſitiven und negativen Wurzeln zu erfahren. Dieſes iſt eine ungegründete und partheyiſche Behauptung. Ein neuerer Engländer, Horsley, der Herausgeber von Newtons Werken, urtheilt hingegen ſehr ungünſtig von ſeinem Landsmanne. In der Anmerkung zu der Arithm. univ. p. 166 ſagt er: Harriotus de numero radicum nil plane ſani habet. Vir magnae quidem diligentiae, ſed mediocris ingenii, ea fere in Algebraicis intellexit, quae a Cardano et Vieta acceperat, et radices, ſicut illi fecerant, cuilibet aequationi totidem tribuit, quot illa poſitivas habeat, negativarum ne in ullo quidem caſu ratione habita, utpote quas ſemper inutiles judicavit, cum earum naturam minime perſpexiſſet — p. 180. Harriotus, qui arcte adeo ad lumen connivebat, ut quantitates — c, — d, aequationum, quae ex illis procreatae eſſent, radices eſſe conſtantiſſime negaret, qui fieri potuit, ut ille intelligeret coefficientium geneſin e radicum multiplicatione,

Die meiſten Verdienſte um die Algebra hat in dieſe ältern Zeiten ein wenig bekannter niederländiſcher Mathematiker, **Albert Girard**, der um das Jahr 1633 g ſtorben iſt. Von ihm iſt: **Invention nouvelle e l'Algebre, tant pour la ſolution des equations, qu pour recoignoiſtre le nombre des ſolutions qu'elle reçoivent, avec pluſieurs choſes qui ſont neceſſai res à la perfection de ceſte divine ſcience. A Am ſterdam MDCXXIX,** in kl. Qu. Bogen A bis H ohne Seiten-Anzeige.

Dieſe kleine, aber merkwürdige, ſeltene Schrift en hält drey Abhandlungen. Die erſte iſt eine kurze Einle tung in die Arithmetik; die zweyte liefert manches Neu über die Algebra; die dritte betrifft die von dem Verfaſſe entdeckte Meſſung des Flächen-Inhalts ſphäriſcher Drey ecke und Vielecke. Hutton giebt in ſeinem Wörterbuch eine umſtändliche Nachricht von dem Inhalte der beide erſten Abhandlungen; auch habe ich durch die Güte de Hrn. Prof. Pfleiderer einen von Hrn. Repetent Haube verfertigten ausführlichen Auszug des algebraiſchen Theil erhalten.

In der Bezeichnung der Potenzen und Wurzeln folg Girard meiſtens ſeinem Landsmanne Stevin; doch gebrauch er auch für die Wurzeln die Zeichen $\sqrt{}$ oder $\sqrt[2]{}$, $\sqrt[3]{}$, $\sqrt[4]{}$ u. ſ. w. Für die Gleichheit hat er kein Zeichen, ſonder ſetzt das Wort ſelbſt hin; das Zeichen = bedeutet bey ihr einen Unterſchied unbeſtimmt. Die mehrtheiligen Größe ſchließt er in Klammern ( ) ein, wenn ſie wie eine ein theilige behandelt werden ſollen. Die Ungleichheit b zeichnet er durch die Charaktere *ff* und ſ.

Die Ausziehung der Cubikwurzel aus einer binomiſche Größe von der Form $a + \sqrt{b}$ lehrt Girard an einem num riſchen Beyſpiele, wie er glaubt, auf eine von ihm zuerſt g fundene Art. Ich finde ſein Verfahren aber ſchon in Chr ſtoph Rudolphs Coß am Ende derſelben, (ſ. Cubikwurzel Zur Verwandlung der Gleichungen bedient Girard ſich in beſondere des von Vieta mit der Benennung Isomoeri

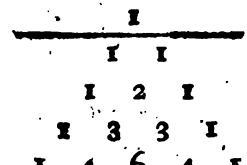
ndten Verfahrens. Es beſteht darin, daß die Ter-
ier Gleichung, auch die fehlenden als vorhanden be-
, in die Glieder einer geometriſchen Reihe multi-
erden, wodurch die Coefficienten verkleinert, und
rüchen und Irrationalität befreyt werden können.
urzeln der Gleichung werden dadurch in einem ge-
Verhältniſſe verändert. Bey den quadratiſchen
ngen bemerkt er, daß man die Wurzeln (ſolutions)
nicht bey Seite ſetzen dürfe. Er giebt auch die Form
öglichen Wurzeln ganz beſtimmt an. Man muß,
alle Wurzeln einer Gleichung ſuchen, weil man
zum beſſern Verſtändniß deſſen, was man ſucht,
, und erläutert dieſes durch das Beyſpiel der Glei-
$x^2 = 16x - 28$. Daraus könne man die Auf-
chen, zwey Zahlen zu finden, deren Summe 16,
en Product 28 iſt. Dieſe ſeyn 2 und 14, jede ein
den x, und mehrere Werthe gebe es nicht. Von
möglichen Wurzeln giebt er den Nutzen, den ſie
, richtig an. Die cubiſchen Gleichungen mit drey
hen Wurzeln löſet er durch Hülfe der Sinustafeln
Er wird der erſte ſeyn, der eine Regel für dieſes
ren gegeben hat, da Vieta nur die trigonometriſche
anführt, ohne daraus eine Regel für die Auflöſung
r Gleichungen zu ziehen. Girard aber hat noch
merkt, daß alle drey Wurzeln durch Dreytheilung
Winkels gefunden werden können. Denn nachdem er
urzel, die er die vornehmſte (principale) nennt,
n Sinus des dritten Theils eines Winkels gefunden
cht er die beiden andern durch Auflöſung einer
ſchen Gleichung, auf welche die cubiſche herunter
wird. Die Gleichung, die er zum Beyſpiele
iſt $x^3 = 13x + 12$. Die gefundene Wurzel
$+ 4$. Die Summe der beiden andern iſt nun
-4, ihr Product iſt $\frac{-12}{-4} = +3$. Daher iſt die
g für ſie $x^2 = -4x - 3$, deren Wurzeln ſind
-1. Vieta findet in der cubiſchen Gleichung
dem Sinus eines Winkels und dem des dreyfachen

zwey Werthe jenes, wenn der letztere gegeben ist, läßt aber den negativen unbeachtet. Girard richtet seine Regel auf eine Gleichung von der Form, wie $x^3 = 13x + 12$, ein, und gebraucht einen Winkel über 180 Gr., der in drey Theile getheilt wird. Jene Gleichung gehört eigentlich für die Relation zwischen dem Cosinus eines Winkels und dem des dreyfachen. Hingegen die Gleichung von der Form, wie $x^3 = 30x - 36$, die für die Sinus des einfachen und dreyfachen Winkels gehört, verwandelt er in eine von der Form wie die erstere, indem er die Vorzeichen von x ändert, von den Wurzeln aber das Entgegengesetzte nimmt, (s. Goniometrie, V.). Für die cubischen Gleichungen mit einer möglichen Wurzel giebt Girard eine sinnreiche Auflösung durch die Trigonometrie an. Sie beruht darauf, daß ein Winkel ω gefunden werde, von der Größe, daß $\sin 2\omega + 2m = 2 \operatorname{tang} \omega$ sey. Denn diese Gleichung führt auf diese: $\sin \omega^6 + m^2 \sin \omega^2 - m^2 = 0$, und, wenn $\sin \omega^2 = \frac{x}{r}$ genommen wird, auf diese: $x^3 + m^2 r^2 x - m^2 r^3 = 0$, mit welcher die gegebene Gleichung zu vergleichen ist. Girard zeigt seine Methode an einem Beyspiele, (nicht auf die hier gebrauchte allgemeine Art), und sucht durch wiederholte Verbesserungen, nach einer Art von positio falsi, den wahren Werth des Winkels. Er nimmt gutdünklich einen Winkel, den ich α nenne, und sucht aus der Gleichung $\sin 2\alpha + m = 2 \operatorname{tang} \beta$, den Werth von β, setzt diesen für den zuerstgenommenen α, und sucht nun einen andern verbesserten Werth für β, mit welchem er auf dieselbe Art und dann so weiter verfährt, bis daß die beiden Winkel α und β einander gleich werden. Die Differenzen-Rechnung zur schnellen Annäherung anzuwenden, konnte ihm noch nicht einfallen. Gleichungen mit rationalen Wurzeln löset er dadurch auf, daß er die Divisionen des gegebenen Gliedes versucht. Er nennt dieses Verfahren neu. Bey Gleichungen mit irrationalen Wurzeln gebraucht er eine Annäherungsmethode, die fast dieselbe mit der von Stevin gebrauchten ist. Die Glieder der Gleichung werden mi

den Gliedern der Progreſſion, 1, 100, 1000, u. ſ. multiplicirt, wodurch die Wurzeln in einem gegebenen Verhältniſſe vergrößert werden, ſo daß man aus den Wurzeln der verwandelten Gleichung die der urſprünglichen leicht herleiten kann.

Girard war der erſte, der die Zuſammenſetzung der Coefficienten in einer Gleichung aus den Combinationen der Wurzeln jeder Art zeigte, da Vieta ſie bloß für poſitive Wurzeln bemerkt hatte; und Harriot in der That zwar negative Wurzeln in die Combinationen aufnahm, aber ſie nicht als Wurzeln der Gleichung betrachtete. Der Satz lautet bey Girard folgendergeſtalt: Toutes les equations d' algebre reçoivent autant de ſolutions, que la denomination de la plus haute quantité le demonſtre; excepté les incompletes: et la premiere faction des ſolutions eſt eſgale au nombre du premier meſlé, la ſeconde faction des meſmes eſt eſgale au nombre du deuxieſme meſlé, la troiſieſme au troiſieſme, et tousjours ainſi, tellement que la derniere faction eſt eſgale à la fermature, et ce ſelon les ſignes qui ſe peuvent remarquer en ordre alternatif. Der Ausdruck faction bedeutet die Summe der Combinationen, und meſlé iſt ein Glied einer Gleichung, die aus verſchiedenen Potenzen der unbekannten Größe zuſammengeſetzt oder gemiſcht iſt, zwiſchen dem höchſten und niedrigſten Gliede; fermature iſt das letzte, oder das gegebene Glied der Gleichung. Der ordre alternatif bedeutet, daß die Potenzen mit ungeraden Exponenten auf der einen Seite des Gleichheitszeichens, die mit geraden auf der andern ſtehen. Daß Girard die unvollſtändigen Gleichungen ausnimmt, weiß ich nicht zu erklären, da er in den Beyſpielen auch unvollſtändige Gleichungen aufführt, und die fehlenden Glieder mit dem Coefficienten 0 einſchaltet. Dieſer gilt auch für eine faction. Die unmöglichen Wurzeln ſieht er auch als Auflöſungen an. Denn von der Gleichung $x^4 = 4x - 3$ giebt er vier factions an, 0, 0, 4, 3, und daher ihre vier ſolutions, 1; 1; $-1+\sqrt{-2}$; $-1-\sqrt{2}$; mit der

Bemerkung, daß das Product der beiden letzten 3 ist. Girard ist auf den angeführten wichtigen Satz vermuthlich durch die sehr gute Ansicht der Gleichungen gekommen, daß sie überhaupt die Aufgabe enthalten, aus den Factionen mehrerer Zahlen diese zu finden. Ein solches Beyspiel ist schon angeführt, und es kommen mehrere in seiner Schrift vor. Die Natur der Gleichungen, sagt er, bestehe darin, daß ihre Glieder aus Factions zusammengesetzt sind, und alle Aufgaben hätten kein anderes Band unter sich als dieses. Die ganze Lehre von den Gleichungen wird am vortheilhaftesten auf diese Vorstellung gegründet, wie es in dem Artikel, **Gleichung**, geschehen wird. Girard hat sich mit den Combinationen beschäftigt. Die Menge derselben von irgend einer Gattung bey einer gegebenen Anzahl von Dingen stellt er durch ein Zahlen-Dreyeck, wie es nachher Pascal gethan hat, dar, auf folgende Art,



und nennt es triangle d' extraction, z. B. wenn 4 Zahlen sind, so hat man die vierte Reihe zu nehmen, in welcher 1 den Coefficienten der höchsten Potenz in einer Gleichung vom vierten Grade bedeutet; 4 die erste Faction als Summe von vier Zahlen; 6 die Anzahl der Producte von je zweyen, u. s. f. Auf jenem Satze beruht auch das Verfahren Girards, wenn eine Wurzel gefunden ist, die Gleichung zu erniedrigen, weil dadurch die Combinationen der übrigen Wurzeln bekannt werden.

Aus demselben Satze muß Girard auch die merkwürdigen Formeln für die Summen der Potenzen der Wurzeln, ausgedruckt durch die Coefficienten in der Gleichung, das ist, durch die Combinationen der Wurzeln, hergeleitet haben. Er führt sie zum Beweise an, daß die Coefficienten in einer Gleichung nicht auf eine andere Art als durch die Combinationen der Wurzeln gebildet werden können. In seiner Sprache und mit seinen Bezeichnungen sind die Formeln folgendergestalt ausgedruckt. „Soit A premier

meſlé, B ſecond, C troiſieſme, D quatrieſme, etc. alors en toute ſorte d' equations

A	ſera la ſomme des	ſolutions
Aq — B2		quarez
Acub — AB3 + C3		cubes
Aqq — AqB4 + AC4 + Bq2 — D4		quare - quarez
etc.		etc.

Die numeriſchen Coefficienten ſtehen hinter den Literalgrößen.

Girard erklärt die Bedeutung der negativen Wurzeln in der Geometrie ſehr gut als ſolche, die Linien darſtellen, deren Richtung die entgegengeſetzte iſt von der Richtung derer, die die poſitiven Wurzeln angeben. — Von ihm rühren die Ausdrücke, größer als Nichts, kleiner als Nichts, her. Die unmöglichen Wurzeln nannte er involvirte, auch unmögliche. Er hat auch die Eintheilung der Zahlen in Millionen, Billionen, u. ſ. eingeführt.

Die Verbindung der Algebra mit der Geometrie der krummen Linien iſt dasjenige, wodurch Descartes ſeinen erfinderiſchen Scharfſinn vorzüglich gezeigt, und ſich einen unbeſtrittenen Ruhm erworben hat. Seine Geometrie, die zuerſt im J. 1637 franzöſiſch erſchien, iſt ein kleines, aber an neuen Behandlungsarten reiches Werk. Die erſte kurze Abtheilung enthält die geometriſche Auflöſung oder Conſtruction der Gleichungen vom zweyten Grade, wozu der Kreis mit der geraden Linie hinlänglich iſt. Die zweyte ſtellt die Natur aller krummen Linien durch eine Gleichung zwiſchen zwey veränderlichen Größen dar. Dieſe Darſtellung war ganz neu, und hat den Weg zu der Anwendung der Analyſis des Unendlichen auf die Geometrie gebahnt. In der dritten Abtheilung zeigt Descartes, wie die höhern Gleichungen durch geometriſche Zeichnung aufgelöſet werden. Zu dieſem Zwecke ſchickt er einen kurzen und netten Begriff der wichtigſten algebraiſchen Lehrſätze und Verfahrungsarten voran, wobey er aber nicht bemerkt, daß ſie erfunden habe, und was ihm eigen ſey. Die Be-

weiſe der mehreſten Sätze läßt er weg, weil ſie ihm ſo leicht ſchienen, daß er glaubt, der Leſer werde ſie ohne Mühe finden, und davon mehr Nutzen haben, als von der Erlernung des Vorgeſagten. Die gegebenen Größen bezeichnet Descartes durch die erſten Buchſtaben des Alphabets, die unbekannten durch die letzten, wie es gegenwärtig üblich iſt. Auch die unveränderlichen und die veränderlichen Größen in einer unbeſtimmten Gleichung für eine krumme Linie unterſcheidet er auf dieſe Art, eine Abweichung in einem gewiſſen Falle ausgenommen. Die Potenzen bezeichnet er durch die Wurzel mit dem Exponenten an der Spitze, welches Herigone in ſeinem mathematiſchen Curſus kurz vorher auch gethan hat. — Die Gleichheit zweyer Größen bezeichnet Descartes durch ein nicht mehr gebräuchliches Zeichen ∞. Die negativen Wurzeln einer Gleichung nennt er **falſche Wurzeln**, ein ſehr unbequemer, leicht mißzudeutender Ausdruck, der ſich, aber gar nicht durchgängig, ein Jahrhundert hindurch im Gebrauch erhalten hat. Descartes erklärt ihn aber völlig richtig, daß dadurch Linien angezeigt werden, die eine entgegengeſetzte Lage in Beziehung auf diejenigen haben, die als wahre Wurzeln betrachtet werden. Unter den algebraiſchen Sätzen, die Descartes vorträgt, ſind hier nur folgende zwey nöthig bemerkt zu werden. Erſtlich ſagt er, daß in jeder Gleichung ſo viele wahre Wurzeln ſeyn können, als Abwechſelungen der Vorzeichen da ſind, und ſo viele falſche, als Folgen gleicher Vorzeichen. Er führt dieſes als eine Folgerung aus dem Satze von der Entſtehung der Gleichungen durch die Multiplication aus einfachen zweytheiligen Factoren an. Ob er ſelbſt oder ein anderer dieſen Satz erfunden habe, und wie er zu beweiſen ſey, ſagt er nicht. Vermuthlich hat er ſelbſt ihn gefunden. Als nachher Roberval ihm durch ein Beyſpiel die Unrichtigkeit des Satzes zeigen wollte, antwortete er, daß er nicht geſagt hätte, es ſind ſo viele wahre und ſo viele falſche Wurzeln vorhanden, ſondern es können ſo viele da ſeyn, beruft ſich auch deswegen auf eine andere Stelle ſeiner Geometrie von den unmöglichen Wurzeln, die aber

von der Einſchränkung jenes Satzes auf lauter mögliche Wurzeln nichts enthält. Descartes ſcheint ihn zuerſt unbedingt angenommen zu haben, da die Einſchränkung, daß alle Wurzeln möglich ſeyn müſſen, leicht unbeachtet bleibt, wenn bey der Multiplication der binomiſchen Wurzelfactoren die Wurzeln jede durch ein Symbol bezeichnet werden. Denn einen Satz, der eine Einſchränkung nöthig hat, ohne dieſe aufſtellen, iſt eine große logiſche Unvorſichtigkeit, die ein guter Kopf nicht leicht begehen wird. Seine Worte laſſen ſich auch grammatiſch von der Unbedingtheit des Satzes auslegen. Sie ſind: On connoit auſſi de ceci, combien il peut y avoir de vrayes racines et combien de fauſſes en chaque équation. Es iſt hier nicht von möglichen und unmöglichen Wurzeln die Rede, ſondern von den entgegengeſetzten, wie viele von der einen und von der andern Gattung vorhanden ſeyn können.

Die zweyte wichtige Bemerkung von Descartes iſt, daß eine Gleichung vom vierten Grade unter einer gewiſſen Bedingung in zwey trinomiſche mögliche Factoren zerfällt werden, und mittelſt derſelben aufgelöſet werden kann. Dieſes iſt das erſte Beyſpiel von der Methode unbeſtimmter Größen, wenn man nicht das von Ferrari ſchon gebrauchte Verfahren bey der Auflöſung biquadratiſcher Gleichung als ein ſolches anſehen will. Descartes bemerkt, daß man die Methode auch bey höhern Gleichungen anwenden könne. Die Anwendung der Geometrie auf die Gleichungen vom dritten und vierten Grade beſteht darin, daß Descartes eine Parabel und einen Kreis zeichnet, deren gemeinſchaftliche Ordinaten die Wurze'n der gegebenen Gleichung ſind. Die Gleichungen vom fünften und ſechſten Grade löſet er auf ähnliche Art mittelſt einer paraboliſchen Concoide oder Muſchelline) und eines Kreiſes auf, (ſ. Anwendung der Geometrie auf die Algebra.)

Fermat, der ſich mehr mit den höhern Gegenſtänden der Analyſis beſchäftigte, als mit der Algebra, gab eine Methode an, die irrationalen Größen aus einer Gleichung wegzuſchaffen. Er legte den Analyſten ein ſchweres Ex-

empel, das fünf Quadrat-Wurzeln enthält, zur Reduction vor, wovon er selbst aber keine Auflösung gegeben hat. Seine Methode erklärt er nur an einem leichten Beyspiele. (Varia opera Fermatii, p. 58. Preisschrift von Genty, Influence de Fermat sur son siécle, pag. 67. Carteſii epiſtolae T. III. ep. 75.)

Die Algebra war nunmehr so weit gebracht, daß es noch darauf ankam, die erfundenen Hauptlehren auf das bündigste zu verknüpfen, sie in ihrer Allgemeinheit gehörig zu erweisen, noch verschiedenes zuzufügen, was z. B. die unmöglichen, und die gleich großen Wurzeln, auch die Elimination bey mehreren Gleichungen und unbekannten Größen betrifft, und die Auflösung numerischer Gleichungen möglichst bequem zu machen. Die Gleichungen über den fünften Grad hinaus aufzulösen, blieb auch noch eine Forderung an die Nachfolger jener ersten Pfleger dieser Wissenschaft; allein diese ist bisher noch unerfüllt geblieben, man müßte denn die Auflösung der Gleichungen durch Umkehrungs-Reihen als genugthuend ansehen.

Unter den Mathematikern, welche den von Descartes eröffneten Weg verfolgten, machten de Beaune und Hudde ein paar Zusätze zu der Theorie der Gleichungen.

De Beaune, welcher königlicher Rath bey dem Presidial von Blois war, zeigte, wie in den Gleichungen bis mit zum vierten Grade die Gränzen der positiven Wurzeln aus den Coefficienten gefunden werden. Er geht alle Fälle mit verschiedenen Vorzeichen einzeln durch, auch alle Fälle unvollständiger Gleichungen. Man kann daher seine Arbeit benutzen, um in jedem gegebenen Falle einer cubischen oder biquadratischen Gleichung die Größen, zwischen welchen die positiven Wurzeln enthalten sind, zu bestimmen, wenn diese auch den äußersten Wurzeln nicht immer nahe kommen werden. Die Gränzen für die negativen Wurzeln zu finden, muß man die Vorzeichen der Glieder in den geraden Stellen mit den entgegengesetzten vertauschen, als wodurch die Wurzeln sich in die entgegengesetzten verwandeln. Die Abhandlung des de Beaune de limitibus aequationum ist nebst einer andern über die Gleichungen

nach seinem Tode von Erasmus Bartholinus 1673 her ausgegeben, und einer Ausgabe von der Geometrie des Descartes beygefügt. Für numerische Gleichungen hat man noch ein anderes Verfahren, die nächsten ganzen Zahlen an jeder Wurzel zu finden, (s. Gränzen einer Gleichung).

Johann Hudde, der Bürgermeister zu Amsterdam war, und 1704 in einem hohen Alter gestorben ist, zeigte, wie die gleich großen Wurzeln einer Gleichung gefunden werden. Wenn nämlich eine Gleichung zwey gleich große und gleichnamige Wurzeln hat, und ihre Glieder) die etwa fehlenden mitgezählt) durch die Glieder einer arithmetischen Reihe folgweise multiplicirt werden, so hat die daraus entstehende neue Gleichung eine Wurzel mit der gegebenen gemein, oder beide haben einen gemeinschaftlichen Theiler von der Form x — p. Diesen gemeinschaftlichen Theiler lehrt Hudde finden. Hat die Gleichung drey gleiche Wurzeln, so wird nach Huddens Vorschrift die Gleichung auf die besagte Art mit einer arithmetischen Reihe multiplicirt, und die dadurch entstehende Gleichung auf ähnliche Art wieder mit einer solchen Reihe. Die nun hervorgehende Gleichung hat einen gemeinschaftlichen Factor mit der gegebenen, wie x — p, und die Wurzel p kommt dieser dreymahl zu. Auf ähnliche Art werden auch die Wurzeln gefunden, die in einer Gleichung vier oder mehrmahls vorhanden sind. Hudde lehrt das Verfahren in einer Abhandlung de reductione aequationum, die der vorher gedachten Ausgabe von Descartes Geometrie angehängt ist.

Mit der Construction der Gleichungen beschäftigte man sich im 17ten Jahrhunderte viel. Descartes hatte dazu bloß den Kreis und die Parabel gebraucht. De Sluse, Canonicus in Lüttich und Abt von Amas, erweiterte diese Methode, und zeigte, daß man sie auf unendliche Arten durch den Kreis und einen der Kegelschnitte construiren und dadurch auflösen könne. Seine Abhandlung hat den Titel: Mesolabum, seu duae mediae proportionales per circulum et ellipsin vel hyperbolam infinitis

modis exhibitae. Leod. 1659. 4, und 1668, cum parte altera de Analyſi et Miſcellaneis. In der erſten Ausgabe zeigt er nicht, wie er die Conſtructionen gefunden habe, welches in der zweyten geſchieht, die zugleich viele feine geometriſche Unterſuchungen enthält. Thomas Baker, ein Engländer, lehrte 1684 in einer Schrift: The geometrical key, or the gate of equations unlocked (Geometriſcher Schlüſſel, oder aufgeſchloſſene Thür der Gleichungen) alle cubiſche und biquadratiſche Gleichungen, ohne vorgängige Verwandlung, mittelſt eines Kreiſes und einer einzigen angenommenen Parabel zu verzeichnen. Dieſes Verfahren iſt noch unter dem Namen, Bakers Centralregel, bekannt (ſ. Anwendung d. Geom. auf die Algebra, III.). Weil Bakers Vorſchriften, wie von den Vorzeichen + und — bald das eine, bald das andere zu gebrauchen iſt, zu große Achtſamkeit erfordern, ſo ſuchte Halley eine bequemere Verzeichnungsart, die er in den Philoſ. Tranſ. 1687. nr. 188 bekannt machte. Dieſen Aufſatz hat 's Graveſand ſeiner Ausgabe von Newtons Arithm. univ. beygefügt. In dieſem Werke zeigt Newton, wie die Conchoide zur Verzeichnung cubiſcher Gleichungen gebraucht werden könne, und auch, wie dazu jeder Kegelſchnitt diene. Halley zeigte ferner, wie die Anzahl der möglichen Wurzeln, ihre Gränzen und ihre Beſchaffenheit für alle Fälle cubiſcher und biquadratiſcher Gleichungen geometriſch dargeſtellt werden können. Philoſ. Tranſ. 1687. nr. 190.

Newton gab in ſeiner allgemeinen Arithmetik eine feine Regel, die Anzahl der unmöglichen Wurzeln einer Gleichung zu finden, die inzwiſchen bisweilen in ſo fern trügen kann, daß mehr unmögliche Wurzeln vorhanden ſind, als ſie angiebt. Sie beruht darauf, daß gewiſſe algebraiſche Zuſammenſetzungen größer oder kleiner ſeyn müſſen, als andere, wenn alle Wurzeln möglich ſind. Man darf aber dieſen Satz nicht umkehren, da das Gröſſere oder Kleinere einen Spielraum zuläßt, ſo daß dieſelbe Ungleichheit auch bey unmöglichen Wurzeln Statt haben kann. Newton hat den Beweis ſeiner Regel nicht mit-

getheilt. **Maclaurin** hat den Beweis mit andern Vorschriften zur Entdeckung der unmöglichen Wurzeln in den Phil. Transf. 1726 und 1729, nr. 394 und 408 vorgetragen. Auch **Campbell** hat daselbst nr. 404 einen Beweis der Regel geliefert. Diese Abhandlungen sind in der angeführten Ausgabe von Newtons allg. Arithm. anzutreffen. Maclaurin hat in seiner Algebra P. II. ch. 11. einen Beweis gegeben. **De Gua** hat sich auch damit beschäftigt in den Mem. d. Paris 1741, und du Sejour in denselben für das Jahr 1772. (s. unmögliche Wurzeln).

Die Gränzen der Wurzeln einer Gleichung zu finden, gab Newton eine neue Methode in dem gedachten Werke, wozu er die Sätze von den Summen der Potenzen der Wurzeln benutzte, die er vielleicht selbst entdeckt hat, wenn gleich schon Albert Girard darauf lange vor ihm gekommen ist. Sie wurden wenigstens durch Newton bekannt, und daher ihm zugeschrieben. Er hat ihnen auch eine andere Form gegeben, als sie bey Girard haben, (s. Combinatien VII).

Tschirnhausen trug in den Actis Erud. 1683 eine allgemeine Methode zur Auflösung der Gleichungen vor, von welcher er sich aber zu viel versprach. Sie erfordert oft die Auflösung einer höhern Gleichung als die vorgegebene ist, (s. Gleichung V).

Abraham de Moivre zeigte in den Transactionen 1698, wie aus einer Gleichung mit unbestimmt vielen Gliedern die Wurzel gezogen werden kann, das ist, wie eine Reihe umgekehrt wird. Dieses hatte Newton auch schon gefunden (Newt. epist. ad Oldenburgium 1676. Opusc. I. p. 354), aber noch nicht bekannt gemacht.

De Lagny gab allgemeine Gränzformeln für die Wurzeln, nachdem diese bis auf einen Bruchtheil in ganzen Zahlen gefunden sind. Méthodes nouvelles et abrégées pour l'extraction et l'approximation des racines et pour resoudre par le cercle et la ligne droite plusieurs problêmes solides et sursolides, etc. par M. de Lagny. Seconde édition, à Paris

dern zusammen gesetzt wird; diese ist eine Verknüpfun zweyer verschiedener Formen von gleicher Quantität. (S. Gleichung im Anfang.) Eine Gleichung heißt auch algebr. isch im Gegensatz gegen die transscendenten, welche tran [illegible] Größen, als Kreisbogen, Exponentialgrößen m [illegible] Exponenten, und die Integralgrößen [illegible] Differentialen enthalten. Diese alle kön nen nur durch unendliche Reihen dargestellt werden.

[illegible] Größe ist eine solche, die aus eine [illegible] in der Form ganze [illegible], im Ge [illegible] namhaft ge macht [illegible].

[illegible] Curve, ist dieje nige [illegible] algebraische Gleichung [illegible] werden kann, im [illegible] Gleichungen [illegible], oder aus [illegible] Linien.

[illegible] Zahl war in der [illegible] Zahl, welche das Zeichen [illegible] hat. Die Alten [illegible] Zeichen.

[illegible] Zeichen [illegible], die in der [illegible] gebraucht [illegible], theils [illegible] Zeichen.

[illegible], auch [illegible], besondere in den [illegible] Zif [illegible] Rechnungsart. [illegible] A!, und dem [illegible], wie Al [illegible], welche der [illegible] ist, fängt [illegible]

Haec Algorismus ars praesens dicitur, in qua Talibus Indorum fruimur bis quinque figuris, etc. mit den beygezeichneten Ziffern. Von einem unbekannten Verfaſſer, vermuthlich aus dem 13ten Jahrhundert, iſt ein Werk: Opuſculum de praxi numerorum, quod Algorismum vocant, mit des Jac. Fabri Epitome ſeu brevis introd. in Boëthii Arithmeticam von Jodocus Clichtoväus 1503 herausgegeben. Von Georg Purbach oder Peurbach im 15ten Jahrhundert iſt eine Arithmetik vorhanden, welche den Titel hat: Algorithmus de numeris integris, fractis, regulis communibus et de proportionibus, im 16ten Jahrhundert mehrmahls gedruckt.

Von den Neuern wird Algorithmus bisweilen für jede Art der Rechnung gebraucht, als Algorithmus infinitesimalis, exponentialis, ſinuum, etc. In der Encycl. méthod. heißt es pleonaſtiſch: Algorithme du calcul integral, du calcul exponentiel, du calcul des ſinus.

Alhazens Aufgabe. S. zweyte Abtheilung dieſes Werks.

Aliquantus wird von einem Theile einer Zahl oder einer Größe gebraucht, wenn der Theil ſich zu dem Ganzen nicht verhält, wie die Einheit zu einer ganzen Zahl. So iſt 5 eine pars aliquanta von 16.

Aliquotus wird von dem Theile eines Ganzen gebraucht, wenn er ſich zu dieſem verhält, wie die Einheit zu einer ganzen Zahl. So iſt 5 eine pars aliquota von 20.

Aliza regula iſt der Titel, welchen Cardan einem Buche giebt, worin er ſchwerere Fragen aus der Arithmetik und Algebra vorträgt, insbeſondere die cubiſchen Gleichungen und den ſchwierigen Fall bey ſeiner Formel für dieſelben. Die Abſtammung des Wortes iſt nicht bekannt. S. Käſtners Geſchichte der Mathematik. Th. I. S. 162.

Allgemein iſt, was nicht auf eine beſtimmte Größe oder beſtimmte Formen der Größen eingeſchränkt wird. In der Geometrie wird den Größen

Grade nicht anwendbar, und in gewiſſen Fällen trüglich. In den Pariſer Mem. für 1747 iſt nur ein Abriß der Methode enthalten. Vollſtändiger, aber auch ohne Beweiſe, findet ſie ſich in der Sammlung von Memoiren des Verfaſſers, die im Jahr 1764 herausgekommen iſt.

Euler hat manche zur Algebra gehörige Abhandlungen geliefert. Eine merkwürdige iſt: de formis radicum aequationum cujusque ordinis conjectatio. Comm. Petr. T. VI. a. a. 1732. Darin iſt eine neue Methode zur Auflöſung biquadratiſcher Gleichungen enthalten, die in dem Artikel, Gleichung IV. befindlich iſt. Von Euler ſind zwey Abhandlungen über die unmöglichen Wurzeln, eine in den Mem. de Berlin 1749, die andere in den Nov. Comm. Petr. T. XIII. 1768; ferner über die Auflöſung der Gleichungen jedes Grades, N. C. Petr. T. IX. 1762; und Bemerkungen über die Wurzeln der Gleichungen, N. Comm. Petr. XV. worin die Sätze von den Summen der Potenzen der Wurzeln bewieſen werden; auch eine Näherungsmethode für die Wurzeln Nova Acta Petr. 1788. In der Introd. in Anal. Infin. zeigt Euler, wie die rücklaufenden Reihen zur Berechnung der Wurzeln gebraucht werden können, und handelt darin auch die Conſtruction der Gleichungen ab. In den Inſtitt. Calc. diff. lehrt er eine Anwendung der Differentialrechnung zur Auflöſung der Gleichungen durch den Gebrauch des Taylorſchen Lehrſatzes, ferner wie mittelſt der Lehre vom Größten und Kleinſten die wirklichen Wurzeln entdeckt werden können, und welche Kennzeichen der unmöglichen Wurzeln ſich angeben laſſen.

Lambert hat Unterſuchungen über die Gleichungen jedes Grades in den Mem. de Berlin 1763 angeſtellt. Eine lehrreiche Abhandlung über die Verwandlung und Auflöſung der Gleichungen iſt in ſeinen Beyträgen zur Mathematik, im 2ten Theil enthalten.

La Grange hat durch Hülfe einer feinen Theorie die numeriſche Auflöſung der Gleichungen ſehr erleichtert. In den beiden Abhandlungen über dieſen Gegenſtand, Mem. de Berlin 1767 und 1768 wird gezeigt, wie man

die den Wurzeln nächſten ganzen Zahlen finden, die unmöglichen Wurzeln entdecken, und die Wurzeln näherungsweiſe durch Kettenbrüche, deren Theorie hier zugleich erweitert wird, angeben könne. Dieſe beiden Abhandlungen ſind mit ſehr wichtigen Zuſätzen neu herausgegeben, unter dem Titel, de la réſolution des équations numériques de tous les degrés, par J. L. Grange, à Paris An VI. 266 p. in 4. welches Werk die Materie erſchöpfen möchte. Auch die literalen Gleichungen durch Reihenausdrücke für die Wurzeln aufzulöſen zeigt la Grange eine neue Methode in den Mem. de Berlin 1768. Sehr tiefſinnige Bemerkungen über die Natur der Gleichungen ſind enthalten in ſeinen reflexions ſur la reſolution algébrique des équations, Nouv. Mem. de Berlin 1770. 1771.

Die Form der unmöglichen Wurzeln mit völliger Schärfe zu erweiſen, bemühten ſich d'Alembert, Euler, la Grange, Foncenex, Gauß. (S. Gleichung VI.)

Die Reduction mehrerer, für eben ſo viele unbekannte Größen gegebener, Gleichungen auf eine Gleichung für eine dieſer Größen allein, oder die Lehre von der Elimination, iſt in den neuern Zeiten mit Fleiß betrieben worden. Die Reduction für zwey Gleichungen lehrten Euler, Cramer, la Grange; und für mehr als zwey Gleichungen Bezout in einem großen Werke: Théorie générale des équations algebriques, à Paris, 1769. 469 p. in 4. (ſ. Elimination).

Algebraiſch, was zur Algebra gehört oder damit in Verbindung ſteht.

Algebraiſche Auflöſung iſt, die durch Hülfe der Algebra gefunden, und nach den Regeln derſelben ausgeführt wird, im Gegenſatz gegen eine **geometriſche**.

Algebraiſche Formel iſt der ſymboliſche Ausdruck einer Größe durch diejenigen, aus welchen ſie zuſammengeſetzt wird. Z. B. die Formeln für die Wurzeln einer quadratiſchen oder cubiſchen Gleichung.

Algebraiſche Gleichung iſt entgegengeſetzt der analytiſchen. Jene enthält die Art, wie eine Größe aus an-

dern zusammen gesetzt wird; diese ist eine Verknüpfung zweyer verschiedener Formen von gleicher Quantität. (S. Gleichung im Anfang.) Eine Gleichung heißt auch **algebraisch** im Gegensatz gegen die transscendenten, welche transscendente Größen, als Kreisbogen, Exponentialgrößen mit veränderlichen Exponenten, und die Integralgrößen zu unintegrirbaren Differentialen enthalten. Diese alle können nur durch unendliche Reihen dargestellt werden.

Algebraische Größe ist eine solche, die aus einer endlichen Anzahl von Gliedern, es sey in der Form ganzer Zahlen oder von Brüchen, zusammengesetzt wird, im Gegensatz gegen transscendente, die gleich vorher namhaft gemacht sind.

Algebraische krumme Linie, oder Curve, ist diejenige, deren Natur durch eine endliche algebraische Gleichung zwischen ihren Coordinaten dargestellt werden kann, im Gegensatz gegen die transscendenten, deren Gleichungen Kreisbogen und Exponentialgrößen enthalten, oder aus unendlich vielen Gliedern bestehen. S. krumme Linien.

Algebraische Zahl oder Cossische Zahl war in der alten numerischen Algebra eine Zahl, welche das Zeichen einer Potenz oder Wurzel vor sich hat. Die Alten hatten für jede Potenz oder Wurzel eigene Zeichen.

Algebraische Zeichen sind die Symbole, die in der Algebra und der allgemeinen Rechnung überhaupt gebraucht werden. Sie bezeichnen theils die Größen selbst, theils ihre Formen, theils ihre Verbindung. S. Zeichen.

Algorithmus, auch **Algorismus**, bedeutete in den mittlern Zeiten, als die Rechnung mit den dekadischen Ziffern in Europa eingeführt ward, diese neue Rechnungsart. Das Wort ist aus dem arabischen Artikel, *Al*, und dem Griechischen, *Arithmos*, Zahl, zusammengesetzt, wie Almagestum u. a. Eine Arithmetik in Versen, welche der Arithmetik des Joh. de sacro Bosco beygefügt ist, fängt sich mit folgenden Zeilen an:

Haec Algorismus ars praesens dicitur, in qua Talibus Indorum fruimur bis quinque figuris, etc. mit den beygezeichneten Ziffern. Von einem unbekannten Verfasser, vermuthlich aus dem 13ten Jahrhundert, ist ein Werk: Opusculum de praxi numerorum, quod Algorismum vocant, mit des Jac. Fabri Epitome seu brevis Introd. in Boëthii Arithmeticam von Jodocus Clichtoväus 1503 herausgegeben. Von Georg Purbach oder Peurbach im 15ten Jahrhundert ist eine Arithmetik vorhanden, welche den Titel hat: Algorithmus de numeris integris, fractis, regulis communibus et de proportionibus, im 16ten Jahrhundert mehrmahls gedruckt.

Von den Neuern wird Algorithmus bisweilen für jede Art der Rechnung gebraucht, als Algorithmus infinitesimalis, exponentialis, sinuum, etc. In der Encycl. méthod. heißt es pleonastisch: Algorithme du calcul intégral, du calcul exponentiel, du calcul des sinus.

Alhazens Aufgabe. S. zweyte Abtheilung dieses Werks.

Aliquantus wird von einem Theile einer Zahl oder einer Größe gebraucht, wenn der Theil sich zu dem Ganzen nicht verhält, wie die Einheit zu einer ganzen Zahl. So ist 5 eine pars aliquanta von 16.

Aliquotus wird von dem Theile eines Ganzen gebraucht, wenn er sich zu diesem verhält, wie die Einheit zu einer ganzen Zahl. So ist 5 eine pars aliquota von 20.

Aliza regula ist der Titel, welchen Cardan einem Buche giebt, worin er schwerere Fragen aus der Arithmetik und Algebra vorträgt, insbesondere die cubischen Gleichungen und den schwierigen Fall bey seiner Formel für dieselben. Die Abstammung des Wortes ist nicht bekannt. S. Kästners Geschichte der Mathematik. Th. I. S. 162.

Allgemein ist, was nicht auf eine bestimmte Größe oder bestimmte Formen der Größen eingeschränkt wird. In der Geometrie wird den Größen

[illegible] Leod. 1659. 4, und 1668, [illegible] de Analysi et Miscellaneis. [illegible] zeigt er nicht, wie er die Construc[illegible] [illegible], welches in der zweyten geschieht, d[illegible] [illegible] geometrische Untersuchungen enthält. [illegible] Baker, ein Engländer, lehrte 1684 in [illegible] The geometrical key, or the gate of [illegible] unlocked (Geometrischer Schlüssel, oder [illegible] Thür der Gleichungen) alle cubische und b[illegible] Gleichungen, ohne vorgängige Verwand[illegible] mittelst eines Kreises und einer einzigen angenommenen [illegible] zu verzeichnen. Dieses Verfahren ist noch unter [illegible] Namen, Bakers Centralregel, bekannt (s. An[illegible] dung d. Geom. auf die Algebra, III.). Weil B[illegible] Vorschriften, wie von den Vorzeichen + und — bald [illegible] eine, bald das andere zu gebrauchen ist, zu große Acht[illegible] keit erfordern, so suchte Halley eine bequemere Verz[illegible] nungsart, die er in den Philos. Trans. 1687. nr. [illegible] bekannt machte. Diesen Aufsatz hat 's Gravesand seiner [illegible] gabe von Newtons Arithm. univ. beygefügt. In [illegible] sem Werke zeigt Newton, wie die Conchoide zur Verz[illegible] nung cubischer Gleichungen gebraucht werden könne, [illegible] auch, wie dazu jeder Kegelschnitt diene. Halley ze[illegible] ferner, wie die Anzahl der möglichen Wurzeln, ihre G[illegible] zen und ihre Beschaffenheit für alle Fälle cubischer und quadratischer Gleichungen geometrisch dargestellt wer[illegible] können. Philos. Trans. 1687. nr. 190.

Newton gab in seiner allgemeinen Arithmetik eine [illegible] ne Regel, die Anzahl der unmöglichen Wurzeln einer Gl[illegible] ung zu finden, die inzwischen bisweilen in so fern [illegible] gen kann, daß mehr unmögliche Wurzeln vorhan[illegible] sind, als sie angiebt. Sie beruht darauf, daß gewisse [illegible] Zusammensetzungen größer oder kleiner [illegible] als andere, wenn alle Wurzeln möglich [illegible] Man darf aber diesen Satz nicht umkehren, da das G[illegible] [illegible] einere einen Spielraum zuläßt, so daß dies[illegible] [illegible] auch bey unmöglichen Wurzeln Statt ha[illegible] [illegible] Newton hat den Beweis seiner Regel nicht [illegible]

getheilt. **Maclaurin** hat den Beweis mit andern Vorschriften zur Entdeckung der unmöglichen Wurzeln in den Phil. Transf. 1726 und 1729, nr. 394 und 408 vorgetragen. Auch **Campbell** hat daselbst nr. 404 einen Beweis der Regel geliefert. Diese Abhandlungen sind in der angeführten Ausgabe von Newtons allg. Arithm. anzutreffen. Maclaurin hat in seiner Algebra P. II. ch. 11. einen Beweis gegeben. **De Gua** hat sich auch damit beschäftigt in den Mem. d. Paris 1741, und du Sejour in denselben für das Jahr 1772. (s. unmögliche Wurzeln).

Die Gränzen der Wurzeln einer Gleichung zu finden, gab Newton eine neue Methode in dem gedachten Werke, wozu er die Sätze von den Summen der Potenzen der Wurzeln benutzte, die er vielleicht selbst entdeckt hat, wenn gleich schon Albert Girard darauf lange vor ihm gekommen ist. Sie wurden wenigstens durch Newton bekannt, und daher ihm zugeschrieben. Er hat ihnen auch eine andere Form gegeben, als sie bey Girard haben, (s. Combination VII).

Tschirnhausen trug in den Actis Erud. 1683 eine allgemeine Methode zur Auflösung der Gleichungen vor, von welcher er sich aber zu viel versprach. Sie erfordert oft die Auflösung einer höhern Gleichung als die vorgegebene ist, (s. Gleichung V).

Abraham de Moivre zeigte in den Transactionen 1698, wie aus einer Gleichung mit unbestimmt vielen Gliedern die Wurzel gezogen werden kann, das ist, wie eine Reihe umgekehrt wird. Dieses hatte Newton auch schon gefunden (Newt. epist. ad Oldenburgium 1676. Opusc. I. p. 354), aber noch nicht bekannt gemacht.

De Lagny gab allgemeine Gränzformeln für die Wurzeln, nachdem diese bis auf einen Bruchtheil in ganzen Zahlen gefunden sind. Méthodes nouvelles et abrégées pour l'extraction et l'approximation des racines et pour resoudre par le cercle et la ligne droite plusieurs problêmes solides et sursolides, etc. par M. de Lagny. Seconde édition, à Paris

dern zusammen gesetzt wird; diese ist eine Verknüpfung zweyer verschiedener Formen von gleicher Quantität. (S. Gleichung im Anfang.) Eine Gleichung heißt auch **algebraisch** im Gegensatz gegen die transscendenten, welche transscendente Größen, als Kreisbogen, Exponentialgrößen mit veränderlichen Exponenten, und die Integralgrößen zu unintegrirbaren Differentialen enthalten. Diese alle können nur durch unendliche Reihen dargestellt werden.

Algebraische Größe ist eine solche, die aus einer endlichen Anzahl von Gliedern, es sey in der Form ganzer Zahlen oder von Brüchen, zusammengesetzt wird, im Gegensatz gegen transscendente, die gleich vorher namhaft gemacht sind.

Algebraische krumme Linie, oder Curve, ist diejenige, deren Natur durch eine endliche algebraische Gleichung zwischen ihren Coordinaten dargestellt werden kann, im Gegensatz gegen die transscendenten, deren Gleichungen Kreisbogen und Exponentialgrößen enthalten, oder aus unendlich vielen Gliedern bestehen. S. krumme Linien.

Algebraische Zahl oder Cossische Zahl war in der alten numerischen Algebra eine Zahl, welche das Zeichen einer Potenz oder Wurzel vor sich hat. Die Alten hatten für jede Potenz oder Wurzel eigene Zeichen.

Algebraische Zeichen sind die Symbole, die in der Algebra und der allgemeinen Rechnung überhaupt gebraucht werden. Sie bezeichnen theils die Größen selbst, theils ihre Formen, theils ihre Verbindung. S. Zeichen.

Algorithmus, auch **Algorismus**, bedeutete in den mittlern Zeiten, als die Rechnung mit den dekadischen Ziffern in Europa eingeführt ward, diese neue Rechnungsart. Das Wort ist aus dem arabischen Artikel, *Al*, und dem Griechischen, *Arithmos*, Zahl, zusammengesetzt, wie Almagestum u. a. Eine Arithmetik in Versen, welche der Arithmetik des Joh. de sacro Bosco beygefügt ist, fängt sich mit folgenden Zeilen an:

theilt. **Maclaurin** hat den Beweis mit andern Vortheilen zur Entdeckung der unmöglichen Wurzeln in den Phil. Tranſ. 1726 und 1729, nr. 394 und 408 vorgetragen. **Auch Campbell** hat daſelbſt nr. 404 einen Beweis der Regel geliefert. Dieſe Abhandlungen ſind in der angeführten Ausgabe von Newtons allg. Arithm. anzutreffen. **Maclaurin** hat in ſeiner Algebra P. II. ch. 11. einen Beweis gegeben. **De Gua** hat ſich auch damit beſchäftigt in den Mem. d. Paris 1741, und du Sejour in denſelben für das Jahr 1772. (ſ. unmögliche Wurzeln).

Die Gränzen der Wurzeln einer Gleichung zu finden, gab Newton eine neue Methode in dem gedachten Werke, worinn er die Sätze von den Summen der Potenzen der Wurzeln benutzte, die er vielleicht ſelbſt entdeckt hat, wenn gleich ſchon Albert Girard darauf lange vor ihm gekommen iſt. Sie wurden wenigſtens durch Newton bekannt, und daher ihm zugeſchrieben. Er hat ihnen auch eine andere Form gegeben, als ſie bey Girard haben, (ſ. Combinationen VII).

Tſchirnhauſen trug in den Actis Erud. 1683 eine allgemeine Methode zur Auflöſung der Gleichungen vor, von welcher er ſich aber zu viel verſprach. Sie erfordert oft die Auflöſung einer höhern Gleichung als die vorgegebene iſt, (ſ. Gleichung V).

Abraham de Moivre zeigte in den Tranſactionen 1698, wie aus einer Gleichung mit unbeſtimmt vielen Gliedern die Wurzel gezogen werden kann, das iſt, wie eine Reihe umgekehrt wird. Dieſes hatte Newton auch ſchon gefunden (Newt. epiſt. ad Oldenburgium 1676. Opuſc. I. p. 354), aber noch nicht bekannt gemacht.

De Lagny gab allgemeine Gränzformeln für die Wurzeln, nachdem dieſe bis auf einen Bruchtheil in ganzen Zahlen gefunden ſind. Méthodes nouvelles et abregées pour l'extraction et l'approximation des racines et pour reſoudre par le cercle et la ligne droite pluſieurs problêmes ſolides et ſurſolides, etc. par M. de Lagny. Seconde édition, à Paris

nie eine bestimmte Quantität gegeben, sondern die gezeichnete Figur dient als Repräsentantium für alle mögliche, bey welchen dieselben Bedingungen der Construction sich finden. Die angewandte Geometrie giebt den geometrischen Größen eine bestimmte Quantität. In der Wissenschaft selbst sind die Sätze nur ihrer Ausdehnung nach verschieden. Der pythagoräische Lehrsatz z. B. ist ein besonderer Satz. Allgemeiner ist der Satz: wenn über den Seiten eines rechtwinklichten Dreyecks ähnliche Figuren verzeichnet werden, so ist die Figur über der Hypotenuse so groß, als die beyden über den Katheten beschriebenen zusammen genommen. Ein allgemeiner geometrischer Satz ist, daß alle ähnliche Körper sich verhalten, wie die Würfel der daran oder in denselben auf einerley Art gezogenen Linien. Kreis, Ellipse, Parabel, Hyperbel, sind Linien von derselben Ordnung, und haben gewisse allgemeine Eigenschaften neben den besondern, die jeder dieser Linien allein zukommen.

In der Arithmetik pflegt man Sätze und Auflösungen an bestimmten Zahlgrößen zu erweisen, doch so, daß daraus die Allgemeinheit derselben erhellt. Für Anfänger legt man eine Aufgabe in bestimmten Zahlen vor, um sie für die Auflösung in unbestimmten Zahlen vorzubereiten. Wenn man die Potenzen eines Binomium, $a + b$, nach der Reihe entwickelt, so erhält man Sätze, die der Quantität nach allgemeine, aber der Form nach besondere oder vielmehr individuelle sind.

Wird der Exponens unbestimmt gelassen, so erhält man ein **allgemeines Theorem**, entweder mit Einschränkung auf ganze Werthe der Exponenten, wie es die ältern Analysten vortrugen, oder unbedingt allgemein, wie es durch Newton gefunden ist. Das **allgemeine Glied** einer Reihe ist der Ausdruck irgend eines Gliedes derselben durch gewisse gegebene Größen und die Stelle desselben. Eine **allgemeine Gleichung** für die Kegelschnitte ist eine solche, die jeden derselben, bey jeder Lage der Abscissenlinie, und für jeden Ordinatenwinkel darstellen kann. In diesen, so wie in den allgemeinen Gleichungen für Linien höherer Ordnun-

744 giebt er den cubiſchen Gleichungen zweyerley Form, die geſchickt ſind, alle drey Wurzeln durch Näherung zu finden, (ſ. Cardans Regel). Man hat ſich noch in den neueſten Zeiten viel mit der Cardaniſchen Regel beſchäftigt. Die mehreſten Schriften darüber ſind in dem auch vorher angewieſenen Artikel angeführt.

Wenn man die Cardaniſche Formel allgemeiner macht, und die Wurzel einer Gleichung ſetzt $x = \frac{1}{2}(\sqrt{(1+a^2)}+a)^{\frac{1}{n}} - \frac{1}{2}(\sqrt{(1+a^2)}-a)^{\frac{1}{n}}$, oder auch $x = \frac{1}{2}(a+\sqrt{(a^2-1)})^{\frac{1}{n}} + \frac{1}{2}(a-\sqrt{(a^2-1)})^{\frac{1}{n}}$, wo n eine ungerade ganze Zahl iſt, ſo führt dieſes zu einer rationalen Gleichung für x, in welcher bloß die ungeraden Potenzen von x vorkommen, und die Coefficienten gewiſſe reguläre Functionen von n ſind. Dieſe Gleichungen gab Moivre in den Phil. Transf. 1707, n. 309, Anhang zu Newtons Arithm. univ. p. 270. Die Wurzel iſt der Sinus oder Cosinus eines hyperboliſchen Sectors, (ſ. Goniometrie VII.)

Die Regel des Descartes über die Anzahl der poſitiven und negativen Wurzeln einer Gleichung erwies zuerſt de Gua in den Mem. de l' Acad. des Sc. 1741; hernach auf andere Arten **Segner**, **Käſtner**, **Äpinus**, **Milner**. (S. Gleichung VI. 5).

Fontaine gab in den Mem de l' Acad. des Sc. 1747. eine Methode an, die Wurzeln durch Näherung zu finden, welche ganz allgemein ſeyn ſoll, aber beſchwerlich und langſam iſt, auch eine weitläufige Vorarbeit erfordert, weil es auf Bedingungen wegen der Möglichkeit und Unmöglichkeit der Wurzeln ankommt, die für jeden Fall zur Hand ſeyn müſſen. Die Methode iſt nicht in Gebrauch gekommen. In der Encyclopédie méthodique, partie mathém. art. Equation, macht d'Alembert Erinnerungen wegen ihrer Zuverläſſigkeit. Eine genauere Prüfung derſelben hat la Grange in ſeinem Werke de la réſolution des équations numériques (à Paris an VI.), p. 153 — 164 angeſtellt. Er findet ſie für höhere Gleichungen als die vom vierten

werth von dem höhern, und ſetze den Unterſchied neben den niedrigern Werth rechts; den Unterſchied des Mittelwerthes von dem niedrigern ſetze man neben den höhern; ſo zeigen dieſe Unterſchiede an, wie viel von jeder der beiden Sorten im Verhältniſſe gegen die andere zu nehmen iſt.

Z. B. Es verlangte jemand 13löthiges Silber, habe aber kein anderes als 10- und 15löthiges, wie viel muß er von jedem nehmen, daß die Miſchung 13löthig werde. Der Werth der Silbergattungen wird durch die Anzahl der Lothe fein Silber in einer Mark, oder durch das Löthige angezeigt. Man mache nun den Anſatz, wie folget:

	15	3
13		
	10	2

Von dem beſſern Silber ſind 3 Theile gegen 2 Theile von dem ſchlechtern zu nehmen. Theilt man alſo das ganze Gewicht des zu verfertigenden Werks in 5 Theile, ſo kommen 3 dieſer Theile an feinem Silber, und 2 an ſchlechtem zu demſelben.

Den Beweis dieſer Regel giebt die Auflöſung der 5ten Aufgabe in dem Artikel, Gleichung. I.

Man kann den Beweis an dem gegebenen Beyſpiele auch folgender Geſtalt führen. Der Goldſchmied büßet auf jede Mark des feinern Silbers 2 Loth fein ein, wenn er es für 13löthiges rechnet, gewinnt hingegen auf jede Mark des 10löthigen 3 Loth fein, wenn er es als 13löthiges verkauft. Damit weder er noch der Käufer Schaden leiden, muß die Menge von der einen und der andern Art Silber ſich umgekehrt verhalten wie der Gewinn und Verluſt an demſelben.

Die Probe der Rechnung iſt, daß man aus den berechneten Mengen und ihren Werthen den Werth der Miſchung berechne, und daraus den Werth der Einheit für die Menge der Miſchung, welcher der beſtimmte ſeyn muß.

Z. B. Man habe in dem Beyſpiele 20 Mark Silber zu der Miſchung beſtimmt, ſo ſind dazu zu nehmen 12 Mark des beſſern und 8 Mark des ſchlechtern Silbers.

Jene enthalten 12. 15 Loth fein Silber oder 180 Loth; diese enthalten 80 Loth fein Silber, zusammen 260 Loth fein Silber in 20 Mark, also 13 Loth in 1 Mark, wie es seyn soll.

Die Allegations-Regel könnte ihren Namen von dem Falle haben, bey welchem sie am meisten gebraucht wird, dem Legiren der edlen Metalle mit einander oder mit unedlen. Von Clausberg nennt sie so. Es scheint aber Alligationsregel gewöhnlicher zu seyn. Stifel, nennt die beiden gegebenen Zahlen numeros alligandos, und die mittlere Zahl, numerum, ad quem fit alligatio. So bedeutet Allegation das Verknüpfen zweyer Zahlen mit einer dritten.

Zweytes Exempel. Es hat jemand 457 Mark 4 Loth Silber, welche die Mark zu 11 Thlr. gerechnet werden. Dies will er mit Kupfer beschicken, von welchem ½ Pfund oder 1 Mark 4 Ggr. oder ⅓ Thlr. kostet, so daß die Mark auf 10 Thlr. komme; wie viel ist an Kupfer zuzusetzen? Nach der obigen Art ist der Ansatz:

11	$9\frac{1}{3}$	59
10		
$\frac{1}{3}$	1	6

das heißt: auf 59 Theile Silber sind zu nehmen 6 Theile Kupfer an Gewicht. Demnach sind auf $457\frac{1}{4}$ Mark Silber zu nehmen $46\frac{1}{2}$ Mark Kupfer.

Wenn mehr als zweyerley Materien zu vermischen sind, so ist die Aufgabe unbestimmt, und man hat die Freyheit, noch irgend eine Bestimmung zuzufügen. Die Vorschriften der Rechenmeister sind nicht leicht zu fassen. Ein wenig Buchstabenrechnung stellt das Verfahren ganz deutlich dar.

Die Materien seyn dreyerley Silber. Das erste ist m löthig, das zweyte n löthig, das dritte p löthig; die Mischung sey r löthig. Die ganze Mischung habe das Gewicht a Mark. Von den drey Arten Silber seyn zu nehmen nach der obigen Ordnung x, y, z Mark. Es ist nun

I. $mx + ny + pz = ra$

II. $x + y + z = a$

Man nehme an, daß von dem zweyten und dritten Silber gleich viel genommen werden solle, oder daß $y = z$ sey, so ist

I. $mx + (n+p)y = ra$

II. $x + 2y = a$

Multiplicirt man die zweyte Gleichung mit r, so ist

II. $rx + 2ry = ra$

also

III. $mx + (n+p)y = rx + 2ry$

oder

III. $(m - r)x = (2r - n - p)y$.

und

$x : y = 2r - n - p : m - r$

oder

$x : 2y = 2r - n - p : 2m - 2r$

Diese Proportion zeigt, wie das Gewicht des ersten Silbers sich zu dem Gewichte der beiden andern Arten Silber zusammen genommen verhält. Aus dieser Proportion folgt (s. Verhältniß.)

$x + 2y : x = 2m - n - p : 2r - n - p$

oder

$a : x = 2m - n - p : 2r - n - p$

Exempel. Für das Silber A sey $m = 15$; für B sey $n = 11$; für C sey $p = 7\frac{1}{2}$; die Mischung soll 13löthig seyn, so daß $r = 13$. Hier ist $2m - n - p = 11\frac{1}{2}$; $2r - n - p = 7\frac{1}{2}$, folglich $a : x = 11\frac{1}{2} : 7\frac{1}{2} = 23 : 15$. Von dem Silber B und dem C sind zu nehmen von jedem 4 Theile.

Oder man nehme eines der Gewichte wie z nach Belieben an, z. B. so viel als davon vorhanden ist. Die beiden Gleichungen für x und y sind nun

I. $mx + ny = ra - pz$

II. $x + y = a - z$

Die zweyte mit n multiplicirt ist

II. $nx + ny = na - nz$.

Diese von I. abgezogen, wenn n kleiner als m ist, giebt

III. $(m - n)x = (r - n)a + (n - p)z$

also $x = \frac{(r-n)a + (n-p)z}{m-n}$.

Eben so ist $y = \frac{(m-r)a - (m-p)z}{m-n}$.

Wenn r kleiner als n ist, so ist das Stück des Zählers, $(r-n)a$ subtractiv. Eben so ist $(n-p)z$ und $(m-r)a$ subtractiv, jenes, wenn n kleiner als p, dieses, wenn m kleiner als r ist. Hingegen ist $(m-p)z$ additiv, wenn m kleiner als p ist. Alle Fälle werden durch den Gebrauch entgegengesetzter Grösen aus dem bey der Rechnung zum Grunde gelegten leicht hergeleitet.

Exempel. Es sey $m = 14$; $n = 11$; $p = 9$; $r = 12$. Das Gewicht der Mischung $a = 50$ Mark. Von dem dritten Silber wolle man nehmen, 16 Mark.

Es ist $x = \frac{1.10 + 2.16}{3} = \frac{82}{3} = 27\frac{1}{3}$;

$y = \frac{2.50 - 5.16.}{3} = \frac{20}{3} = 6\frac{2}{3}$. Beide Gewichte geben mit $z = 16$ das Gewicht 50.

Man setze, daß $m = 11$; $n = 9$; $p = 14$; und wie vorher $r = 12$; $a = 50$; $z = 16$ sey, so daß nun die Menge des besten Silbers bestimmt ist. Nun ist

$$x = \frac{3.50 - 5.16}{2} = 85; \text{ und}$$

$$y = \frac{-1.50 + 3.16}{2} = -1.$$

Da hier y negativ ist, so paßt die Annahme der Grösen nicht auf eine Mischung, sondern auf einen Tausch. Wer 85 Mark 11löthiges Silber und 16 Mark 14löthiges nimt, und dagegen eine Mark 9löthiges zurückgiebt, hat nun $+385 + 224 - 9$ Loth fein Silber $= 600$ Loth

fein, und + 35 + 16 — 1 Mark legirtes Silber = 5 Mark. Die Menge des feinen Silbers 600 Loth dividi durch die Zahl der Marke giebt 12. — Fände sich x oder größer, als die Menge des von der ersten oder zweyten Ga tung vorhandenen, so müßte man die Annahmen ändern wie es auch geschehen muß, wenn kein Tausch geschehen sondern eine wirkliche Mischung vorgenommen werden sol

Auf ähnliche Art verfährt man, wenn vier oder mehr Materien zu vermischen gegeben sind, so daß ein Maa (Pfund, Mark u. dgl.) der Mischung einen bestimmte Werth erhalte. Bey vier Materien kann man zwey Be stimmungen nach Gutdünken machen, bey fünf drey u. s.

Von Clausberg demonstrative Rechenkunst Th. IV. §. 1319 – 1354.

Kästners Fortsetzung der Rechenkunst, S. 396.

Almucabala ist eine alte Benennung der Algebra so fern sie die Relation der Größen durch Gleichungen aus druckt. Lucas Paciolus nennt den Theil seines Werks der von der Algebra handelt, l' Arte maggiore, ditta da volgo la Regola della Cosa, over Alghebra e Almuca bala, und erklärt den letztern Ausdruck durch Oppositi S. Algebra.

Alterna ratio (verwechseltes Verhältniß) ist, wen in einer Proportion die mittlern Glieder verwechselt wer den, in dem Falle, daß in derselben alle Glieder gleich artig sind.

Alterni anguli (Wechselwinkel), s. Parallelen.

Ambe, eine Verbindung von zwey Nummern in Lotto. In der Combinationslehre heißt eine Verbindun von zwey Größen eine Binion.

Ambigena hyperbola ist der Name, welchen Newton dem hyperbelförmigen Theile einer Linie von der dritten Ordnung giebt, wenn der eine Schenkel innerhalb des Asymptotenwinkels liegt, der andere aber außerhalb dieses Winkels, so daß dieser seine Asymptote irgendwo schneidet, und von da an außerhalb des Asymptotenwin

lels ſich an derſelben hin erſtreckt. Newt. enumeratio linearum tertii ordinis ſ. Linien der dritten Ordnung.

Amblygonium triangulum, ein ſtumpfwinklichtes Dreyeck.

Amicabiles numeri, ſ. Befreundete Zahlen.

Amplitudo arcus, **Weite eines Bogens**, der durchgehends nach einer Seite hin hohl iſt, iſt der Winkel, welchen die Normalen an den Endpuncten mit einander machen. Dieſer Winkel iſt gleich dem äußern Winkel der Berührungslinien an den Endpuncten des Bogens. Die **Weite eines paraboliſchen Bogens** iſt die auf die Axe der Parabel ſenkrechte Sehne. In dieſer Bedeutung kommt der Ausdruck beſonders vor, wenn die Parabel als die Bahn einer Bombe oder Kugel betrachtet wird. Die Weite iſt hier die horizontale Linie von dem Wurfspuncte an bis an den Punct, wo die Bombe den Horizont beym Niederfallen trifft. Sie heißt die **Wurfsweite** oder **Schußweite**, auch für die Linie, die in der Luft, als einem widerſtehenden Mittel, beſchrieben wird (ſ. Parabel). In der Aſtronomie kommt der Ausdruck: amplitudo, auch vor.

Analogie (Analogia) iſt gleichbedeutend mit Proportion. Es iſt das griechiſche Wort, ἀναλογια, wodurch Euklides die Gleichheit zweyer Verhältniſſe ausdruckt, ſ. Proportion.

Analyſis, als wiſſenſchaftliches Syſtem, iſt die allgemeine Darſtellung und Entwickelung der Zuſammenſetzungsarten der Größen durch Rechnung. Sie behandelt alle Größen wie Zahlen, aber als unbeſtimmte in Abſicht auf die Einheit und die Menge der Einheiten. Dadurch unterſcheidet ſie ſich von der Geometrie, welche die ausgedehnten Größen, ſo wie die Lagen der Linien und Ebenen, im Ganzen mit einander vergleicht, ohne ſie als Theile von irgend einer Einheit und Theilen der Einheit zu betrachten, ſelbſt bey proportionalen Größen dieſe Vorſtellung nicht erfordert. Da aber die ausgedehnten Größen

und die Winkel sich als Zahlgrößen ansehen lassen, so kann die Analysis auch zur Darstellung und Entwickelung geometrischer Verbindungen von Größen angewandt werden, nur daß diese, wo es auf die Lage der Linien und Ebenen ankommt, oft umständlicher und schwieriger ist, als die geometrische Zusammensetzung, die durch ein der Geometrie eigenthümliches Verfahren geschieht, s. die Artikel: Anwendung der Algebra auf die Geometrie; Krumme Linien.

Da die analytische Behandlung der Verbindungen der Größen allgemeine Lehrsätze und Auflösungen liefert, so ist ihr eine allgemeine Bezeichnungsart der Größen und ihrer Formen (Arten der Zusammensetzung) nothwendig. Diese wird in der **Buchstabenrechnung** gelehrt, welche zugleich die leichtesten und gemeinsten Rechnungsarten oder Umwandlungen der Formen enthält, (s. Buchstabenrechnung).

Die Verbindungen der Größen mit einander werden durch symbolische Formeln, durch Gleichungen, ausgedruckt, (s. Gleichung.) Die Eigenschaften dieser Formeln, die Zusammensetzung mehrerer Gleichungen und die Auflösung derselben (die Entwickelung des Unbekannten aus dem Bekannten) sind der Gegenstand der **Algebra**. Diese ist der erste Theil der Analysis. Zuweilen wird dadurch auch die ganze allgemeine Rechnung verstanden, so daß Algebra und Analysis als gleichbedeutend genommen werden. Es ist aber besser, die Algebra so einzuschränken, wie hier geschehen.

Die **Analysis im engern Verstande**, oder die eigentliche Analysis, und zwar sofern sie sich mit endlichen Größen beschäftigt, ist die Wissenschaft von den Formen der Größen, und lehrt theils die Umwandlung einer Form in eine andere, theils die Darstellung der Glieder einer stetigen Fortschreitung von Größen durch die zugeordneten Glieder einer andern Reihe nach irgend einem Gesetze. Man nennt sie zuweilen auch die **Theorie der Functionen**, weil Function der Ausdruck einer Größe durch andere ist. Die Algebra und Analysis betrachten die Größen auf verschiedene

ne unterscheidet sie in bekannte und unbekannte,
veränderliche oder bestimmte, und in veränder-
unbestimmte. Beide gebrauchen zur Darstel-
Zusammensetzung der Grösßen Gleichungen, die
esentlich unterscheiden. Z. B. in der algebrai-
chung $x^3 - ax^2 + bx - c = o$ wird die
iner oder dreyer Grösßen zu den gegebenen a, b, c,
ch nicht entwickelte Art ausgedruckt. In der
n Gleichung $(a+x)^3 = a^3 + 3a^2x + 3ax^2$
erden zweyerley Formen mit einerley Bestand-
fgestellt, woraus dieselbe Grösße entsteht. Es
wandlung eines Products in ein Aggregat. Die
: Gleichung $y = A + Bx + Cx^2 + Dx^3$
ebt das Gesetz der gemeinschaftlichen Bildung
y bezeichneten Grösßen durch die zugehörigen x
r unveränderlichen Grösßen A, B, C, D, etc.
n. Die algebraische Gleichung $o = A + Bx$
$-Dx^6 +$ etc. enthält die Relation zwischen den
Grösßen und denjenigen x, für welche $y = o$ ist.
: ist die Analysis im engern Verstande der wich-
il, sowohl wegen des Inhalts, da die Betrach-
Formen eigentlich das Interessante in der Ma-
st, als wegen ihrer mannichfaltigen Anwendung.
ra macht sich durch ihre Dienste bey der Erfin-
Unbekannten mehr nothwendig, als durch die
ng ihres Gegenstandes angenehm.
achstehende Entwurf der Analysis endlicher Gröss-
usschluß der Buchstabenrechnung und der Alge-
dem Leser den großen Umfang dieses wichtigen
reinen Mathematik zeigen, und ihm behülflich
die dahin gehörigen Untersuchungen in einer
dnung aus diesem Wörterbuche bekannt zu

e Lehre von den Functionen oder Formen der

Verschiedene Arten der Functionen.
Verwandlungen der Functionen,
Der Aggregate in Producte.

b) Gebrochner Functionen in Reihen.
c) Zerlegung eines Bruches in mehrere Brüche mit zweytheiligen einfachen Nennern, von der Form $a+x$, wenn sich solche aus dem Nenner des vorgegebenen Bruches absondern lassen.
d) Verwandlung einer Function durch Substitution einer andern Größe für die darin befindliche.
e) Darstellung einer gebrochenen Function durch einen Kettenbruch.

II. Anfäng der Theorie der Reihen.
1. Verschiedene Arten, wie Reihen entstehen.
2. Wie die Coefficienten einer aus mehrerern Reihen zusammengesetzten Reihe bestimmt werden.
3. Reihen vom häufigsten Gebrauche.
a) arithmetische.
α. gemeine.
β. höhere.
b) Geometrische.
c) Rücklaufende.

III. Lehre von den Combinationen.
1. Versetzungen einer gegebenen Menge von Dingen oder Elementen, entweder durchgehends verschiedenen, oder mit untermischten gleichen.
2. Aufzählung der Combinationen jeder Classe ohne oder mit Wiederholungen.
3. Aufstellung der Combinationen mit bestimmten Namen der Zahlenstellen ihrer Elemente.
4. Andere Anordnungen der Combinationen.
5. Relationen zwischen den Combinationen und den Summen der Potenzen von den combinirten Größen.

IV. Die combinatorische Analysis im Allgemeinen.
1. Ihr Zweck.
2. Ihre Methode.
3. Ihre Charakteristik.

V. Producte von gleichen zweytheiligen, vieltheiligen und unendlichen Factoren; wie auch Zerlegung einer

Function in gleiche Factoren. — Der binomiſche und polynomiſche Lehrſatz.
Eigenſchaften der Binomial-Coefficienten.

VI. Producte aus ungleichen binomiſchen Factoren. (Cf. Euleri Introd. in Anal. Infin. P. I. cap. 15. 16.)
1. Summirung der Potenzen reciproker Zahlen und anderer Reihen.
2. Zerfällung der Zahlen in ihre aliquanten ganzen Theile (partitio numerorum).

VII. Producte aus binomiſchen Factoren, die in arithmetiſcher Progreſſion genommen werden, eine Art der von Euler ſogenannten Functionum inexplicabilium. Inſtit. Calc. diff. P. II. cap. 16. Kramps numeriſche Facultäten. (Analyſe des refractions, Chap. 3.).

VIII. Logarithmiſche Functionen.
1. Reihen, den Logarithmen durch die zugehörige Zahl oder eine Function derſelben, und die Zahl durch ihren Logarithmen darzuſtellen.
2. Methode zur leichten Berechnung der Logarithmen. (Logarithmotechnie).
3. Logarithmiſche oder Exponentialgleichungen, der Hyperbel angehörig, und Gleichungen zwiſchen den hyperboliſchen Sinus, Coſinus und Querſinus, deren zugehörige Sectoren ein gegebenes Verhältniß haben. Entlehnt aus der Integralrechnung, wegen des Zuſammenhanges mit der Theorie der Logarithmen, und ihrer Verwandtſchaft mit den gleichartigen Formeln für die zu Kreisbogen gehörigen Linien.

Anm. Die Deduction der logarithmiſchen Functionen durch Hülfe der Analyſis des Unendlichen wird darum nicht zurückgeſetzt, wenn ſie hier der Analyſis der Endlichen zugeeignet werden. Die andere Methode hat auch ihre Vorzüge. Man muß eine Theorie von mehr als einer Seite anſehen, und alle Zugänge zu ihr kennen. Eben dieſes gilt auch von den circularen Functionen.

IX. Circulare Functionen.

1. Formeln für die Sinus und Tangenten zusammengesetzter Winkel aus den Sinus und Tangenten der Theile dieser Winkel. Die Sammlung derselben heiße Goniometrie.
2. Reihen für die Winkel oder Bogen und ihre zugehörigen Linien, und für diese durch jene, was man Cyklometrie nennen mag.
3. Cyklotechnie, d. i. die Methode alle am Kreise vorkommende Größen leicht und mit der überflüssigsten Genauigkeit zu berechnen.
4. Vergleichungen der circularen und hyperbolischen oder logarithmischen Functionen.

Anm. Der Kreis gehört freylich ursprünglich der Geometrie zu, allein durch die analytische Behandlung wird er ein Gemeingut der Geometrie und Analysis. Die zum Kreise gehörigen Formeln und Functionen erfordern, ausser bey der ersten Gründung, gar keine weitere Hülfe der Geometrie, und werden ganz durch analytische Rechnung entwickelt. Man könnte, wenn man von der Differentialgleichung zwischen Sinus und Winkel, als bloße Größen betrachtet, ausgienge, die Geometrie bey den circularen Functionen ganz entbehren. Diese werden oft gebraucht, wo gar nicht von Linien und Winkeln die Rede ist, als allgemeine Größen.

X. Anwendung der circularen Functionen auf die Zerlegung einer Function in dreytheilige mögliche Factoren, wenn sie in zweytheilige einfache und mögliche nicht zerlegt werden kann.

Cotesischer Lehrsatz.

XI. Reihen, zur Fortsetzung des zweyten Abschnitts.

1. Verwandlung der Reihen.
2. Allgemeines Glied einer Reihe, oder das Gesetz derselben.
3. Summirung der Glieder einer Reihe. Bernoullische Zahlen.
4. Umkehrung einer Reihe.

5. Interpolation der Glieder einer Reihe.

XII. **Gleichungen zwiſchen zwey oder mehreren veränderlichen Größen.**

1. Eintheilung in algebraiſche und transſcendente.
2. Eintheilung der algebraiſchen Gleichungen in Ordnungen und Claſſen.
3. Entwickelung des Werthes einer von zwey veränderlichen Größen durch eine Reihe, die nach den Potenzen der andern geordnet iſt.
   Newtons Parallelogramm.

XIII. **Analyſis der krummen Linien**, in welcher alle Sätze aus den Eigenſchaften der Gleichungen mit Zuziehung der analytiſchen Trigonometrie und der Formeln für circulare Functionen hergeleitet werden. Sie iſt zur Verſinnlichung der allgemeinen Theorie in dem vorhergehenden Abſchnitte nothwendig, und verſchafft dem Geiſte eine ſo wohl für die Anwendung nützliche, als auch ohne Rückſicht darauf angenehme Beſchäftigung. Die Behandlungsart ſetzt ſie mit der Analyſis in die engſte Verbindung.

XIV. **Endliche Differenzen-Rechnung.**
Die Vorbereitung zur Differentialrechnung, ſehr wichtig zur genauern Einſicht in die Beſchaffenheit der Functionen.

XV. **Verbindung der Analyſis endlicher Größen mit der Differentialrechnung.**

1. Durch den Taylorſchen Lehrſatz, und einige Anwendungen in der Lehre von den Reihen.
2. Durch den allgemeinen Satz von la Grange, für die Umkehrung und Verwandlung der Functionen, (ſ. la Grange's Satz).
3. Durch die Beſtimmung der größten und kleinſten Werthe einer Function.
4. In der Geometrie der krummen Linien durch Beſtimmung der Berührungslinien, der Normalen und ausgezeichneter Puncte; durch die Formeln für verſchiedene Erzeugungsarten der Linien, als

Evolution, Rotation, Zurückwerfung der aus einem gegebenen Puncte oder auch unter sich parallel an eine Linie gezogenen geraden Linien, Trajection, u. a.

XVI. **Unbestimmte** oder diophanteische **Analytik**, welche man auch als das zweyte Hauptstück der Algebra ansehen mag.

Der zweyte Haupttheil der Analysis, welcher durch die große Allgemeinheit und Fruchtbarkeit der Methoden die Quelle so großer Entdeckungen in der neuern Mathematik geworden ist, ist die **Analysis der unendlichen Größen.** Sie beschäftigt sich mit den Gränzverhältnissen der Unterschiede der veränderlichen Größen in zwey oder mehrern zusammen geordneten Reihen. Sie besteht aus zwey Haupttheilen.

1. Die **Differentialrechnung** sucht die Gränzverhältnisse aus der gegebenen Relation der Größen, (s. Differentialrechnung).

2. Die **Integralrechnung** sucht diese Relation aus den Gränzverhältnissen. Sie ist der bey weitem schwerere, aber auch höchst wichtige Theil, der immerfort noch Erweiterungen erhält, (s. Integralrechnung).

Die Analysis wird durch die Vorschriften zur Auflösung der Gleichungen, durch ihre Methoden zur Umwandlung der Formen und Entwickelung der Größen, durch ihre allgemeinen Sätze über die Relationen der Größen in ihren mannichfaltigen Verbindungen unter einander selbst, und die gegenseitige Abhängigkeit derselben von der Relation der Unterschiede oder Veränderungen, ein vortreffliches Hülfsmittel zur Auflösungs- und Erfindungskunst. Daher hat die neuere Mathematik, sowohl die reine als die angewandte, in einem Zeitraume von weniger als zweyhundert Jahren, besonders in dem letzten Jahrhundert, so große und schnelle Fortschritte gemacht. Wo die schon bekannten Methoden nicht zureichten, gaben sie doch Veranlassung zur Erfindung neuer Wege. Wer aber auch nur die leichtern Methoden zu benutzen zufrieden seyn muß, hat durch die Analysis das Vergnügen manches selbst zu

erfinden, ohne es andern, vielleicht auf eine für ihn nicht bequeme Art, schuldig zu seyn. Man braucht nicht sehr viele Formeln und Methoden im Gedächtnisse zu behalten, um sich gewöhnlich selbst helfen zu können, wohin man immer zu streben hat, um die Analysis sich recht eigen zu machen. Die Kunst, welche zur Erfindung aller analytischen Lehrsätze und Methoden angewandt ist, verdient sehr die Aufmerksamkeit des Philosophen, weil man dadurch von einer besondern Art der Untersuchungskraft belehrt wird, und des Mathematikers insbesondere darum, weil er dadurch diese Kraft mit Überlegung anwenden lernt. Die Bezeichnungsart macht es allein möglich, weitläufige und verwickelte Verhältnisse zu übersehen. Dadurch, daß die verschiedenen Größen durch bestimmte Symbole, und die Arten ihrer arithmetischen Verbindung durch gewisse Zeichen, nach unveränderlichen Vorschriften angedeutet werden, kann man in wenigen Zeilen eine Untersuchung fassen, die in Worten vorgetragen ganze Blätter einnehmen, und in den meisten Fällen sich durchaus gar nicht vortragen lassen würde.

Das wichtigste Werk für die Analysis endlicher Größen ist noch immer Eulers Introductio in Analysin Infinitorum, 2 Tomi. Lausannae 1748, und zu Leiden 1797, 2 Bde. Es enthält in dem ersten Theile zwar kein vollständiges System der eigentlichen Analysis endlicher Größen, aber viele wichtige Capitel derselben. Wegen der Verbindung, worin diese Untersuchungen mit der Analysis der unendlichen Größen stehen, und wegen des Gebrauchs, der hier selbst von der Idee des Unendlichen gemacht wird, hat das Werk den Titel bekommen. Der zweyte Theil enthält eine sehr lichtvolle analytische Theorie der krummen Linien, welche man aus keinem Werke besser als aus diesem erlernen wird, dessen Verfasser immer Tiefsinn mit Deutlichkeit zu vereinigen wußte. Ein zweytes hierher gehöriges Werk von Euler ist seine Differentialrechnung (Institutiones Calculi differentialis, Petrop. 1755), wovon der zweyte und größere Theil die Anwendung der Differentialrechnung auf die Analysis endlicher Größen, beson-

ders auf die Theorie der Reihen, enthält. Dieſes muß man vorzüglich zur Hand nehmen, wenn man tiefer in die Analyſis dringen will. Michelſen hat es ins Deutſche überſetzt. Die genaue Verbindung der Analyſis endlicher Größen mit der Rechnung des Unendlichen kennen zu lernen, dient ein neues ſehr ſcharfſinniges Werk, Théorie des fonctions analytiques par I. L. la Grange, à Paris an V. Es enthält ſchätzbare Anwendungen auf die Geometrie und reine Mathematik. Man muß dazu gute Fertigkeit für allgemeine und ſehr abſtracte Rechnungen mitbringen. Das neueſte Werk über die Analyſis endlicher Größen iſt: Du calcul des Dérivations par L. F. A. Arbogaſt, à Strasbourg, An. VIII. (1800). 404 pag. 4. Die wichtigſten und ſchwerſten Rechnungen werden darin nach einer neuen Methode ausgeführt, die mit der Combinations-Theorie in enger Verbindung ſteht, (ſ. Derivations Rechnung.)

Analyſis, als Methode bey mathematiſchen Unterſuchungen, iſt die Entwickelung des Zuſammenhanges der geſuchten Größen mit den gegebenen, oder der veränderlichen unter einander und mit den unveränderlichen Größen. Zur Auflöſung irgend einer Aufgabe iſt es nothwendig, den Zuſammenhang der dazu gehörigen Größen, auch derer, die nicht unmittelbar gegeben werden, zu erforſchen. Die Erfindung der Lehrſätze beruht eben darauf. Die mathematiſche Analyſis vollſtändig kennen zu lernen, muß man die von den Alten gebrauchte, und die bey den Neuern übliche unterſcheiden. Die **Analyſis der Alten** bezog ſich auf die Geometrie, und bediente ſich alſo bloß geometriſcher Hülfsmittel; die **Analyſis der Neuern** erſtreckt ſich auf alle meßbaren Gegenſtände, und gebraucht die allgemeine Arithmetik, indem ſie den Zuſammenhang der Größen in Gleichungen bringt.

Von der Analyſis der Alten giebt **Pappus** in ſeiner Sammlung geometriſcher Unterſuchungen, in der Vorrede zu dem 7ten Buche einen guten Unterricht. Dieſer Theil ſeines Werks enthält die Hülfsſätze und manche Bey-

ſpiele aus den analytiſchen Schriften der Alten, Lemmata de loco reſoluto, (λεμματα τε 'αναλυομενε τοπε). Erſcheint unter aufgelöſeten Ort die Sammlung von Lehrſätzen, die zur Auflöſung dienlich ſind, zu verſtehen, unter Analyſis aber die Methode. Hier folgen ſeine Worte ſelbſt.

„Was man die Lehre (den Ort) von der Auflöſung nennt, iſt ein Vorrath von Sätzen, der denjenigen zum Gebrauch beſtimmt iſt, welche ſich mit den Anfangsgründen bekannt gemacht haben, und nun die Auflöſung der ihnen vorkommenden Aufgaben ſelbſt zu finden wünſchen. Zu dieſem Zweck allein iſt die Sammlung eingerichtet. Drey Männer haben dazu ihre Beyträge geliefert, Euklides, der Verfaſſer der Elemente, Apollonius von Pergä, und der ältere Ariſtäus. Das dabey gebrauchte Verfahren iſt theils analytiſch, theils ſynthetiſch. Die Analyſis iſt diejenige Methode, da man von dem Geſuchten, als zugeſtanden angenommen, durch die daraus gezogenen Folgerungen auf etwas Gegebenes kommt, welches zu der Syntheſis führt. Bey der Auflöſung nämlich betrachtet man das Geſuchte als gefunden, und forſcht, woraus es zunächſt folget; dann, woraus dieſes ſich ergebe, und ſo immer weiter, bis daß man auf dieſem Rückwege etwas trifft, das gegeben iſt, oder zum Grunde gelegt werden kann. Dieſes Verfahren heißt Analyſis, gleichſam eine umgekehrte Auflöſung. Bey der Syntheſis hingegen macht man mit demjenigen, was bey der Analyſis zuletzt erhalten ward, als etwas gegebenen, den Anfang, und läßt das, was dort folgte, nun vorangehen, in der natürlichen Ordnung nach einander, bis man zu der Darſtellung des Geſuchten gelangt. Dieſes nennt man die Syntheſis. Es iſt aber die Analyſis von gedoppelter Art, die theoretiſche, welche richtige Sätze ſucht, und die problematiſche, welche Aufgaben aufzulöſen bemüht iſt. Nach der theoretiſchen Analyſis ſieht man den Satz den man prüft, als wahr an, und zieht aus dieſer Vorausſetzung Folgerungen, bis daß man auf einen ausgemacht wahren oder falſchen Satz kommt. Iſt das

erſte, ſo iſt auch der Satz, von dem die Frage iſt, wahr, und der Beweis geht den umgekehrten Weg der Analyſis. Iſt der gefundene Schlußſatz falſch, ſo iſt auch der angenommene Satz irrig. Bey der problematiſchen Gattung wird man von dem Geſuchten als bekannt angenommen, durch das, was daraus eins nach dem andern richtig gefolgert wird auf etwas beſtimmtes geführt. Iſt dieſes etwas mögliches, was ſich darſtellen läßt (πορισον), was die Mathematiker ein Datum nennen, ſo iſt die vorgelegte Aufgabe aufzulöſen möglich, und der Beweis nimmt den Weg der Analyſis rückwärts. Kommt man aber auf etwas offenbar unmögliches, ſo iſt auch die Aufgabe unmöglich. Diorismus iſt die Beſtimmung, ob und wie, und auf wie mancherley Art einer Aufgabe Genüge geleiſtet werden mag."

Hierauf macht Pappus die zur Analyſis gehörigen Schriften namhaft. Sie ſind: die Data, die Porismata, und die Schrift von den Örtern an einer Oberfläche, von Euklides, die Schriften des Apollonius de ſectione rationis (eine von Newton ſehr geſchätzte Schrift) de ſectione ſpatii, de ſectione determinata, de tactionibus, de inclinationibus, de locis planis, und von den Kegelſchnitten; die Schrift des Ariſtaeus de locis ſolidis, und des Eratoſthenis de mediis proportionalibus. Aus dieſen Schriften hat Pappus viele Beyſpiele in dem 7ten Buche ſeiner Sammlung angeführt. Sie ſind alle, auſſer die Data des Euklides, die in einer arabiſchen Überſetzung erhaltene Schrift des Apollonius de ſectione rationis, und das Hauptwerk deſſelben von den Kegelſchnitten, verloren gegangen. In dem 17ten Jahrhundert, vor der Anwendung der Analyſis des Unendlichen, wurde die geometriſche Analyſis mit Fleiß bearbeitet, als von Vieta, Fermat, Viviani, Ghetaldi, Snellius, Huygens, Burrow, u. m. Man bemühte ſich die verlornen geometriſchen Schriften der Alten wieder herzuſtellen. Die Engländer lieben die geometriſche Analyſis ſehr, und ſind gegenwärtig die Meiſter in derſelben. Newton, der in ſeinen ſchweren Unterſuchungen über die höhere Mechanik die geometriſche Einkleidung und Syntheſis gebraucht, pflegte die Anwendung der algebraiſchen Rechnung

auf die Geometrie zu tadeln. In dem 18ten Jahrh. haben ſich die Engländer noch häufig mit den verlornen Schriften des Apollonius beſchäftigt. Halley gab die Bücher de ſectione rationis und ſectione ſpatii heraus, Oxford 1706; Robert Simſon, die loca plana, Glasgow 1749 (deutſch von Camerer in Leipzig 1796), Horsley, die Bücher de inclinationibus, Oxford 1770; Lawſon, die Bücher de rectionibus, Lond. 1771. und die de determinata ſectione Lond. 1772; Walis, die letztern gleichfalls, London 1772. Dieſelben ſind von Robert Simſon wieder hergeſtellt und mit zwey Büchern vermehrt, nach deſſen Tode auf Koſten des Grafen Stanhope, nebſt dem Euklidiſchen Werke über die Porismata, und einigen andern von Simſon nachgelaſſenen Schriften, zu Glasgow 1776 herausgekommen. Burrow gab die Bücher de inclinationibus, Lond. 1779 heraus.

Die Erfindung der geometriſchen Analyſis wird von Diogenes Laertius und Proklus (Commentar über das erſte Buch des Euklides) dem Plato zugeſchrieben. Wir haben von dieſem berühmten Philoſophen keine mathematiſche Schrift, daher man ſein Verfahren nicht beſtimmt kennt. Einige merkwürdige Anwendungen der geometriſchen Analyſis finden ſich in dem zweyten Buche von der Kugel und dem Cylinder des Archimedes, beſonders bey der dritten Aufgabe oder 5ten Satze (S. 76 der ſchätzbaren Ausgabe dieſer Archimediſchen Schrift von Hauber, Tübingen 1798). Archimedes vergleicht die Größen mit einander, ohne Unterſchied, ob ſie gegeben oder unbekannt ſind, und kommt durch eine Verbindung von Sätzen, die auf den Eigenſchaften der Kugel und des Kegels beruhen, endlich auf eine Proportion, die in die algebraiſche Sprache überſetzt, unmittelbar eine Gleichung vom dritten Grade geben würde, von welcher die Auflöſung der Aufgabe abhängt. Man ſieht aber auch hier, daß die Analyſis der Alten in jedem Falle eigenthümliche Kunſtgriffe erforderte.

Die theoretiſche Analyſis, deren Pappus erwähnt, wird kaum anders brauchbar ſeyn, als bey der Prüfung eines

Satzes, den ein Schriftsteller aufstellt oder anwendet, ohne ihn zu beweisen. Denn man wird nicht leicht durch Vermuthung auf einen mathematischen Satz gerathen. Man pflegt sich auch dieser Beweisart in mathematischen Schriften nicht zu bedienen, kaum anders als bey der Umkehrung eines erwiesenen Satzes, da man zeigt, daß das Gegentheil des aufgestellten umgekehrten Satzes falsch ist, (s. Beweis). Der Leser würde nicht einsehen, welcher Weg zu dem aufgestellten Satze geführt habe, dagegen man bey einem directen Beweise bemerken kann, welche Sätze zu dem gegenwärtigen geleitet haben. Ein Beyspiel einer theoretischen Analysis findet man in Pappi Coll. math. L. VII. prop. 36, worauf aber in prop. 37. eine synthetische folgt.

Zu der Anwendung der alten Analysis auf geometrische Aufgaben lassen sich keine bestimmten Vorschriften geben; man kann hier keine so unveränderlichen Anweisungen ertheilen, daß dadurch in allen Fällen das Gesuchte gefunden würde. Immer ist eine gewisse Vorbereitung nöthig, die Aufspürung und Einführung der Hülfsgrößen oder Mittelglieder, um die gegebenen Größen mit den gesuchten zu verbinden. Man muß aufmerksam auf dasjenige seyn, was durch das unmittelbar Gegebene bestimmt wird, um dadurch sich den Weg zu dem Gesuchten zu bahnen. Hier bleibt es der Erfindungskraft eines jeden überlassen, wie er sich zu helfen habe, da die Mittel zum Zwecke mancherley sind, so wie die Beschaffenheit der Aufgaben sehr verschieden ist. Übung ist hier hülfreicher als Regeln. Man muß, ehe man die Auflösungen geometrischer Aufgaben von andern lernt, seine Kräfte daran versuchen. Die Sätze der Elementar-Geometrie muß man vollkommen gegenwärtig haben, besonders die Eigenschaften des Kreises, die häufig große Dienste thun. Folgende Bemerkungen werden bey diesem Geschäfte von Nutzen seyn. Sie sind von einem mit dem Verfahren der alten Geometern sehr bekannten Manne, Newton in der Arithm. univ. pag. 87. edit. Lugd.

Man hat oft einige der gegebenen Linien zu verlängern, bis sie andere schneiden, oder von einer bestimmten Länge

wenden. Oder man ziehe von einem ausgezeichneten Puncte Parallelen oder Perpendikel, oder verbinde Puncte durch Linien. Wenn zwey nicht parallele Linien mit einer dritten gegebene Winkel machen, so verlängere man sie bis zu ihrem Durchschnitte, wodurch ein der Art nach gegebenes Dreyeck (specie datum) erhalten wird, worin die Verhältnisse der Seiten gegeben sind. Wenn ein Winkel gegeben wird, oder einem andern gleich ist, so bilde man mit demselben ein Dreyeck, das der Art nach gegeben, oder einem andern ähnlich ist, entweder durch Verlängerung einiger Linien, oder durch eine andere Legung der gegenüber stehenden Seite. Ist das Dreyeck schiefwinklicht, so ist es oft in zwey rechtwinklichte zu zerlegen. Vielseitige Figuren sind durch Diagonalen in Dreyecke zu zertheilen. Überhaupt hat man dahin zu sehen, daß man die ganze Zeichnung in Dreyecke, gegebene, ähnliche oder rechtwinklichte zerlege.

Einige Beyspiele werden zur Erläuterung nöthig seyn.

1. Aufg. Eine gegebene Linie AB Fig. 2. (Tab. I.) *so zu* zutheilen, daß das unter der ganzen und einem der beiden Abschnitte enthaltene Rechteck dem Quadrate des übrigen Abschnittes gleich sey.

Aufl. Es sey P der gesuchte Punct. Über AB und BP beschreibe man die Quadrate ABCD, PBNO, und verlängere OP bis M auf CD, so ist das Rechteck AM = Quadr. PN, oder AP × PM = PBq, daher das Rechteck CO oder CN × NO = BCq, oder eine gegebene Größe. Es werde BC in E halbirt, so ist (Eukl. II. 6) CN × NO + BEq = ENq, das ist ABq + BEq = ENq. Man ziehe AE, so ist AEq = ABq + BEq. Daraus ist AE = EN, also BN der gesuchte Abschnitt BP.

Hieraus wird man leicht die synthetische Auflösung finden, die Euklides in seinen Elementen II. 11. giebt.

2. Aufg. In dem gegebenen Kreisabschnitte APB (Fig. 3. Tab. I.) von den Endpuncten der Chorde AB

[illegible]

... Linie durch ihre beiden andern Durchschnittspuncte mit dem Kreise, der Linie ABC parallel ist. Wie dieses be... funden wird, ist in der ...ten Aufgabe gewiesen. Da... ist der Punct N gegeben, und da B gegeben ist, so ... Linie BP der Lage nach gegeben, also der Pu... in dem gegebenen Kreise, und dadurch auch die ... von AP.

Die Synthesis ist dadurch folgende: Man zieh... B an den gegebenen Kreis die berührende BD, und zu BA und BD die dritte Proportionallinie BQ. ... den Puncten C und Q lege man die Linie CN. QN ... Kreis so, daß die Linie MR durch ihre beiden ... Durchschnittspuncte parallel mit CQ sey, ziehe BN

verlängere ſie bis an den Kreis in P. Zieht man nun AP, ſo geht dieſe durch M. Denn da die Rechtecke oder Producte BP × BN und BA × BQ dem Quadrate von BD gleich ſind, ſo ſind ſie einander gleich, und die Puncte P, N, Q, A, liegen auf dem Umfange eines Kreiſes. In dieſem iſt der Winkel der geraden Linie durch A und P mit PN gleich dem Nebenwinkel von AQN oder dem W. NQB. Es iſt aber auch in dem gegebenen Kreiſe der W. MPN = MRN, und wegen der parallelen MR, CQ, der Winkel MRN = RQB, oder NQB, alſo der W. MPN = NQB. Daher iſt der W. APN = MPN und die Linien AP, MP liegen in derſelben geraden Linie.

Die Aufgabe ſteht in der Sammlung von Pappus L. VII. prop. 117.

Dieſes mag hinreichend ſeyn, einen Begriff von der geometriſchen Analyſis zu geben, wenn gleich die Beyſpiele nur in einzelnen Aufgaben beſtehen konnten, worin der Geiſt der Alten nicht ſo ſichtbar ſeyn kann, als in einem Syſtem von Sätzen. Die arithmetiſche oder algebraiſche *Analyſis* ſucht ebenfalls die Verbindungen der Größen, ohne einen Unterſchied zwiſchen gegebenen und geſuchten zu machen. Sie ſtellt die Art der Verbindung durch eine Gleichung dar. Jede Gleichung iſt als eine Bedingung in Betreff der Verbindung einiger Größen anzuſehen. Giebt es mehrere Bedingungen, ſo wird man dadurch auf eben ſo viele unabhängige Gleichungen geleitet. Dieſe mit einander zu combiniren, daraus neue Gleichungen zu ſchaffen, beſonders zu dem Zwecke, eine der unbekannten Größen allein in eine Gleichung mit den gegebenen Größen zu bringen, und eine Gleichung aufzulöſen, lehrt die Algebra durch Vorſchriften. Die Bedingungen zu erfinden und ſie rechnungsfähig zu machen, erfordert oft Erfindungskraft und Scharfſinn, wenn ſie nicht unmittelbar gegeben werden. Die Lehrſätze für die Verwandlungen der Formen und andere Lehrſätze der Analyſis, beſonders die allgemeinen Formeln der Differential- und Integralrechnung ſind ein reicher Vorrath von Hülfsmitteln,

um sehr verwickelte Relationen zu entdecken und aus einander zu setzen. Die Analysis der Alten hat keine allgemeinen Methoden zur Entdeckung von Lehrsätzen und Auflösung der Aufgaben; sie hat auch wenige und geringe Hülfsmittel: desto sinnreicher mußte sie aber auch in der Anwendung derselben seyn, und in jedem Falle fast ein eigenes Verfahren gebrauchen. Darum ist das Studium der alten Geometrie zur Übung des mathematischen Geistes sehr wichtig. Die Gewandtheit, welche man sich dadurch verschaffen mag, ist Gewinn genug, wenn auch viele Sätze von keinem Nutzen weder in der theoretischen noch angewandten Mathematik seyn werden.

Einer der größten Analysten unserer Zeit sagt von der geometrischen Methode der Alten, die man sehr uneigentlich Synthesis nenne, daß sie in einigen Fällen der algebraischen Analysis vorzuziehen seyn möchte, sowohl wegen ihrer einleuchtenden Darstellungsart, als auch wegen der Eleganz und Leichtigkeit ihrer Auflösungen. Es gebe sogar Fälle, wo die algebraische Analysis gewissermaßen unzureichend, und die geometrische Methode allein anwendbar scheinen möge. Er führt als Beyspiel die Aufgabe an, die Anziehung eines elliptischen Sphäroids auf einen innerhalb desselben oder auf der Oberfläche befindlichen Punct zu bestimmen. Maclaurin hat diese Aufgabe nach einer rein geometrischen Methode aufgelöset, wobey er bloß einige Eigenschaften der Ellipse und der elliptischen Sphäroiden zum Grunde legt. Seine Auflösung (in der Preißschrift über Ebbe und Fluth) ist ein Meisterstück, das man den schönsten Werken des Archimedes zur Seite stellen kann. (La Grange in den Mem. de Berlin 1773, wo er diese Aufgabe rein analytisch auflöset).

Die algebraische Rechnung macht nicht die analytische Methode aus. Man kann auch bey der Anwendung der Rechnung synthetisch verfahren, wenn man bey Lehrsätzen ihren Beweis bloß aus den vorher erwiesenen Sätzen construirt; und bey der Auflösung von Aufgaben, wenn man zeigt, wie man bloß aus gegebenen Größen zu den unbekannten gelangt. Die theoretische Analysis wird man

auch beym Gebrauche der Rechnung nicht zum Vortrage, ſondern nur für ſich anwenden, wenn man unbewieſene Sätze eines andern prüfen will. Zu der Auflöſung von Aufgaben pflegt man ſich faſt immer der Analyſis der Alten zu bedienen, wozu man gewöhnlich dadurch genöthigt wird, weil ſchon in wenig ſchwierigen Fällen das Unbekannte mit dem Bekannten zugleich in Gleichungen und Reihen eingehüllt iſt, oder erſt durch Integrationen gefunden werden muß.

Wenn man ſich die Analyſis der Alten geläufig machen will, ſo ſtudiere man die Anfangs-angeführten Schriften derſelben. Die Sammlung des Pappus, beſonders das 7te Buch, iſt dazu ſehr brauchbar.

Der deutſchen Überſetzung von den Datis des Euklides, nach der Ausgabe durch Robert Simſon, hat der Überſetzer, J. C. Schwab, eine lehrreiche Sammlung geometriſcher, nach der analytiſchen Methode der Alten aufgelöſeten Probleme beygefügt, die zugleich als Beyſpiele der Anwendung von den Datis dienen. Stuttgardt 1780, in 8.

Ein weitſchweifiges Werk über die mathematiſche Analyſis und Syntheſis ſind: Caroli Renaldinii de reſolutione et compoſitione mathematica Libri duo. Patavii 1668. 535 pag. Fol. Es iſt ein reicher Vorrath von Beyſpielen, auch aus der angewandten Mathematik, darin enthalten. Die Data des Euklides ſind darin aufgenommen.

Die Lehre von den geometriſchen Örtern thut große Dienſte bey der geometriſchen Analyſis. Sie ſind das, was die Gleichungen zwiſchen zwey veränderlichen Größen in der Analyſis. So wie in dieſer die Verbindung zweyer ſolcher Gleichungen eine determinirte Aufgabe auflöſet, ſo geſchieht ſolches in der Geometrie durch die Durchſchnittspuncte zweyer Örter.

Analyſis der krummen Linien, ſ. krumme Linien.

Analyſis der Potenzen wird bisweilen das Verfahren genannt, aus einer Zahl, die als Potenz eines gegebenen Grades betrachtet wird, die dazu gehörige Wurzel zu finden, oder ſie auf dieſelbe Art zu zerlegen, wie ſie als Potenz aus den Theilen der Wurzel zuſammengeſetzt wird. Man nennt dies ſonſt auch **Evolution.**

Analyſis Diophantea, ſ. unbeſtimmte Analytik.

Analyſis endlicher Größen, ſ. Analyſis.

Analyſis unendlicher Größen, ſ. Unendlich; Differentialrechnung; Integralrechnung.

Analytik, entweder einerley mit Analyſis, oder der Inbegriff aller Verfahrungsarten bey der Entwickelung der Verbindungen der Größen, der Auflöſung der Aufgaben, Entdeckung neuer Methoden, und Erweiterung der Unterſuchungen in der Mathematik, kurz die **analytiſche Kunſt**. Dieſe läßt ſich nur unvollkommen in Bemerkungen, Maximen oder Vorſchriften faſſen. Man muß ſie durch fleißige und genaue Beobachtung des Verfahrens der Meiſter in der Kunſt ſich erwerben, vorausgeſetzt, daß man mathematiſches Talent beſitze.

Analytiſch, was zur Analyſis gehört, oder wobey die Analyſis gebraucht und angewandt wird, oder was als Hülfsmittel in der Analyſis dient, als analytiſche Gleichung, Formel; analytiſche Auflöſung, Rechnung, Beweisart, Unterſuchung, Methode; analytiſche Geometrie, Trigonometrie, Mechanik, Optik; analytiſches Parallelogramm, Dreyeck; analytiſche Tafeln.

Man ſehe insbeſondere die Artikel: Gleichung, Formel, Methode, Geometrie, Trigonometrie, Newtoniſches Parallelogramm.

Anatomie der Zahlen (anatomia numerorum) iſt eine Tafel, worin alle Factoren der ganzen

heilbaren Zahlen neben denſelben verzeichnet ſind. Eine ſolche hat zuerſt John Pell im 17ten Jahrhundert gelieſert, ſ. Theilbare Zahl.

Angewandte Mathematik ſ. Mathematik.

Anguinea hyperbola iſt ein Name, den Newton einem hyperbelartigen Zweige mehrerer krummen Linien aus der dritten Ordnung der Linien giebt, weil der Zweig mit beiden Schenkeln an derſelben geradlinichten Aſymptote, die er irgendwo ſchneidet, mit entgegengeſetzten Wendungen, der eine Schenkel auf der einen Seite, der andere auf der andern, ſich ins Unendliche hin erſtreckt. Die krumme Linie hat entweder dieſe einzige Aſymptote, oder noch zwey andere. Newton giebt dem hyperboliſchen Zweige auch den angeführten Namen, wenn er zwiſchen zwey parallelen Aſymptoten nach entgegengeſetzten Richtungen hin ſich erſtrecket. Die ſchlangenförmige Hyperbel findet ſich in den Gattungen 9, 26, 27, 33, 34, 35, 36, 52, 58, 59, 61, 62.

Anliegende Theile eines ſphäriſchen rechtwinklichten Drenecks. S. Nepers Regel für ſphäriſche Dreyecke.

Anliegender Winkel, iſt der Winkel, der eine benannte Seite einer Figur zu einem ſeiner Schenkel hat; der auch der neben einem andern Winkel liegt, insbeſondere, wenn beide zuſammen zwey Rechte ausmachen, in welchem Falle ſie am gewöhnlichſten **Nebenwinkel** heißen.

Anmerkung (Scholium) iſt in dem förmlichen Vortrage der Mathematik, wenn jeder Satz mit dem ihm zukommenden Namen, Lehrſatz, Aufgabe, u. ſ. bezeichnet und eine Einſchaltung, worin dasjenige, was Dunkelheit, oder Zweifel, oder Mißverſtand veranlaſſen könnte, gehoben wird worin; man ferner bey wichtigen Sätzen den Gang der Erfindung bemerklich macht, hiſtoriſche Nachrichten von derſelben und der Erfindung mittheilt, andere Beweiſe

und Auflösungen anzeigt, die Anwendung eines E
lehrt, Schriften, die eine weitere Ausführung enth
empfiehlt, Instrumente beschreibt, u. dergl.

Antecedens rationis, das Vorderglied
Verhältnisses, wie 7 in 7 : 5.

Antecedentalis Calculus ist Differential-
Fluxionen-Rechnung auf eine andere als die gewöh
Art aufgestellt, von einem Engländer, James Gl
der sie in einer Schrift beschrieben, betitelt: The
cedental Calculus: or, a geometrical meth
of reasoning, without any consideration of mo
or velocity, applicable to every purpose to w
Fluxions have been, or can be applied, Lon
1793, 16 pag. 4. Die Schrift bezieht sich auf
Abhandlung des Verfassers in den Transactionen
und eine andere lateinische, die 1776 herausgekomme
wie auch auf seine Doctrine of universal Compari
or general Proportion, 1789. worin der Grund
Theorie in jener Schrift gelegt ist. Glenie glaubt, da
wegung, Zeit und Geschwindigkeit Begriffe seyn, die ni
die reine Geometrie und abstracte Theorie gehören. D
will er eine Methode, die allgemeiner als die Fluri
rechnung, und zugleich auch als die Differentialrec
sey, gebrauchen. In der That ist Glenie's Verf
nur eine ganz unwesentliche Veränderung in der Herle
der Differentialrechnung mit einer neuen Benennung
ist folgendes:

Es sey $x : B = A^m : B^m$

und $x + e : B = (A + N)^m : B^m$,

so ist

$$e = \frac{m A^{m-1} N + \frac{m.m-1}{1.2} A^{m-2} N^2 + e}{B^{m-1}}$$

Iſt aber

$$x + e : B = A^m : B^m,$$

und $x : B = (A - N)^m : B^m,$

ſo iſt

$$e = \frac{m A^{m-1} N - \frac{m.m-1}{1.2} A^{m-2} N^2 + \text{etc.}}{B^{m-1}}.$$

Wenn nun die Verhältniſſe $A + N : B$ und $A - N : B$ der Gleichheit näher kommen, als nur jede angebliche Größe eben der Art, ſo wird jeder der beiden Werthe $= \frac{m A^{m-1} N}{A^{m-1}}$. Dieſen Werth nennt Glenie the antecedental der Größe, welche zu B daſſelbe Verhältniß hat, als das Verhältniß m : 1 zu dem Verhältniſſe A : B. Man redet ſonſt nicht von einem Verhältniſſe eines Verhältniſſes zu einem andern. Doch ſieht man wohl, was es hier bedeuten ſoll, nämlich die Vervielfachung eines Verhältniſſes. Die Bezeichnungen ſind in dieſer Vorſtellung etwas geändert, um ſie bequemer zu machen.

Archiv der reinen und angewandten Mathematik, 3tes und 4tes Heft. S. 352 und 481.

Ant-Evoluta einer krummen Linie iſt eine ſolche, die dieſer auf eine entgegengeſetzte Art zugeordnet iſt, als ſie die Evolute iſt. Die Evolute iſt der Ort aller Mittelpuncte der Krümmungskreiſe an einer krummen Linie. Wenn die Krümmungshalbmeſſer über die krumme Linie hinaus verlängert, ſo weit als es die Länge jedes beträgt, ſo liegen die Endpuncte der Verlängerungen auf der Ant-Evoluta. **Jakob Bernoulli** hat dieſe Erzeugung einer krummen Linie erdacht, die aber nur bey der logarithmiſchen Spirale angewandt werden mag, deren Ant-Evolute, ſo wie ihre Evolute, dieſelbe Spiral-Linie iſt. Jac. Bernoulli Opp. T. I. nr. 49. Acta Erud. 1692.

Anthapſologarithmus iſt eine nicht üblich gewordene aus der griechiſchen Sprache genommene, (von

ἀντι und ἀπτειν) Benennung des Logarithmen der Cotangente eines Winkels, in der Trigonometria Sphaericorum logarithmica, adornata a Nicolao Kauffmann Holſato, 1651, in 8. Der Logarithme der Tangente heißt daſelbſt Hapſologarithmus; der Logarithme des Coſinus Antilogarithmus. Der Herausgeber dieſer Tafeln iſt der wegen ſeiner Conſtruction der Seecharten berühmte Mercator.

Anticauſtica einer krummen Linie iſt eine ſolche, die dieſer auf eine entgegengeſetzte Art, als die Cauſtica, zugeordnet iſt. Die von einer krummen Linie nach Art der Lichtſtrahlen zurückgeworfenen Linien berühren die Cauſtica. Verlängert man dieſe über die zurückwerfende Linie hinaus, und nimmt die Verlängerung ſo groß als den zurückgeworfenen Strahle, von dem Zurückwerfungspuncte bis an den Berührungspunct an der Cauſtica, ſo iſt der Endpunct der Verlängerung auf der Anticauſtica. Auch dieſe Entſtehungsart einer krummen Linie aus einer andern hat Jacob Bernoulli erdacht, (a. a. O.). Die Anticauſtica der logarithmiſchen Spiral linie, iſt, ſo wie ihre Cauſtica, ſie ſelbſt.

Antilogarithmus iſt eine von Neper gebrauchte Benennung des Logarithmen eines Coſinus, in Beziehung auf den Logarithmen des zugehörigen Sinus, die darin ihren Grund hat, daß in den Tafeln die Coſinus und ihre Logarithmen den Sinus und deren Logarithmen gegen über ſtehen. Neperi logar. canonis deſcriptio L. I. c. 3. Kepler bedient ſich auch dieſer Benennung. Tabularum Rudolphin. praecepta, Cap. VIII. Sie iſt jetzt nicht üblich.

Wallis verſteht unter Canon Anti-Logarithmicus ſolche logarithmiſche Tafeln, worin die Logarithmen in arithmetiſcher Progreſſion verzeichnet wären, von 0 bis 100, 000, mit Beyfügung der zugehörigen Zahlen, zu dem Ende, daß man daraus eben ſo leicht zu jedem Logarithmen die Zahl finden könnte, als man aus dem gewöhnlichen Canon zu einer Zahl den Logarithmen, und die Proportionaltheile

einſchalten findet. Walliſii Algebra in Opp. p. 63. Er ſcheint ſich nicht beſtimmt genug aus- zu haben, da er die Kennziffern welche die Logā- haben ſollen, nicht feſtſetzt.

dem Dictionnaire encyclopédique wird Antilo- e erklärt als das Complement des Logarithmen ei- ius, einer Tangente oder Secante, das iſt, als erſchied dieſes Logarithmen von dem Logarithmen ius totus. Dieſes hat Hutton nachgeſchrieben.

ntiparallele Linien ſind ein Syſtem von vier convergirenden Linien in einer Ebene; A, B, von welchen A und C ſich unter denſelben Win- keiden, wie B, und D, als in (Fig. 8. Tab. I.) en PA, PB, QC, QD. Hier iſt der W. = QHB, und weil der W. CQD den beiden i EQF, GQH, gemein iſt, auch der W. = QGH. Die äußern Winkel QGH, QHG i innern verwechſelt genommen, nämlich QFE F, gleich. Wären PA, PB parallel, ſo wür- r äußere und innere Winkel auf derſelben er ſchneidenden QC, QD ſich gleich ſeyn. Da- Benennung, antiparallele. Leibnitz hat ſie zuerſt ht. Acta Erud. 1691. p 279.

r Fall iſt häufig, daß zwey Linien von zwey andern hier angegebene Art geſchnitten werden. Es entſte- urch ähnliche Dreyecke, in welchen aber die gleich- i Glieder der Verhältniſſe ihrer Seiten nicht eine Lage haben. Es iſt

$$PE : PG = PH : PF,$$
$$QE : QF = QH : QG.$$

eis, der durch drey der vier Puncte, E, F, G, H, be- n wird, geht auch durch den vierten. Denn an dem haben eben dieſe Proportionen zwiſchen den Seg- zweyer Linien von ihrem Durchſchnittspuncte an nen Statt.

Wenn ein schiefer Kegel durch eine mit der Grundfläche antiparallele Ebene geschnitten wird, so ist der Durchschnitt ein Kreis wie die Grundfläche. Gewöhnlich nennt man einen solchen Schnitt eine sectio subcontraria (Wechselschnitt). Die stereographische Projection beruht darauf.

Antithesis ist Versetzung der Glieder einer Gleichung aus einem Theile derselben in den andern mit verwechselten Vorzeichen. Vieta und nach ihm Harriot gebrauchen dieses nicht mehr übliche Kunstwort.

Anwendung der Analysis auf die Geometrie besteht darin, daß man die geometrischen Größen durch Rechnung, für eine angenommene, oder unbestimmt gelassene Einheit bey jeder Art der Größen, findet.

Die reine Geometrie findet alle Größen durch Constructionen, das ist durch intellectuelle Zeichnung von Linien, deren Durchschnitte die verlangten Größen geben. Ihre Hülfsmittel sind vorzüglich die Lehre von der Gleichheit und Ähnlichkeit der Dreyecke, einige Lehrsätze über die Zusammensetzungen der Seiten, Segmente und anderer Linien in den Dreyecken, und die Eigenschaften der Linien, die anstatt der unbestimmten Gleichungen mit veränderlichen Größen dienen, und die geometrischen Örter heißen. Die Analysis kann alles dieses gebrauchen, und hat noch überdem die Eigenschaften der Gleichungen, die Methoden sie zu verbinden, die Mittel, die unbekannten Größen auszusondern, und mancherley Rechnungsweisen, wodurch das Gesuchte, auch bey sehr verwickelten Relationen, leicht gefunden wird. Die Analysis des Unendlichen macht manche Aufgabe zu einem Spiele, zur Übung für Anfänger, wozu die Alten die ganze Kraft ihres Geistes anwenden mußten. Das Rechnen macht die Auflösung leichter, als wenn man erst suchen muß, welche Hülfslinien zur Verbindung des Bekannten und Unbekannten gezogen werden müssen, und läßt sich oft fast mechanischer Weise ausführen, da man bey der geometrischen Construction immer die

ugen auf die oft ſehr durch einander laufenden Linien
ten muß. Durch die Lehre von den entgegengeſetzten
rößen kann man mehrere Fälle in einer Rechnungsformel
greifen, welche die Geometrie einzeln durchgehen muß.
ur Anwendung in der praktiſchen Geometrie und allenthal-
n, wo geometriſche Größen vorkommen, beſonders in
r Aſtronomie, iſt die Rechnung nothwendig, weil Con-
ructionen nie die erforderliche Schärfe geben, oft höchſt
nſicher ſind, wenn Linien ſich unter ſehr kleinen Winkeln
hneiden, und unausführbar werden, wenn die Durch-
hnittspuncte, welche die geſuchten Größen beſtimmen,
hr weit über die Gränzen des zu einer Zeichnung beſtimm-
n Raums hinausfallen.

Die Anwendungen der Analyſis ſind, 1) die Berech-
ung aller Formeln für die Functionen der Winkel, oder
r trigonometriſchen Linien; 2) in der Trigonometrie, der
benen und ſphäriſchen, wenn darin alles auf Gleichungen
bracht wird, 3) bey der Berechnung der regulären Viel-
cke, ſowohl ebener als ſphäriſcher; 4) auf die Cyklometrie;
5) in der ganzen Theorie der krummen Linien, worin die
Eigenſchaften derſelben aus ihren Gleichungen entwickelt
erden. Die Eintheilung der Linien in Ordnungen,
Claſſen und Geſchlechter gründet ſich allein auf die ana-
ytiſche Betrachtung der Gleichungen. Die Theorie der
rummen Linien bey den Neuern tritt an die Stelle der
eometriſchen Örter der Alten. 6) In der Lehre von den
Projectionen, daher eine analytiſche Perſpectiv entſteht,
elche der zeichnenden oft zu Hülfe kommen muß. Die
tereographiſche Projection verbindet in der Ausübung das
eometriſche und analytiſche Verfahren. 7) Bey vielen ein-
elnen Lehrſätzen und Aufgaben, die durch Hülfe der Al-
ebra mit Vortheil behandelt werden.

Newton hat in der Arithm. univerſali, in dem Ab-
chnitte, wie geometriſche Fragen auf Gleichungen gebracht
erden, ſehr gute Vorſchriften und Bemerkungen zu dieſem
Zwecke vorgetragen. Die allgemeine, auch bey andern ana-
ytiſchen Unterſuchungen zu beobachtende, Vorſchrift iſt,
daß man den Anfang damit mache, zu unterſuchen, wie

die Größen, welche die Aufgabe betrifft, von einander abhangen, ohne darauf zu sehen, ob sie gegeben sind, oder gesucht werden, damit man erfahre, welche unter ihnen diejenigen sind, wodurch die übrigen, mittelst einer fortschreitenden Verknüpfung, gefunden werden können. Unter diesen zur Synthesis schicklichen Größen nehme man diejenigen als bekannt an, von welchen es sich ergiebt, daß man durch sie am leichtesten auf die übrigen kommen möge. Mit diesen macht man den Anfang der Rechnung, und schreitet zu den übrigen Größen fort, so wie es ihre Verbindungen, zufolge der Bedingungen der Frage und anderer Umstände, an die Hand geben, bis man zwey Werthe de selben Größe erhält, es sey nun daß einer dieser Werthe eine in der Aufgabe als gegeben oder gesucht mit einem Buchstaben bezeichnete Größe ist, der andere ein durch die Rechnung gefundener, aus den Größen der Frage zusammengesetzter Werth, oder daß beyde zwey solche, auf verschiedene Art zusammengesetzte Ausdrücke von gleicher Quantität sind. Man muß hiebey wohl in Acht nehmen, welche Verbindungen sich am leichtesten algebraisch ausdrücken lassen, da es nicht selten sich ereignet, daß Größen, welche sich durch die Geometrie leicht aus einander bestimmen, der Algebra schwer fallen.

Bey der Berechnung hat man zuerst darauf zu sehen, wie die Größen aus andern, als aus Theilen, zusammengesetzt werden, oder durch Abziehung einiger Größen von andern entstehen.

Die Proportionalität der Linien ist für die Rechnung ein wichtiges Hülfsmittel, da das vierte Glied einer Proportion durch die drey andern gegeben wird, und da das Product der beiden äußern Glieder dem Producte der beiden mittlern gleich ist. Darum muß man die Sätze, aus welchen gleiche Winkel, für ähnliche Dreyecke, sich ergeben (1. und 3. Buch des Euklides), wohl gegenwärtig haben.

Zur Ausführung der Rechnung dient oft, daß Quadrate von Linien addirt werden, oder eins von einem andern subtrahirt wird. Dazu muß man sich rechtwinklichte Drey-

ecke durch Perpendikel verschaffen. Hierher gehören auch die Sätze 4 bis 10 im 2ten Buche Euklids. Die beiden Sätze 12 und 13 daselbst sind oft zu Vergleichungen dienlich. Auch sind folgende Sätze brauchbar: Wenn der Scheitelwinkel eines Dreyecks halbirt wird, so sind die Segmente der Grundlinie in dem Verhältnisse der Seiten (Eukl. VI. 3.); und das Rechteck der Seiten ist gleich der Summe von dem Rechteck der Segmente und dem Quadrat der den Winkel halbirenden Linie, (s. Dreyeck.) Auch ist in einem Dreyeck das Rechteck zweyer Seiten so groß, als das Rechteck von dem Perpendikel auf die dritte Seite und dem Durchmesser des umschriebenen Kreises. Wo Figuren in einem Kreise eingeschrieben vorkommen, ist der Satz brauchbar, daß das Rechteck der Diagonalen einer eingeschriebenen vierseitigen Figur gleich ist der Summe der beiden Rechtecke aus den einander gegen über liegenden Seiten.

Um diese Sätze anzuwenden, sind oft noch Hülfszeichnungen zu machen, wodurch die Größen mit einander verbunden werden. Die Bemerkungen, welche Newton wegen dieses Geschäftes macht, sind schon in dem Artikel Analysis, als Methode, angeführt.

Die Absicht bey der Anwendung der Analysis auf die Geometrie ist oft, daß man in schwerern Fällen durch die Rechnung auf eine geometrische Construction zu kommen sucht, wie es Newton in seinen Principien gemacht hat, worin die Sätze und Auflösungen durch Rechnung gefunden zu seyn scheinen, aber darauf durch die Geometrie allein bewiesen und ausgeführt sind.

Die Beyspiele, welche nun folgen, sind Aufgaben, welche größtentheils mit andern Fragen und Sätzen nicht in Verbindung stehen, und hauptsächlich nur zur Übung in der Auflösungskunst dienen. Die wichtigen Anwendungen der allgemeinen Rechnung kommen in den Artikeln vor, welche die Materien, wo sie gebraucht wird, enthalten.

1. Aufg. Eine gerade Linie AB in P so zu theilen, daß $BP^2 = AB \times AP$ sey.

Diese Aufgabe ist in dem Artikel, Analysis als Methode, geometrisch aufgelöset. Die algebraische ist folgende. Man setze, (Fig. 2. Tab. I.) AB = a; BP = x, so ist AP = a — x. Es ist besser BP durch x zu bezeichnen, als AP, damit man nicht nöthig habe, das Quadrat einer zweytheiligen Größe zu machen. Der Forderung gemäß ist $x^2 = a(a - x)$, also $x^2 + ax = aa$. Die Algebra giebt die Auflösung dieser Gleichung, nämlich $x = \sqrt{(aa + \frac{1}{4}aa)} - \frac{1}{2}a$, (s. Gleichung II.). Daraus ergiebt sich sogleich die geometrische Construction. Zur Berechnung ist $x = \frac{1}{2}a(\sqrt{5} - 1)$. Dieser Werth ist auch $x = 2a \sin 18°$ (s. Geometrie IX.)

Die Algebra giebt für x noch einen Werth, und zwar einen negativen $x = -\frac{1}{2}a\sqrt{5} - \frac{1}{2}a$, der hier nicht brauchbar ist, aber für eine andere Aufgabe, der Quantität nach, gehört. Diese ist folgende:

A B P

Zu einer Linie AB eine BP zu setzen, daß $BP^2 = AB \times AP$ sey. Setzt man wiederum AB = a; BP = x, so ist $x^2 = a(a \times x)$ und $x^2 - ax = aa$, woraus sich ergiebt $x = \sqrt{(aa + \frac{1}{4}a^2)} + \frac{1}{2}a$, oder $x = \frac{1}{2}a(\sqrt{5} + 1) = 2a \sin 54°$. Dieser Werth ist die negative Wurzel in dem ersten Falle, entgegengesetzt genommen. Die Algebra begreift Addiren und Subtrahiren in eine Rechnung, daher ihre mehrfache Antwort auf eine Frage. Die Geometrie sondert die Fragen von einander, welche verschiedene Fälle in Absicht aufs Addiren und Subtrahiren enthalten.

2. Aufg. Es ist gegeben ein Halbkreis AEB (Fig. 9. Tab. I.) man soll an die berührende BD von A aus eine Linie AD ziehen, von welcher das Stück DE zwischen der berührenden und dem Kreise einer gegebenen Linie BF gleich sey.

Zwey geometrische Sätze verhelfen zu einer Gleichung. Erstlich ist $AD^2 = AB^2 + BD^2$; zweytens ist $DA \times DE = DB^2$. (Eucl. III. 36.) Man setze AB = a;

F = DE = b; DA = x, ſo iſt $DB^2 = x^2 - a^2$, ıd $DB^2 = bx$, alſo $x^2 - a^2 = bx$, und $x^2 - bx = a^2$. Daraus iſt $x = \frac{1}{2}b + \sqrt{(a^2 + \frac{1}{4}b^2)}$. ieraus ergiebt ſich folgende Conſtruction. Man halbire F in C, ziehe ACG, auf welcher man CG = CB nehı, beſchreibe mit AG um A als Mittelpunct einen Kreis, lcher BD in D ſchneide, ziehe AD, die den Kreis in E ffe, ſo iſt geſchehen, was verlangt ward.

Geometriſche Auflöſ. Es ſey geſchehen, was verlangt ird. Man ziehe BE, ſo iſt wegen des rechten Winkels das Dreyeck AEB ähnlich dem ABD, und es iſt AE : AB : AB : AD; daher $AE \times AD = ABq$. Man beſchreibe er BF als Durchmeſſer den Kreis BGFH, und ziehe ırch den Mittelpunct C die AC, welche den Kreis in G ıd H ſchneide, ſo iſt $AH \times AG = ABq$. Folglich $E \times AD = AH \times AG$. Macht man nun AD = AG, iſt AE = AH, und ED = HG = der gegebeam BF.

3. Aufg. Das Dreyeck ABC (Fig. 10. Tab. I.) ms der Seite BA, dem Verhältniſſe der Seiten C : BC, und dem Winkel C zu beſtimmen.

Dieſes iſt die 2te Aufgabe in dem Artikel, nalyſis als Methode; denn der gegebene Kreisſchnitt beſtimmt den Winkel, welcher AB gegen er liegt. Es ſey AB = a; AC : BC = m : n, und C = x, ſo iſt $BC = \frac{n}{m}x$. Nun iſt (ſ. Trigonomeiſche Formeln) $a^2 = x^2 + \frac{nn}{mm}x^2 - \frac{2n}{m}x^2 \cos C$,

ſo $x^2 = \frac{mm\,aa}{mm + nn - 2mn\cos C}$. Die Quawurzel aus dieſer Größe iſt der Werth von x, der hier ızig und poſitiv iſt.

4. Aufg. In dem Halbkreiſe ACDB (Fig. 11. ab. I.) ſind drey an einanderſtoßende Chorden eingeıhrieben, man ſoll die Gleichung zwiſchen denſelben und m Durchmeſſer finden.

Diese Aufgabe gebraucht Newton, um daran zu zeigen, wie man auf mancherley Arten zu einer Gleichung zwischen den gegebenen und gesuchten Größen gelangen könne. Das leichteste Verfahren ist, daß man die Diagonalen AD, BC ziehe, so hat man, zufolge der Anfangs angeführten Eigenschaft des Kreises der Gleichung

$$AB \times CD + AC \times BD = AD \times BC.$$

Ferner ist wegen der rechten Winkel ACB, ADB, sowohl $AB^2 = AC^2 + BC^2$, als auch $AB^2 = AD^2 + BD^2$. Es sey AB die gesuchte Größe, so würde man von den gegebenen nicht auf sie directe kommen können. Behandelt man aber den Durchmesser als gegeben, so wird man eine Gleichung für denselben aus den drey gefundenen herleiten können. Es sey $AC = a : CD = b$; $DB = c$, und $AB = x$; so ist $BC = \sqrt{(x^2 - a^2)}$; $AD = \sqrt{(x^2 - c^2)}$, also ist

$$bx + ac = \sqrt{(x^2 - a^2)}.\sqrt{(x^2 - c^2)}$$

und quadrirt

$$b^2x^2 + 2abcx + a^2c^2 = (x^2 - a^2)(x^2 - c^2),$$

das ist

$$x^3 - (a^2 + b^2 + c^2)x = 2abc.$$

Aus dieser Gleichung wird der Durchmesser gefunden, wenn die drey Chorden gegeben werden, und eine der Chorden durch die beiden andern mit dem Durchmesser. Die cubische Gleichung für den Durchmesser hat, wegen der Vorzeichen, wenn alle drey Wurzeln möglich sind, zwey negative Wurzeln, (s. Gleichung III. 9). Ein negativer Werth des Durchmessers hat keine Statt, und die negativen Wurzeln dienen nur die Gleichung für x rational zu machen. Drey gegebene Chorden können nur einen Halbkreis bespannen. Daher nur eine einzige positive Wurzel der Gleichung. Eben so erhält eine Chorde in der quadratischen Gleichung, wodurch sie gefunden wird, zwar einen positiven und einen negativen Werth, letzterer aber kann hier nicht gebraucht werden.

Den Durchmesser aus den Chorden durch eine geometrische Construction zu finden, wird in dem Artikel von der Anwendung der Geometrie auf die Algebra gezeigt.

5. Aufg. Zwey Linien AB, AC (Fig. 4. Tab. I.) ſind der Lage nach gegeben, nebſt dem Puncte D innerhalb des ſpitzen W. BAC; es ſoll ein Kreis beſchrieben werden, der durch D geht, und die beiden Linien berührt.

In dem Dreyecke APD iſt gegeben der W. PAD, die Seite AD, und das Verhältniß der Seiten AP : PD = m : n, (ſ. Analyſis als Methode, 3. Aufg.). Nun iſt (ſ. Trigonom. Formeln)

$DP^2 = AD^2 + AP^2 - 2AD.AP.\cos DAP$,

oder, wenn $AD = a$; $AP = x$, und $DAP = \alpha$ geſetzt wird, da $DP = \frac{nx}{m}$ iſt,

$$\frac{m^2 - n^2}{m^2} x^2 - 2ax\cos\alpha + a^2 = 0.$$

Dieſe Gleichung giebt zwey poſitive Werthe für x, wie die Conſtruction a. a. O. Die Wurzeln der Gleichung ſind möglich, wenn $\cos\alpha^2 > \frac{m^2 - n^2}{m^2}$, oder

$\cos\alpha^2 > \cos PAM^2$, welches Statt hat, wenn PAD kleiner iſt, als PAB. Es iſt $\frac{n}{m} = \sin MAP$, da PM = PD iſt, alſo $\frac{m^2 - n^2}{m^2} = \cos PAM^2$.

Setzt man A für MAP, ſo iſt die Gleichung,

$$\cos A^2 . x^2 - 2a\cos\alpha . x + a^2 = 0.$$

6. Aufg. Zwey gerade Linien Bb, Cc, (Fig. 12. Tab. I.) die ſich in A ſchneiden, ſind der Lage nach gegeben; auf Bb wird ein Punct D, auf Cc ein Punct E genommen, und innerhalb des Winkels BAC wird ein Punct F gegeben; es ſoll durch F eine Linie MN an die beiden Linien Bb, Cc gezogen werden, welche darauf die Stücke DM, EN abſchneidet, deren Verhältniß einem gegebenen, der Linien, P, Q, gleich iſt.

Man ziehe FG parallel mit AC, und HF parallel mit AB, ſo iſt AN : AM = GF : GM. Hier ſind

Diese Aufgabe gebraucht Newton, um daran zu zeigen, wie man auf mancherley Arten zu einer Gleichung zwischen den gegebenen und gesuchten Größen gelangen könne. Das leichteste Verfahren ist, daß man die Diagonalen AD, BC ziehe, so hat man, zufolge der Anfangs angeführten Eigenschaft des Kreises der Gleichung

$$AB \times CD + AC \times BD = AD \times BC.$$

Ferner ist wegen der rechten Winkel ACB, ADB, sowohl $AB^2 = AC^2 + BC^2$, als auch $AB^2 = AD^2 + BD^2$. Es sey AB die gesuchte Größe, so würde man von den gegebenen nicht auf sie directe kommen können. Behandelt man aber den Durchmesser als gegeben, so wird man eine Gleichung für denselben aus den drey gefundenen herleiten können. Es sey $AC = a : CD = b$; $DB = c$, und $AB = x$; so ist $BC = \sqrt{(x^2 - a^2)}$; $AD = \sqrt{(x^2 - c^2)}$, also ist

$$bx + ac = \sqrt{(x^2 - a^2)} \cdot \sqrt{(x^2 - c^2)}$$

und quadrirt

$$b^2x^2 + 2abcx + a^2c^2 = (x^2 - a^2)(x^2 - c^2),$$

das ist

$$x^3 - (a^2 + b^2 + c^2)x = 2abc.$$

Aus dieser Gleichung wird der Durchmesser gefunden, wenn die drey Chorden gegeben werden, und eine der Chorden durch die beiden andern mit dem Durchmesser. Die cubische Gleichung für den Durchmesser hat, wegen der Vorzeichen, wenn alle drey Wurzeln möglich sind, zwey negative Wurzeln, (s. Gleichung III. 9). Ein negativer Werth des Durchmessers hat keine Statt, und die negativen Wurzeln dienen nur die Gleichung für x rational zu machen. Drey gegebene Chorden können nur einen Halbkreis bespannen. Daher nur eine einzige positive Wurzel der Gleichung. Eben so erhält eine Chorde in der quadratischen Gleichung, wodurch sie gefunden wird, zwar einen positiven und einen negativen Werth, letzterer aber kann hier nicht gebraucht werden.

Den Durchmesser aus den Chorden durch eine geometrische Construction zu finden, wird in dem Artikel von der Anwendung der Geometrie auf die Algebra gezeigt.

5. Aufg. Zwey Linien AB, AC (Fig. 4. Tab. I.) ind der Lage nach gegeben, nebſt dem Puncte D innerhalb s ſpitzen W. BAC; es ſoll ein Kreis beſchrieben werden, r durch D geht, und die beiden Linien berührt.

In dem Dreyecke APD iſt gegeben der W. PAD, e Seite AD, und das Verhältniß der Seiten AP : PD = m : n, (ſ. Analyſis als Methode, 3. Aufg.). Nun (ſ. Trigonom. Formeln)

$DP^2 = AD^2 + AP^2 - 2AD.AP.\cos DAP$,

er, wenn $AD = a$; $AP = x$, und $DAP = \alpha$ ge-

ſetzt wird, da $DP = \frac{nx}{m}$ iſt,

$$\frac{m^2 - n^2}{m^2} x^2 - 2ax\cos\alpha + a^2 = 0.$$

Dieſe Gleichung giebt zwey poſitive Werthe für x, wie ie Conſtruction a. a. O. Die Wurzeln der Gleichung ſind möglich, wenn $\cos\alpha^2 > \frac{m^2 - n^2}{m^2}$, oder

$\cos\alpha^2 > \cos PAM^2$, welches Statt hat, wenn PAD kleiner iſt, als PAB. Es iſt $\frac{n}{m} = \sin MAP$, da

$PM = PD$ iſt, alſo $\frac{m^2 - n^2}{m^2} = \cos PAM^2$.

Setzt man A für MAP, ſo iſt die Gleichung,

$$\cos A^2 . x^2 - 2a\cos\alpha . x + a^2 = 0.$$

6. Aufg. Zwey gerade Linien Bb, Cc, (Fig. 12. Tab. I.) die ſich in A ſchneiden, ſind der Lage nach gegeben; auf Bb wird ein Punct D, auf Cc ein Punct E genommen, und innerhalb des Winkels BAC wird ein Punct F gegeben; es ſoll durch F eine Linie MN an die beiden Linien Bb, Cc gezogen werden, welche darauf die Stücke DM, EN abſchneidet, deren Verhältniß ei-ner gegebenen, der Linien, P, Q, gleich iſt.

Man ziehe FG parallel mit AC, und HF parallel mit AB, ſo iſt AN : AM = GF : GM. Hier ſind

GF = AH, und HF = AG gegeben; und es
AN = EN — EA; AM = DM — D
GM = DM — DA — AG, alles für den Fall
Figur. Man ſetze DA = a; EA = b; AG =
AH = d; DM = x; EN = y, und x : y = r :
ſo daß y = mx. Nun iſt

$$y - b : x - a = d : x - a - c,$$

woraus die Gleichung folgt,

$$mx^2 - (m(a+c) + b + d)x + b(a+c) + ad =$$

Dieſe Gleichung mag entweder durch Rechnung od
durch eine Conſtruction aufgelöſet werden. Für den F
der Figur ſind entweder zwey poſitive Werthe von x od
gar keine möglich.

Der in der Zeichnung angenommene Fall iſt der No
malfall, mit welchem alle übrigen Fälle in Abſicht auf
Lage der Linien zu vergleichen ſind. Diejenigen Linie
die in einem andern Falle eine entgegengeſetzte Lage in B
ziehung auf die ihr gleichnamigen in dem Normalfalle h
ben, ſind negativ, und ändern ihr Vorzeichen, wenn ih
Symbole bloß die Quantität anzeigen. Wenn alſo
und E auf der andern Seite von A liegen, als in der Figu
ſo ſind a und b negativ. Die Lage von AG und AH kan
man immer als poſitiv anſehen, weil man dem Winke
in welchem ſich der gegebene Punct befindet, immer d
Lage, welche er in dem Normalfalle hat, geben kan
Wenn DM nach der Richtung von AG, und DN na
der Richtung von AH genommen werden, ſo ſind ſie p
ſitiv, in dem entgegengeſetzten Falle negativ. Iſt eine de
ſelben poſitiv, die andere negativ, ſoiſt m negativ.

Dieſe Aufgabe iſt von Apollonius ſehr umſtändli
behandelt worden, in einer Schrift de ſectione rationi
(περι λογου αποτομης), welche Halley aus einer arabiſche
Überſetzung lateiniſch herausgegeben hat, Oxford 1706.
Es werden darin alle Fälle vorgenommen, daher d
Schrift 138 Seiten ſtark iſt.

7. Aufg. Zwey gerade Linien Bb, Cc, (Fig. 1
Tab. I.), die ſich in A ſchneiden, ſind der Lage na

geben, und innerhalb des Winkels BAC ein Punct D; rch dieſen ſoll an die beiden Schenkel des Winkels eine nie MN gelegt werden, welche darauf die Stücke AM, N abſchneide, ıdie ein Rechteck von einem gegebenen halte einſchließen.

Man ziehe durch D mit AC die parallele DE an AB, ıd mit AB die parallele DF. Das gegebene Rechteck ıbe die Seiten P, Q. Nun ſuche man zu der Linie AF ıd den Linien P, Q, die vierte Proportionallinie AG, ı iſt $AF \times AG = P \times Q$. Es iſt aber auch $M \times AN = P \times Q$, alſo iſt $AF \times AG = AM \times AN$. erner iſt $AM : AN = FD : FN$, ſo daß $AM \times FN = FD \times AN$ iſt. Man ſetze $AE = a$; $AF = b$; $G = c$; $AM = x$; $AN = y$, ſo iſt erſtlich $bc = xy$; weytens $x(y - b) = ay$, oder $xy - bx = ay$; der $bc - bx = ay$. Dieſe Gleichung multiplicire man mit x, ſetze für xy ſeinen Werth, dividire alle Glieder durch b, und bringe ſie zuſammen auf eine Seite, ſo erhält man die Gleichung

$$x^2 - cx + ac = 0.$$

Die beiden Wurzeln dieſer Gleichung ſind die beiden Werthe von AM, durch welche der Aufgabe Genüge geleiſtet wird. Soll ſie möglich ſeyn, ſo muß $\frac{1}{4}c^2$ größer als ac, oder c größer als 4a ſeyn, (ſ. Gleichung II. 4.).

Nimmt man AM auf dem Schenkel Ab des Nebenwinkels, ſo erhält man die Gleichung $x^2 - cx - ac = 0$; und nimmt man AN auf dem Schenkel Ac des andern Nebenwinkels, ſo erhält man die Gleichung $x^2 + cx - ac = 0$. Die Wurzeln beider Gleichungen ſind der Quantität nach dieſelben, aber ſich entgegengeſetzt. Daher bedeutet die negative Wurzel der einen die poſitive Wurzel der andern, und die Algebra giebt mit der Auflöſung für den Fall, da die Linie MN innerhalb des Winkels Cab gelegt wird, auch die Auflöſung für den Fall, da MN innerhalb des W. BAc gelegt wird.

Man kann die Aufgabe allgemeiner nach Art der 6ten löſen. Wenn nämlich auf Bb ein Punct H, und

schicklich, weil eine so gut als die andere genommen werden kann, und weil sie mit dem gegebenen Halbmesser des Kreises nicht in Verbindung stehen. Man nehme CQ von C bis an MN auf der senkrechten CD für die unbekannte Größe, welche durch eine Gleichung gefunden werden soll. Man ziehe MR, NS senkrecht auf AB. Durch MC und CQ sind MQ = QN gegeben, das ist RD = DS; dadurch AR und BS; dadurch und durch MR = NS, sind AM, BN gegeben, deren Verhältniß bekannt ist.

Es sey CM = a; CD = b; AD = c; BD = d; AE = e; BF = f; CQ = x. Es ist nun

$MQ = \sqrt{(a^2 - x^2)}$; $AR = c - \sqrt{(a^2 - x^2)}$; $MR = b - x$; $BS = d - \sqrt{(a^2 - x^2)}$. Also ist

$AM^2 = a^2 + b^2 + c^2 - 2bx - 2c\sqrt{(a^2 - x^2)}$,

$BN^2 = a^2 + b^2 + d^2 - 2bx - 2d\sqrt{(a^2 - x^2)}$.

Wenn man noch die (in der Figur nicht ausgezogenen) Linien AC, EC, zieht, so ist $AD^2 + DC^2 = AC^2 = AE^2 + CE^2$, also ist

$b^2 + c^2 = e^2 + a^2$; und eben so $b^2 + d^2 = f^2 + a^2$

Daher ist

$AM^2 = e^2 + 2a^2 - 2bx - 2c\sqrt{(a^2 - x^2)}$;

$BN^2 = f^2 + 2a^2 - 2bx - 2d\sqrt{(a^2 - x^2)}$.

Zufolge der anfangs gefundenen Proportion ist nun

$$e^2(f^2 + 2a^2 - 2bx - 2d\sqrt{(a^2 - x^2)}) = f^2(e^2 + 2a^2 - 2bx - 2c\sqrt{(a^2 - x^2)}),$$

oder

$$e^2(a^2 - bx - d\sqrt{(a^2 - x^2)}) = f^2(a^2 - bx - c\sqrt{(a^2 - x^2)}).$$

oder

$$(e^2 - f^2)(a^2 - bx) = (e^2 d - f^2 c)\sqrt{(a^2 - x^2)}.$$

Man setze $\frac{e^2 d - f^2 c}{e^2 - f^2} = g$, so ist

$$a^2 - bx = g\sqrt{(a^2 - x^2)},$$

also durch Quadrirung und Reduction

$DN = \frac{a(x+b)}{x+b}$, und die erſtere Gleichung iſt

$$(x+b)^2 = a^2 + \frac{a^2(x+b)^2}{(x-b)^2},$$

oder $(x^2-b^2)^2 = 2a^2x^2 + 2a^2b^2$,

das iſt $x^4 - 2(a^2+b^2)x^2 + b^4 - 2a^2b^2 = 0$.

Dieſe biquadratiſche Gleichung iſt eine quadratiſche für x. Es iſt

$$x^2 = a^2 + b^2 \pm a\sqrt{(a^2+4b^2)}.$$

Demnach hat x vier Werthe, von welchen zwey und zwey ſich gleich und entgegengeſetzt ſind. Es kann nämlich die Linie MN auf viererley Art gelegt werden, erſtlich in dem W. BCN, zweytens in dem Scheitelwinkel DCE, ganz auf dieſelbe Art wie in dem W. BCN, drittens in dem Winkel DCB, nämlich die Linie $nm = NM$, deren Hälfte $mr = nr$ iſt, wo aber Ar der Werth des andern Paars der Wurzeln iſt; viertens in demſelben Winkel bey Vertauſchung der Schenkel Cm, Cn. Die Doppelheit der Lage derſelben Linie wird in der Algebra durch die Doppelheit des Vorzeichens angedeutet. Die Wurzeln für die Lage innerhalb der Winkel BCN und DCE ſind immer möglich, es mag b für einen Werth haben, welcher es auch ſey. Allein innerhalb des W. DCB iſt der kleinſte Werth von nm derjenige, der in einem gleichſchenklichten Dreyecke nCm iſt. In dieſem iſt $b^2 = 2a^2$. Kleiner darf b^2 nicht ſeyn. Daſſelbe beſagt der Werth von x^2 mit dem untern Vorzeichen der Wurzelgröße. Dieſer muß poſitiv ſeyn, wenn x möglich iſt. Alſo iſt $a^2 + b^2 > a\sqrt{(a^2+4b^2)}$, oder $a^4 + 2a^2b^2 + b^4 > a^4 + 4a^2b^2$, das iſt $b^4 > 2a^2b^2$, und $b^2 > 2a^2$.

Hieraus ergiebt ſich die in dem Artikel, Analyſis als Methode, 4. Aufgabe gefundene Conſtruction der Aufgabe. In dem gefundenen Werthe von x^2 ſetze man b^2 auf die andere Seite des Gleichheitszeichens, ſo iſt

$$x^2 - b^2 = a^2 + a\sqrt{(a^2+4b^2)}$$

oder $(x-b)(x+b) = a(a+\sqrt{(a^2+4b^2)})$ für den Fall der Fig. 5. Hieraus entsteht die Proportion

$$a : x-b = x+b : a+\sqrt{(a^2+4b^2)}.$$

Man ziehe NQ senkrecht auf AN in Fig. 5, welche die verlängerte AB in Q schneide, so ist, wegen der ähnlichen Dreyecke ABM, ANQ,

$$AB : AM = AN : AQ.$$

Also ist $AQ = a+\sqrt{(a^2+4b^2)}$. Nimmt man nun $BQ = \sqrt{(a^2+4b^2)}$, und beschreibt über AQ einen Halbkreis, so liegt der Endpunct N von der einen der gesuchten Linien auf dem Umfange des Halbkreises. Er liegt aber auch auf dem Schenkel CN oder DC des rechten W. BCN oder BCD, also in dem Durchschnitte desselben mit dem Halbkreise. Die Lage der gesuchten Linie in dem Winkel DCB wird auf ähnliche Art durch eine Construction gefunden. Für diese Lage ist

$$b^2 - x^2 = a\sqrt{(a^2+4b^2)} - a^2,$$

und $a : b-x = b+x : \sqrt{(a^2+4b^2)} - a$.

Eine ähnliche Auflösung und Construction findet auch Statt, wenn anstatt des Quadrats ein Rhombus genommen wird. Um ein Beyspiel zu geben, wie das Verfahren für einen besondern Fall allgemeiner gemacht werden mag, folgt die Auflösung für diesen Fall mit einiger Abänderung des Verfahrens.

9. Aufg. Aus dem Winkelpuncte A eines Rhombus ABCD (Fig. 15. Tab. I.) innerhalb des äußern Winkels BCN eine Linie AN zu legen, auf welcher durch die Schenkel desselben das Stück MN von einer gegebenen Länge abgeschnitten wird.

Man mache den W. $ANQ = ABC$, und verlängere AB bis an NQ, so ist das ΔABM ähnlich dem ΔANA. Noch mache man den W. $PNQ = BAM$, so ist das ΔABM ähnlich dem ΔPNQ. Wegen der gleichen Winkel ABC, QPN sind auch CBP und NPB gleich, und daher sind in dem Vierecke BCNP, mit zwey parallelen Seiten die beiden andern BC, PN sich gleich; daher

Die Gleichung für den ersten Fall,

$$x^3 - (a + 2b)x^2 - b^2x + ab^2 = 0.$$

hat, zufolge der Verbindungen der Vorzeichen, zwey positive Wurzeln und eine negative. Jene beiden gehören für die erste und zweyte Aufgabe; die negative als positiv betrachtet ist der Werth des Perpendikels DC in der dritten Aufgabe. Die Algebra begreift die Auflösungen dreyer Aufgaben in eine einzige Formel. Zwey Fälle werden zugleich unmöglich.

Eine andere Auflösung.

Man suche das Verhältniß AD : CD, als woraus sich auch das von DB : BC ergiebt, und woraus ferner die Größen selbst, vermittelst ihres Verhältnisses zu den Summen, gefunden werden. Da es hier bloß auf die Verhältnisse ankommt, so lasse man ACB ein dem gesuchten Dreyeck ähnliches seyn, in welchem AD = 1 ist, und DC = t. Nun ist $AC^2 = 1 + t^2$; $DB = t^2$; $BC = t\sqrt{(1 + t^2)}$, weil AD : CD = AC : BC ist. Zufolge der Bedingung in der Aufgabe ist

$$1 + t : t^2 + t\sqrt{(1 + t^2)} = a : b,$$

woraus ist

$$b(1 + t) = at(t + \sqrt{(1 + t^2)}).$$

Hieraus ergiebt sich

$$2abt^3 + (a^2 + 2ab - b^2)t^2 - 2b^2t - b^2 = 0.$$

Diese Gleichung hat zufolge der Vorzeichen ihrer Glieder nur eine positive Wurzel. Die negativen Wurzeln sind die entgegengesetzten der positiven Wurzeln in der Gleichung

$$2abt^3 - (a^2 + 2ab - b^2)t^2 - 2b^2t + b^2 = 0,$$

auf welche man geräth, wenn DA − DC = a und $BC \pm BD = b$ gesetzt wird.

Man kann vielerley Aufgaben über Dreyecke vorlegen, wenn man aus den Seiten, Winkeln, Perpendikeln und Segmenten der Grundlinie und gewisser Verbindungen

10. Aufg. Innerhalb des Winkels ECF (Fig. 16. Tab. I.) durch den gegebenen Punct A eine Linie MN von gegebener Länge zu legen.

Diese Aufgabe begreift beide vorhergehende in sich. Man ziehe durch A die Linie AB parallel mit CF, und AD parallel mit CE, so ist BM : BA = CM : CN, und $MN^2 = CM^2 + CN^2 - 2CM \times CN. \cos ECF$. Man setze AB = a; AD = b; MN = c; CM = x, so ist $CN = \frac{ax}{x-b}$;

und $c^2 = x^2 + \frac{a^2x^2}{(x-b)^2} - \frac{2ax^2}{x-b} \cos C$.

Diese Gleichung gehörig reducirt, ist

$$x^4 - 2(a\cos C + b)x^3 + (a^2 + b^2 + 2ab\cos C - c^2)x^2 + 2bc^2x - b^2c^2 = 0.$$

Man ziehe die Diagonale AC, so ist $AC^2 = a^2 + b^2 + 2ab\cos C$. Es sey AC = d, so ist die Gleichung diese,

$$x^4 - 2(a\cos C + b)x^3 + (d^2 - c^2)x^2 + 2bc^2x - b^2c^2 = 0$$

Diese Gleichung hat aus den oben angeführten Ursachen vier Wurzeln, von welchen zwey unmöglich seyn können. Denn wenn MN innerhalb des W. ECF von der gegebenen Länge gelegt werden kann, so kann dieses auf zweyerley Art geschehen, es müßten denn die Winkel bey M und N gleich groß seyn. Ferner ist eine Lage der Linie innerhalb der Nebenwinkel MCf allemahl möglich; dieses giebt noch einen Werth der Wurzel, auf dem Schenkel CE. Viertens kann MN auch in dem Nebenwinkel FCe allemahl gelegt werden, für welche Lage aber der Werth von x auf Ce negativ ist. Die drey Werthe von CM, welche von C nach E hinfallen, sind die positiven Wurzeln der Gleichung, die nach e hinfallende ist die negative. Die Verbindungen der Vorzeichen in der Gleichung zeigen bey vier möglichen Wurzeln drey positive und eine negative an, (§. Gleichung IV. 6.).

Dieſe Aufgabe gehört unter eine noch allgemeinere, nämlich die, zwiſchen zwey gegebenen Linien, geraden oder krummen, eine gerade Linie von gegebener Länge zu legen, die durch einen gegebenen Punct geht. Mit dieſer Aufgabe haben ſich die Alten viel beſchäftigt. Apollonius hat zwey Bücher darüber geſchrieben, die er nennt τόπος νεύσεων, de inclinationibus. Sie ſind verloren gegangen. Doch hat Pappus in dem 7. B. ſeiner Sammlungen eine Anzahl Aufgaben, die dahin gehören, aufgenommen. In der Vorrede giebt er eine kurze Nachricht von einigen unter der allgemeinen Aufgabe begriffenen beſondern, worunter auch die hier befindliche 7te iſt, welche er aber in ſeinem Werke nicht vorträgt. Das Werk des Apollonius haben mehrere Mathematiker wieder herzuſtellen verſucht; Ghetaldus in dem Buche, das er Apollonius redivivus betitelt, Venedig 1607; Anderſon in Supplemento Apollonii redivivi, Paris. 1612; Horsley zu Oxford 1770, und Burrow zu London 1779.

11. Aufg. Aus zwey gegebenen Puncten A, B, (Fig. 17. Tab. I.) an einen gegebenen Kreis die Linien AP, BP zu ziehen, welche ſich in einem Puncte P des Umfanges ſchneiden, und den Kreis auſſer dieſem Puncte in zweyen Puncten M, N treffen, ſo daß MN parallel mit AB ſey. Es iſt die Lage der beiden Linien AP, BP durch Rechnung zu finden.

Man ziehe aus dem gegebenen Mittelpuncte die ſenkrechte CD auf AB, ſo ſind AD, BD, CD, nebſt dem Halbmeſſer CM oder CN gegebene Größen. Ferner ziehe man die berührenden AE, BF, ſo iſt $AE^2 = AM \times AP$, und $BF^2 = BN \times BP$. (Eucl. III. 36.). Wegen der Parallelen AB, MN iſt $AM : AP = BN : BP$, alſo $AM^2 : AM \times AP = BN^2 : BN \times BP$. Daher iſt $AE^2 : BF^2 = AM^2 : BN^2$, oder $AE : BF = AM : BN = AP : BP$.

Es kommt nun auf die Wahl der unbekannten Größen, wodurch die Puncte P, M, N, beſtimmt werden mögen. Die Linien AM, AP, BN, BP ſind dazu nicht

schicklich, weil eine so gut als die andere genommen werden kann, und weil sie mit dem gegebenen Halbmesser des Kreises nicht in Verbindung stehen. Man nehme CQ von C bis an MN auf der senkrechten CD für die unbekannte Größe, welche durch eine Gleichung gefunden werden soll. Man ziehe MR, NS senkrecht auf AB. Durch MC und CQ sind MQ = QN gegeben, das ist RD = DS; dadurch AR und BS; dadurch und durch MR = NS, sind AM, BN gegeben, deren Verhältniß bekannt ist.

Es sey $CM = a$; $CD = b$; $AD = c$; $BD = d$; $AE = e$; $BF = f$; $CQ = x$. Es ist nun $MQ = \sqrt{(a^2 - x^2)}$; $AR = c - \sqrt{(a^2 - x^2)}$; $MR = b - x$; $BS = d - \sqrt{(a^2 - x^2)}$. Also ist

$AM^2 = a^2 + b^2 + c^2 - 2bx - 2c\sqrt{(a^2 - x^2)}$,

$BN^2 = a^2 + b^2 + d^2 - 2bx - 2d\sqrt{(a^2 - x^2)}$.

Wenn man noch die (in der Figur nicht ausgezogenen) Linien AC, EC, zieht, so ist $AD^2 + DC^2 = AC^2 = AE^2 + CE^2$, also ist

$b^2 + c^2 = e^2 + a^2$; und eben so $b^2 + d^2 = f^2 + a^2$

Daher ist

$AM^2 = e^2 + 2a^2 - 2bx - 2c\sqrt{(a^2 - x^2)}$;

$BN^2 = f^2 + 2a^2 - 2bx - 2d\sqrt{(a^2 - x^2)}$.

Zufolge der anfangs gefundenen Proportion ist nun

$$e^2(f^2 + 2a^2 - 2bx - 2d\sqrt{(a^2 - x^2)}) = f^2(e^2 + 2a^2 - 2bx - 2c\sqrt{(a^2 - x^2)}),$$

oder

$$e^2(a^2 - bx - d\sqrt{(a^2 - x^2)}) = f^2(a^2 - bx - c\sqrt{(a^2 - x^2)}).$$

oder

$$(e^2 - f^2)(a^2 - bx) = (e^2 d - f^2 c)\sqrt{(a^2 - x^2)}.$$

Man setze $\frac{e^2 d - f^2 c}{e^2 - f^2} = g$, so ist

$$a^2 - bx = g\sqrt{(a^2 - x^2)},$$

also durch Quadrirung und Reduction

sey AD = BE = a; DC = b; DF = 2x. Mittelpunct von DEF in G, so ist FC = 2x, GC = b — x. Nun ist erstlich CE² = CF. Zieht man GE an den Berührungs- und AB von A nach B; so sind beide auf die Linie rkrecht, und es ist zweytens, CE : CG = EB : AG. ntsteht die Gleichung

$$b(b - 2x)\ (a + x)^2 = x^2(b - x)^2,$$

ehörig reducirt, diese wird

$$bx^2 + (a^2 + 4ab - b^2)x - 2ab^2 = 0.$$

eichung hat arithmetisch betrachtet zwey mög- urzeln, von welchen eine negativ ist, da das letzte s Vorzeichen — hat (Gleichung II. 3.). Diese hier nicht brauchbar. Denn wenn DG negativ en würde, so würde AG kleiner als AD, oder ls EB seyn, welches nicht möglich ist. Durch die ung ist die Gleichung auf einen höhern Grad ge- als der Frage zukommt. Sie ward zuerst selbst ten Grade mit einer Wurzel, x = 0. Die nega- urzel dient nur als Mittel, die Relation von x und b rational darzustellen, und ist für die geo- e Frage als eine fremde Wurzel anzusehen. Die- spiel dient zur Erläuterung von dem, was in dem Gleichung VI. von Wurzeln dieser Art gesagt

ßt man FC = x, so erhält man die Gleichung

$$(2a + b - x)^2\ bx = a^2\ (b + x)^2,$$

aus

$$(a^2 + 4ab + 2b^2)x^2 + (2a^2b + 4ab^2 + b^3)x$$
$$)^2 = 0.$$

man x = b, so werden die beiden Producte in der Form der Gleichung identisch, und die Gleichung rch diesen Werth von x auf Null gebracht. Sie h daher durch x — b dividiren, und um einen niedrigen, (Gleichung, VI.). Der Quotient ist

geſetzt der Gleichung ein Genüge thun. Setzt man $x = a$, ſo heben ſich alle Glieder auf, und es iſt a eine Wurzel der Gleichung. Sie hat daher den Factor $x - a$ (a. a. O. 8); den andern giebt die Diviſion durch $x - a$, nämlich, $x^3 - (a + 2b)x^2 - b^2x + abb$. Weil nun nicht ſeyn ſoll $x - a = o$, da in dieſem Falle CB mit AB parallel wäre, ſo iſt die Wurzel $x = a$ unbrauchbar, und es muß der andere Factor Null ſeyn, ſo daß die geſuchte Gleichung iſt

$$x^3 - (a + 2b)x^2 - b^2x + ab^2 = o.$$

Die zuerſt gefundene Gleichung hat durch die Quadrirung der beiden Werthe von BC einen höhern Grad erhalten, als ihr zukommt, nach der Anzahl der Werthe, welche x haben kann; daher ſie einen Factor bekommen hat, der ſich abſondern läßt.

Die Aufgabe läßt nur einen Werth für x zu. Denn BD und BC wachſen beide mit x zugleich, daher giebt es nicht zwey verſchiedene x, für welche ihre Summe dieſelbe Größe bekäme. Die cubiſche Gleichung hat alſo entweder zwey unmögliche Wurzeln, oder, wenn alle drey möglich ſind, ſo ſind zwey derſelben Antworten auf eine andere, aber mit der vorgelegten verwandte Frage.

Man verändere die Aufgabe in die folgende: Es iſt gegeben $DC - DA = a$, und $BC - BD = b$, ſo ſoll das Dreyeck daraus beſtimmt werden. Setzt man wiederum $DC = x$, ſo kommt man auf dieſelbe Gleichung, wie vorher, da es bey dem Quadriren gleichgültig iſt, ob die Wurzel das eine oder das andere Vorzeichen hat.

Noch verändere man die Aufgabe folgendergeſtalt. Es ſey $AD - DC = a$; $BC + BD = b$, und $DC = x$, ſo bleibt die Rechnung dieſelbe, auſſer daß die Vorzeichen des Gliedes, welches x^2 enthält, und des gegebenen ſich ändern. Die Gleichung iſt nämlich

$$x^3 + (a + 2b)x^2 - b^2x - ab^2 = o.$$

Die Wurzeln dieſer Gleichung ſind denjenigen der zuerſt *gefundenen* gleich, aber entgegengeſetzt.

ich der Kreis gehört, können sich in vier Puncten
n, und dienen daher zur Auflösung cubischer und
atischer Gleichungen. Höhere Gleichungen werden
ie Durchschnitte zweyer Linien construirt, deren
mit einander multiplicirt den Grad der Gleichung
Man hat überhaupt die Linien von einem so nie-
Grade zu nehmen als möglich ist, wenn nicht die
keit der Zeichnung eine Linie von einem höhern
zu nehmen veranlaßt. So hat Newton die Con-
eine Linie vom vierten Grade, zur Construction cu-
und biquadratischer Gleichungen angewandt (Arith-
niv. p 216.), weil diese Linie sich leicht beschrei-
t. Bey höhern Gleichungen als denen vom vier-
ade ist die geometrische Auflösung schwieriger als
hmetische, weil die Zeichnung der krummen Linien
heren Graden als die Kegelschnitte zu mühsam ist.
währt auch in der sinnlichen Zeichnung nicht die
igkeit, die man in der Rechnung erreichen mag.
nstructionen der Gleichungen vom dritten und vier-
ade durch zwey Kegelschnitte sind zwar in der sinn-
Ausführung auch nicht scharf genug, allein sie kön-

derselben gegebene Größen macht, die gerade zureichen, das Dreyeck zu bestimmen. Die hier vorgetragene wird eine der lehrreichsten seyn.

13. Aufg. Auf einem um den Mittelpunct C beschriebenen Kreise, (Fig. 19. Tab. I.) nehme man einen Bogen AB, ziehe BD senkrecht auf den Halbmesser AC, halbire den Bogen AB in E, und ziehe ED; es soll aus dem Winkel BDE das Verhältniß von BD zu AD (d. i. des Sinus ACB zum Quersinus) gefunden werden.

Da AE die Hälfte des Bogens AB ist, so sind durch BD und CD für diesen Bogen EF und CF für den Bogen AE, nebst dem Unterschiede DF der Linien CF, CD, gegeben. Hieraus wird erhalten $\text{tang}\, BDE = \text{tang}\, DEF = \frac{DF}{EF}$, eine gegebene Größe. Die Gleichung zwischen dieser Tangente und dem Quotienten $\frac{BD}{AD}$ zu erhalten dient der Winkel ACE als vermittelnde Größe.

Man setze $\frac{BD}{AD} = u$; $\frac{DF}{EF} = t$, und $ACE = \varphi$; $ACB = 2\varphi$, so ist $u = \frac{\sin 2\varphi}{1 - \cos 2\varphi}$, und $t = \frac{\cos\varphi - \cos 2\varphi}{\sin\varphi}$, wo die trigonometrischen Größen wegzuschaffen sind. Es ist $\sin 2\varphi = 2\sin\varphi . \cos\varphi$, und $1 - \cos 2\varphi = 2\sin\varphi^2$, s. (Goniometrie, 35. 36.), also $u = \frac{\cos\varphi}{\sin\varphi}$, und $t = u - \frac{\cos 2\varphi}{\sin\varphi}$. Ferner ist $\cos 2\varphi = \cos\varphi^2 - \sin\varphi^2$, und $u^2 + 1 = \frac{\cos\varphi^2 + \sin\varphi^2}{\sin\varphi^2} = \frac{1}{\sin\varphi^2}$; auch $u^2 - 1 = \frac{\cos\varphi^2 - \sin\varphi^2}{\sin\varphi^2}$, so daß

ung, auf einmahl anschaulich darstellt. Sie dient auch zur Erläuterung der Eigenschaften der Gleichungen.

I. Construction quadratischer Gleichungen.

1. Aufg. Die Gleichung $x^2 - ax + bc = o$ zu construiren.

Aufl. Man ziehe (Fig. 21. Tab. I.) zwey gerade Linien AP, AQ unter einem beliebigen Winkel A, nehme auf AP die Theile $AB = b$; $A = c$, und auf AQ den Theil $AD = a$. Man halbire BC in E, und AD in F, ziehe die Perpendikel EO, FO. welche sich in O schneiden, beschreibe aus O als Mittelpunct mit dem Halbmesser $OB = OC$ einen Kreis, welcher auf AQ die Theile AG, AH abschneidet, so sind AG, AH die Wurzeln der Gleichung. Denn nach der Eigenschaft des Kreises (s. Kreis), ist $AG \times AH = AB \times AC$. Setzt man $AG = x$, so ist $AH = a - x$, also $ax - xx = bc$, welches die gegebene Gleichung ist. Setzt man $AH = x$, so ist $HD = a - x$, das ist $AG = a - x$, also gleichfalls $ax - xx = bc$.

Wenn der Kreis die Linie AQ berührt, so hat die Gleichung zwey gleiche Wurzeln. Trifft er sie gar nicht, so sind beide Wurzeln unmöglich.

2. Aufg. Die Gleichung $x^2 + ax - bc = o$ zu construiren

Aufl. Man ziehe (Fig. 22. Tab. I.) zwey gerade Linien unter einem beliebigen Winkel in A; nehme auf der einen $AB = b$, und nach der entgegengesetzten Seite $AC = c$; ferner auf der andern $AD = a$. Nun halbire man BC in E, und AD in F, ziehe die senkrechten OE, OF, die sich in O schneiden. Aus O beschreibe man mit dem Halbmesser $OB = OC$ einen Kreis, welcher die andere Linie in G und H schneidet, so sind AG, AH die Wurzeln der Gleichung $x^2 + ax - bc = o$, und zwar AG die positive, und AH die negative. Es ist zufolge einer Eigenschaft des Kreises $AB \times AC = AG \times AH$, woraus auf dieselbe Art wie vorher die Gleichung folgt.

Die Gleichung $x^2 - ax - bc = o$ wird ganz a
dieſelbe Art conſtruirt. Es iſt hier AH die poſitive Wu
zel und AG die negative.

Der Kreis ſchneidet die Linie HG in allen Fällen,
wie die Gleichung immer zwey mögliche Wurzeln hat.

II. Conſtruction der cubiſchen Gleichungen, wor das zweyte Glied fehlt.

Es ſey AX (Fig. 23. Tab. II.) die Axe einer P
rabel MAN, und C der Mittelpunct eines Kreiſes, w
cher durch den Scheitelpunct der Parabel geht. Ein a
derer Durchſchnittspunct ſey M. Man ziehe von C u
M die ſenkrechten CB, MP auf die Axe, und die Hal
meſſer CA, CM. Es ſey $AB = b$; $BC = c$, $AC =$
der Parameter der Parabel $= p$; die Abſciſſe $AP =$
die Ordinate $PM = y$. Nun giebt erſtlich die Para
die Gleichung

$$px = yy.$$

Anſtatt die Abſciſſen für den Kreis auf AX von A au
und die Ordinaten parallel mit PM zu nehmen, neh
man die Abſciſſen auf der verlängerten CB von C aus, u
die Ordinaten darauf ſenkrecht. Für den Punct M iſt
Abſciſſe $CV = c + y$, und die Ordinate $VM = b -$
alſo

$$r^2 = (c + y)^2 + (b - x)^2,$$

woraus, weil $r^2 = b^2 + c^2$ iſt, die zweyte Gleichu
zwiſchen x und y erhalten wird,

$$x^2 + y^2 - 2bx + 2cy = o.$$

Für x ſetze man den Werth $\frac{yy}{p}$ aus der erſtern Gleichu
ſo iſt

$$y^3 - (2b - p)py + 2cp^2 = o.$$

Eine gegebene Gleichung ſey

$$y^3 - Apy + Bp^2 = o,$$

wo wegen der in den Coefficienten Ap, Bp^2 abgeſont
ten Factoren p, p^2 die andern Factoren A, B ein

sind. Wird $p = 1$ gesetzt; so sind A, B, die vollständigen numerischen Coefficienten. Den Parameter p kann man willkührlich annehmen, da hier nur zwey Gleichungen durch die Coefficienten zur Bestimmung der drey Größen b, c, p, gegeben werden. Der Parameter dient als Maaßstab, die andern Größen zu bestimmen. Seine eigene Quantität ist, wie überhaupt die Maaß-Einheit, willkührlich.

Die Zusammenhaltung der Normal-Gleichung mit der gegebenen giebt $b = \frac{1}{2}(A + p)$, und $c = \frac{1}{2}B$.

Man nehme also in der mit dem Parameter p beschriebenen Parabel auf der Axe von dem Scheitel an die Länge $AB = \frac{1}{2}(A + p)$, und die darauf lothrechte $BC = \frac{1}{2}B$, und beschreibe mit dem Halbmesser CA einen Kreis. Schneidet dieser die Parabel ausser in A noch in drey Puncten, wie in M, m, N, so hat die Gleichung drey mögliche Wurzeln, welche durch die Ordinaten MP, mp, NQ dargestellt werden. Die Ordinaten, welche die Lage, wie PM haben, sind positive Wurzeln, diejenigen, welche eine dieser entgegengesetzte Lage haben, wie QN, sind negative Wurzeln. Denn wenn man in der Rechnung den Durchschnittspunct N statt M genommen hätte, so wäre die Gleichung folgende:

$$y^3 - (2b - p)py - 2cp^2 = 0.$$

Diese hat dieselben Wurzeln als jene in Rücksicht der Quantität, aber von entgegengesetzter Beschaffenheit. Ihre positiven Wurzeln sind also die Ordinaten, welche wie QN liegen; ihre negativen diejenigen, welche die Lage wie PM haben.

Hat die gegebene Gleichung zwey gleiche Wurzeln, so berührt der Kreis die Parabel in einem Puncte, welcher nun für zwey Puncte, die darin zusammenfallen, gilt, so wie die beiden gleichen Wurzeln in der Aufzählung der Wurzeln der Gleichung für zwey gerechnet werden. Schneidet der Kreis die Parabel nur in einem einzigen Puncte, ausser dem Puncte A, ohne sie irgend wo zu be-

rühren, so hat die Gleichung nur eine einzige mögliche Wurzel.

Wenn A in der Gleichung das Vorzeichen +, und B das − hat, so ist jenes und dieses negativ. Ein negatives B macht c negativ, daher BC nach der andern Seite der Axe hin genommen wird. Ein negatives b wird in einer derjenigen Lage entgegengesetzten genommen, welche AB in der Figur hat. Die Lage von AB und BC in der Figur gilt für positive Werthe dieser Linien.

Es entsteht hier eine Frage, die der Mühe werth ist sie zu beantworten, nämlich was für eine Linie der Ort sey, in welchem die Mittelpuncte der die Parabel irgendwo berührenden Kreise liegen, die zugleich durch den Scheitelpunct A gehen.

Man setze die beiden gleichen Wurzeln einer cubischen Gleichung, worin das zweyte Glied fehlt, jede $= \alpha$, die dritte $= \beta$, beiderseits nach der absoluten Größe genommen. Sind jene positiv, so ist diese negativ, da ihr Aggregat, wegen des fehlenden zweyten Gliedes, Null ist. Nun ist jeder Werth der Gleichung ein Product aus den Factoren $(y - \alpha)^2$ und $(y + \beta)$, (s. Gleichung III. 10). Also ist, wenn y irgend eine der Wurzeln bedeutet, $(y - \alpha)^2 (y + \beta) = 0$, das ist

$$y^3 - (2\alpha - \beta)\, y^2 + (\alpha^2 - 2\alpha\beta)\, y + \alpha^2\beta = 0.$$

Die Zusammenhaltung mit der Gleichung

$$y^3 - (2b - p)\, py + 2cp^2 = 0$$

giebt I. $2\alpha - \beta = 0$. II. $\alpha^2 - 2\alpha\beta = (p - 2b)\, p$; III. $\alpha^2\beta = 2cp^2$. Schafft man mittelst der ersten Gleichung aus den beiden andern β weg, so erhält man IV. $(3\alpha^2 = 2b - p)\, p$; V. $\alpha^3 = cp^2$. Daraus ist

VI. $\alpha = \frac{3cp}{2b - p}$, und VII. $\alpha^2 = \frac{9c^2p^2}{(2b - p)^2}$. Aus IV. und VII. folgt VIII. $27c^2p = (2b - p)^3$, oder

$$\frac{27}{8}\, pc^2 = (b - \tfrac{1}{2}p)^3.$$

Dieſes iſt die Gleichung für die ſemicubiſche oder Neiliſche Parabel, in welcher $b - \frac{1}{2}p$ und c die Coordinaten für den Anfang der Abſciſſen D ſind. Sie iſt in Fig. 24. Tab II. mit ihren beiden unendlichen Zweigen DE, De gezeichnet. Die zugehörige Parabel iſt GAg, die Axe derſelben und der Paraboloide EDe iſt AX; der Brennpunct der Parabel F; der Abſtand $AF = \frac{1}{4}p$, und der Abſtand AD der Spitze der Paraboloide von dem Scheitel der Parabel $AD = \frac{1}{2}p$. Die rechtwinklichten Coordinaten an der Paraboloide ſeyn $AT = t$; $TU = u$. Dieſe ſetze man ſtatt b und c in der gefundenen Gleichung für dieſe beiden Größen, ſo iſt die Gleichung für den verlangten Ort, $27\,pu^2 = 8\,(t - \frac{1}{2}p)^3$. Ein Kreis aus einem Puncte U als Mittelpuncte durch den Scheitel A beſchrieben, berührt die Parabel irgendwo in M. Nimmt man den Mittelpunct eines Kreiſes durch A innerhalb des Raumes EDe. ſo ſchneidet derſelbe die Parabel auſſer dem Puncte A noch dreymahl; nimmt man ihn auſſerhalb dieſes Raumes, ſo ſchneidet der Kreis die Parabel auſſer in A nur noch einmahl.

Denn in D iſt $t = \frac{1}{2}p$, das iſt dem Halbmeſſer des Krümmungskreiſes der Parabel im Scheitel, (ſ. Krümmungskreis §. 12.). Daher geht ein Kreis, der aus einem entferntern Puncte der Axe wie T durch A beſchrieben wird, auſſerhalb der Parabel weg, begegnet ihr aber wieder in einem Puncte auf jedem ihrer beiden Zweige. Der Kreis aus einem Puncte U der Paraboloide durch A beſchrieben, ſchneidet die Parabel in A, und liegt von A bis M innerhalb derſelben, da er den Zweig in M berührt. Folglich muß ein Kreis, der aus einem Puncte von TU zwiſchen T und U durch A beſchrieben wird, den Zweig AG zweymahl treffen, auf der einen und auf der andern Seite den M. dagegen ein Kreis aus einem von T entferntern Puncte als U auf TU den Zweig AG nicht treffen wird. Nämlich die berührende an dem erſtern dieſer Kreiſe in A liegt zwiſchen den berührenden an der Parabel und dem Kreisbogen AM in demſelben Puncte A. Der Kreis geht daher zwiſchen beiden durch, und trifft den mit UM be-

schriebenen zum zweytenmahle in dem Durchschnitte mit der Abscissenlinie AX.

Die Gleichung $y^3 - Apy + Bp^2 = o$ hat also drey mögliche Wurzeln, wenn $27pc^2 < (2b - p)^3$; zwey gleiche, wenn $27pc^2 = (2b - p)^3$; zwey unmögliche, wenn $27pc^2 > (2b - p)^3$ ist. Setzt man für b und c ihre vorher gefundenen Werthe, welche sie dieser Gleichung gemäß haben, so ist die Bedingung für die Möglichkeit aller drey Wurzeln, daß $\frac{27p}{4}B^2 < A^3$ sey.

Oder wenn $p = 1$ genommen wird, damit A und B die numerischen Coefficienten bedeuten können, so hat die Gleichung $y^3 - Ay + B = o$ drey mögliche Wurzeln, oder zwey gleiche, oder zwey unmögliche, nachdem $27B^2$ kleiner, so groß oder größer als $4A^3$ ist. Dieses stimmt mit dem überein, was in dem Artikel, Gleichung III. 13. auf einem andern Wege gefunden wird.

Die Evolute der Parabel ist auch eine semicubische Parabel, aber darin von dem hier gefundenen Orte der Mittelpuncte der berührenden Kreise verschieden, daß ihre Gleichung ist, $27pu^2 = 16(t - \frac{1}{2}p)^3$. Beide unterscheiden sich nur in ihren Parametern.

III. Construction biquadratischer Gleichungen und vollständiger cubischer.

Es sey MAN (Fig. 25. Tab. II.) eine Parabel, deren Axe AQ und Scheitel A ist. Mit der Axe parallel in dem Abstande DE ist die Abscissenlinie DX gezogen, auf welcher der Anfang der Abscissen in der Parabel in D genommen werde. Ein Kreis aus C beschrieben schneide die Parabel in den Puncten M, m, N, n, von welchen Durchschnittspuncten in andern Fällen zwey wegfallen mögen, so wie auch gar keiner Statt haben mag. Von dem Mittelpuncte des Kreises C ist CB senkrecht auf DX gezogen, von dem einen Durchschnittspuncte des Kreises mit

der Parabel eben ſo MP, und MV von M auf die verlängerte BC.

Der Parameter der Parabel iſt = p; der Halbmeſſer des Kreiſes = r; der Abſtand der Abſciſſenlinie von der Axe DE = a; der Abſtand des Mittelpunctes des Kreiſes von der Abſciſſenlinie, CB = c; und DB = b. Die Coordinaten ſeyn DP = x; PM = y. Die Ordinate PM treffe die Axe in R.

Für die Parabel iſt die Gleichung

$$p\left(\frac{a^2}{p} + x\right) = (y - a)^2,$$

weil $DE^2 = p : AE$. Die Entwickelung dieſer Formel giebt

I. $px = y^2 - 2ay$.

An dem Kreiſe iſt

II. $r^2 = (y - c)^2 + (x - b)^2$.

Setzt man in dieſer Gleichung für x ſeinen Werth, ſo iſt

III. $r^2 = (y - c)^2 + \left(\frac{yy}{p} - \frac{2ay}{p} - b\right)^2$

Dieſe mit p^2 multiplicirt, und entwickelt, wird

IV. $y^4 - 4ay^3 + 4a^2y^2 + 4abpy + b^2p^2 - 2bp^2 - 2cp^2 + c^2p^2 = 0.$
$+ p^2 \qquad - r^2p^2$

Mit dieſer Gleichung vergleiche man eine gegebene biquadratiſche,

$$y^4 - Ay^3 + Bpy^2 + Cp^2y - Dp^3 = 0.$$

Beide Gleichungen ſind als Normal-Gleichungen anzuſehen; alle Größen ſind in ihnen poſitiv, oder bloß der Quantität nach zu nehmen. Ändern dieſe in andern Fällen ihre Vorzeichen, ſo ſind ſie negativ, und wenn ſie negativ werden, bekommen ſie eine entgegengeſetzte Lage in Beziehung auf diejenige, welche ſie in der Figur haben.

Die Zusammenhaltung beider Gleichungen giebt
I. $4a = A$; II. $4a^2 - 2bp + p^2 = Bp$;
III. $4ab - 2cp = Cp$; IV. $r^2 - b^2 - c^2 = Dp$.

Daraus wird erhalten

$$a = \tfrac{1}{4}A$$

$$b = \frac{2aa}{p} + \tfrac{1}{2}p - \tfrac{1}{2}B$$

$$c = \frac{2ab}{p} - \tfrac{1}{2}C$$

$$r^2 = b^2 + c^2 + Dp$$

Der Terminus $\frac{2aa}{p}$ ist $= 2AE$; ferner ist $\frac{2ab}{p}$ die
vierte Proportional-Linie zu p, a, 2b; und Dp ist de
Quadrat der mittlern Proportional-Linie zwischen
und p.

Mit einem willkührlichen Parameter zeichne man ei
Parabel MAN, und ziehe in dem Abstande $DE = \frac{1}{4}$
mit der Axe derselben die Parallele DX, wie in
Figur, wenn A positiv ist, das ist, das Vorzeichen
hat. Von dem Puncte D, wo sie die Parabel trifft, z
man DE senkrecht auf die Axe, nehme von E
$EF = \frac{1}{2}p$, und von F aus $FG = 2AE \left(= \frac{2a}{p}\right.$
dann von G rückwärts $GH = \frac{1}{2}B$, wenn B positi
So ist $EH = b$, das ist $DB = b$, wenn HB senkrec
DX ist. Dann ziehe man durch D und F eine gerade
welche die verlängerte BH in J schneide, so ist BJ = ?

da $EF : ED = DB : BJ$ ist. Auf BJ nehme man JC
nach B hin, wenn C positiv ist, so ist C der Mit
des zu beschreibenden Kreises, dessen Halbmesser no
den ist. Man suche zuerst die Linie, deren Quad
Rechtecke von D und p oder dem Producte Dp

Iſt D poſitiv, ſo zeichne man ein rechtwinklichtes Dreyeck CDK (Fig. 26. Tab. II.), worin die Kathete $DC = \sqrt{(b^2 + c^2)}$, und die ander Kathete DK der Seite jenes Quadrats gleich iſt; die Hypotenuſe CK iſt der geſuchte Halbmeſſer. Iſt aber D negativ, ſo beſchreibe man über DC einen Halbkreis, trage darin die Chorde DL gleich der Seite jenes Quadrats, und ziehe CL, ſo iſt CL der geſuchte Halbmeſſer. Das erſtere iſt der Fall mit der Normal-Gleichung, die durch unſere Figur conſtruirt wird, wenn ſie vier mögliche Wurzeln hat. Sie hat, wegen der drey Abwechslungen der Vorzeichen drey poſitive Wurzeln, nämlich die drey poſitiven Ordinaten in M, m, n, und eine negative, die Ordinate in N, (ſ. Gleichung, IV. 6.)

Mit dem gefundenen Halbmeſſer beſchreibe man nun einen Kreis, welcher die Parabel in vier verſchiedenen Puncten ſchneidet, wenn die Gleichung vier verſchiedene mögliche Wurzeln hat. Er ſchneidet ſie in zweyen, und berührt ſie in einem Puncte, wenn die Gleichung unter den vier möglichen Wurzeln zwey gleiche hat. Er ſchneidet ſie in nicht mehr als zwey Puncten, wenn die Gleichung nur zwey mögliche verſchiedene Wurzeln hat, und berührt ſie in einem einzigen, wenn die beiden einzigen möglichen ſich gleich ſind. Schneidet der Kreis die Parabel gar nicht, ſo hat die Gleichung gar keine mögliche Wurzel. Iſt D negativ, und Dp größer als $b^2 + c^2$, ſo iſt r^2 negativ, welches ſogleich, ohne Conſtruction, zu erkennen giebt, daß die Gleichung keine mögliche Wurzeln habe. Segner hat ſich geirrt, da er in den Elem. Anal. finit. pag. 475. ſagt, daß man r immer möglich machen könne, weil man die Einheit nach Gefallen annehmen, und dadurch b^2 immer groß genug machen möge. Die Einheit iſt durch den Parameter, den er = 1 ſetzt, beſtimmt. — In dem Falle, da eine Gleichung drey gleiche Wurzeln hat, giebt unſere Conſtruction ſie nur als einzeln auſſer der vierten Wurzel an. Für dieſen Fall müßte die Abſciſſenlinie gegen die Axe geneigt ſeyn, damit für den Berührungspunct und einen der

Durchschnittspuncte die Ordinaten gleich groß seyn mögen.

Die für biquadratische Gleichungen angewiesene Construction ist auch auf vollständige cubische anwendbar. Eine solche sey $y^3 - Ay^2 + By + C = o$. Man multiplicire sie mit y, so wird sie diese: $y^4 - Ay^3 + By^2 + Cy = o$, in welcher eine Wurzel $= o$ ist. Demnach setze man in der vorher behandelten biquadratischen Gleichung $D = o$, so erhält man die veränderte cubische. In der Construction ist CD der Halbmesser, und der Kreis geht durch den Anfang der Abscissen, so daß die Ordinate in diesem Puncte die hinzugefügte Wurzel $y = o$ bedeutet.

Bakers Centralregel ist im Wesentlichen das für die biquadratischen Gleichungen hier gewiesene Verfahren; allein die Vorschriften wegen der Lage der Linien erfordern zu viele Aufmerksamkeit, um sich nicht zu irren, weil es an einer bestimmten Regel fehlt, was positiv, und was negativ seyn soll. Die Regel trifft man in Tob. Mayers mathematischem Atlas, Supplement, Tab. VI. an. Man mag auch Wolfs Elementa Matheseos, T. I. Analysis Finit. §. 622 vergleichen. Bey diesem Artikel sind zwey Abhandlungen von Halley aus den Transactionen, die auch in der 's Gravesandschen Ausgabe von Newtons Arithm. univ. befindlich sind, benutzt worden. Die Regeln wegen des Positiven und Negativen daselbst sind nicht einfach genug. Die Beweise der Constructionen sind nicht beygefügt.

IV. Arithmetisch-geometrische Construction der Gleichungen.

Man berechne einige Werthe einer gegebenen Gleichung für gewisse Werthe der unbekannten Größe, und setze diese, für eine beliebige linearische Einheit, als Ordinaten auf eine Abscissenlinie, in den Puncten, welche von dem Anfange der Abscissen den Abstand haben, der in den Werthen der Gleichung für die unbekannte Größe gesetzt

ist. Durch diese Puncte ziehe man aus freyer Hand eine krumme Linie mit möglichster Beobachtung der allmähligen Krümmung, so erhält man an den Stellen, wo die Endpuncte der aufgetragenen Ordinaten nahe genug liegen, die krumme Linie, deren Ordinaten die Werthe der Gleichung für jede Abscisse darstellen. Die Abstände ihrer Durchschnittspuncte mit der Abscissenlinie von dem Anfange der Abscissen geben die Wurzeln der Gleichung, desto genauer, je vollkommner die Zeichnung ist.

Z. B. Es ist (Fig. 27. Tab. II.) die Abscissenlinie XY, und darauf der Anfang in A. Die Abscissen nach der rechten Hand hin bedeuten die positiven Werthe von x in der Gleichung für x; die nach der andern Seite hin die negativen. Man setze auf diese die zu verschiedenen Werthen von x gehörigen Werthe der Gleichung, als in A selbst den Werth Aa, oberhalb der Abscissenlinie, wenn der Werth positiv ist, unterhalb, wenn er negativ ist. So ist der zu AB gehörige Werth Bb negativ, der zu AC gehörige Cc positiv. Nach Beschaffenheit der Umstände hat man mehr oder weniger Werthe der Gleichung zu berechnen und aufzutragen. Die durch die gefundenen Puncte gezogene krumme Linie schneide die Abscissenlinie in M, N, P, so sind AM und AN positive Wurzeln der Gleichung, und AP eine negative. Ist die Gleichung eine cubische, so sind nicht mehr Durchschnitte möglich, und die krumme Linie erstreckt sich mit zwey Zweigen NQ, PR ins Unendliche auf beiden Seiten der Abscissenlinie nach entgegengesetzten Gegenden fort. Letzteres ist der Fall bey allen Gleichungen von einem ungeraden Grade. Die Anzahl der möglichen Durchschnitte mit der Abscissenlinie ist nicht größer als die Zahl, welche den Grad der Gleichung ausdrückt, kann aber kleiner seyn; es kann selbst nur ein einziger Durchschnitt Statt haben, wenn nämlich die Abscissenlinie oberhalb oder unterhalb aller Biegungen der krummen Linie liegt, oder die krumme Linie gar keine Biegung hat.

In Fig. 28. Tab. II. ist eine Gleichung vom vierten Grade durch den Zug einer krummen Linie abgebildet.

Die Zeichnung iſt aber, ſo wie die vorhergehende, nach keiner beſtimmten Gleichung entworfen, weil die Ordinaten der krummen Linie für den Raum der Zeichnung zu groß werden würden, wenn die Wurzeln eine hinlängliche Größe erhalten. Die Abſciſſenlinie iſt XY; der Anfang der Abſciſſen iſt in A; die Durchſchnitte der krummen Linie mit der Abſciſſenlinie ſind M, N, P, Q, welche drey poſitive Wurzeln und eine negative geben. Zwiſchen den Abſciſſen, wodurch die Wurzeln der Gleichung dargeſtellt werden, liegen die Abſciſſen AB, AC, AD, deren zugehörige Ordinaten Bb, Cc, Dd größte ſind, nämlich in Beziehung auf die nächſt vorhergehenden und folgenden. Die negativen Ordinaten, welche der Quantität nach Größte ſind, heißen aber, als negative Größen, Kleinſte, weil ſie aus den vorhergehenden durch die Hinzuſetzung einer ſubtractiven Größe entſtehen, und daher in Rückſicht dieſer kleiner ſind. Die krumme Linie geht mit zwey Zweigen PS, QT nach derſelben Gegend von der Abſciſſenlinie an ins Unendliche fort, da das höchſte Glied der Gleichung für eine negative Abſciſſe poſitiv iſt, und von einem gewiſſen Werthe an ſchon allein größer bleibt als alle ſubtractiven Glieder der Gleichung zuſammen genommen. Das iſt der Fall bey allen Gleichungen von einem geraden Grade. Iſt die Ordinate Aa in dem Anfangspuncte negativ, wie in der Figur, ſo hat die Gleichung wenigſtens zwey mögliche Wurzeln, da die Abſciſſenlinie die beiden unendlichen Zweige ſchneiden muß, wenn ſie auch über allen Biegungen der krummen Linie weg geht. Iſt aber die Ordinate in A poſitiv, ſo hat die Gleichung gar keine mögliche Wurzeln, wenn die Abſciſſenlinie unterhalb aller Biegungen liegt.

Die geometriſche Abbildung der Gleichungen iſt ſehr geſchickt die Theorie derſelben auf eine ſinnliche Art zu erläutern. Wenn in der Folge der Ordinaten unter den vorhergehenden und nachfolgenden eine abſolut Kleinſte ſich findet, ſo geht daſelbſt die Abſciſſenlinie unter oder über einer Biegung weg, unter, wenn das Kleinſte poſitiv, über, wenn das Kleinſte, abſolut genommen, negativ iſt.

Man lege in Fig. 28. die Abſciſſenlinie ſo, daß ſie unter dem Puncte c und über d liege, in einer der vorigen parallelen Lage. Dadurch fallen zwey mögliche Wurzeln weg, und die Ordinate in C iſt ein poſitives Kleinſtes. Liegt die Abſciſſenlinie auch unterhalb des Punctes d, ſo ſind alle vier Wurzeln der biquadratiſchen Gleichung, welche die Zeichnung abbildet, unmöglich. Man ſieht, wie bey der parallelen Verrückung der Abſciſſenlinie, das iſt, bey einer Veränderung des abſoluten Gliedes der Gleichung, zwey ungleiche Wurzeln ſich immer näher kommen, und bey der Berührung mit der krummen Linie an dem Biegungspuncte, wie b oder c oder d, ſich gleich werden, bey weiterer Verrückung aber ſich in unmögliche verwandeln. Der Übergang von der Möglichkeit zur Unmöglichkeit geſchieht alſo hier durch die Gleichheit zweyer Wurzeln. Die Summe zweyer nächſten Wurzeln, wie AN, AP, iſt $= 2AC - CN + CP$, wenn C der zu einer größten oder kleinſten Ordinate gehörige Punct der Abſciſſe iſt. Der Theil AC hängt nicht von dem abſoluten Gliede der Gleichung ($= Aa$) ab, oder wenn dieſes in den irrationalen Theilen von AC enthalten iſt, muß es bey der Entwickelung herausgehen. Aber CN und CP hängen von dem abſoluten Gliede ab, ſo daß ſie Null ſind, wenn die Abſciſſenlinie durch c geht.

Die krumme Linie, welche eine Gleichung vom nten Grade abbildet, kann $n - 1$ Biegungen, nicht mehrere, haben. Es können aber eine oder mehrere Biegungen wegfallen. Wenn z. B. in Fig. 28. die poſitiven Ordinaten von M an beſtändig zunehmen, ſo behält die krumme Linie nur eine einzige Biegung, und iſt parabelförmig. Die zu der Linie gehörige Gleichung kann gar nicht mehr als zwey Wurzeln haben, wie auch das abſolute Glied verändert werden mag. Wenn die Biegung NcP wegfällt, ſo wird AC eine unmögliche Größe. Eine Linie zu einer Gleichung eines ungeraden Grades kann alle Biegungen behalten, und mit zwey Zweigen, die entgegengeſetzte Krümmung haben, (der eine concav, der andere nach derſelben Gegend conver,) ins Unendliche hin ſich erſtrecken.

Die Gleichung kann alsdann nicht mehr als eine einzige Wurzel haben. Mit jeder wegfallenden Biegung fallen zwey Durchschnitte mit der Abscissenlinie weg, daher die Anzahl der unmöglichen Wurzeln einer Gleichung immer gerade ist.

Man kann die linearischen Werthe einer Gleichung auch durch eine Construction finden, welches an dem Beyspiele einer cubischen Gleichung gezeigt werden wird. Diese sey $\frac{ax^3}{p^3} + \frac{bx^2}{p^2} + \frac{cx}{p} + d = o$, wo p der Parameter der krummen Linie heißen mag. Die Größen a, b, c, d sind Linien, wie p und x. Setzt man $p = 1$, so werden die übrigen Linien Zahlen, und zwar die Exponenten des Verhältnisses des Parameters zu ihnen. Man zeichne (Fig. 29. Tab. II.) ein Rechteck AEFK, woran die Grundlinie $EK = p$, und die Seite $AE = a + b + c + d$ ist, nämlich $AB = a$; $BC = b$; $CD = c$; $De = d$. Man nehme auf der Grundlinie das Stück $ET = x$, und ziehe TP parallel mit AE. Nun ziehe man BF, und durch ihren Durchschnittspunct Q auf PT die mit EK parallele Gg; darauf CG, welche PT in R schneidet, und durch R die parallele Hh mit EK; dann DH, und durch ihren mit TP gemeinschaftlichen Punct S die mit EK parallele Ji. Dieses geschehen, so ist $TS = \frac{ax^3}{p^3} + \frac{bx^2}{p^2} + \frac{cx}{p} + d$, als der Werth der gegebenen Gleichung für $x = ET$.

Denn es ist $AB : Bg = p : x$, also $Bg = \frac{ax}{p}$.

Ferner ist $Cg : Ch = p : x$, also $Ch = Cg$.

$= (CB + Bg)\frac{x}{p}$, das ist $Ch = \frac{bx}{p} + \frac{ax^2}{p^2}$.

Noch ist $Dh : Di = p : x$, also $Di = Dh$.

Iſt D poſitiv, ſo zeichne man ein rechtwinklichtes Dreyeck CDK (Fig. 26. Tab. II.), worin die Kathete $DC = \sqrt{(b^2 + c^2)}$, und die ander Kathete DK der Seite jenes Quadrats gleich iſt; die Hypotenuſe CK iſt der geſuchte Halbmeſſer. Iſt aber D negativ, ſo beſchreibe man über DC einen Halbkreis, trage darin die Chorde DL gleich der Seite jenes Quadrats, und ziehe CL, ſo iſt CL der geſuchte Halbmeſſer. Das erſtere iſt der Fall mit der Normal-Gleichung, die durch unſere Figur conſtruirt wird, wenn ſie vier mögliche Wurzeln hat. Sie hat, wegen der drey Abwechslungen der Vorzeichen drey poſitive Wurzeln, nämlich die drey poſitiven Ordinaten in M, m, n, und eine negative, die Ordinate in N, (ſ. Gleichung, IV. 6.)

Mit dem gefundenen Halbmeſſer beſchreibe man nun einen Kreis, welcher die Parabel in vier verſchiedenen Puncten ſchneidet, wenn die Gleichung vier verſchiedene mögliche Wurzeln hat. Er ſchneidet ſie in zweyen, und berührt ſie in einem Puncte, wenn die Gleichung unter den vier möglichen Wurzeln zwey gleiche hat. Er ſchneidet ſie in nicht mehr als zwey Puncten, wenn die Gleichung nur zwey mögliche verſchiedene Wurzeln hat, und berührt ſie in einem einzigen, wenn die beiden einzigen möglichen ſich gleich ſind. Schneidet der Kreis die Parabel gar nicht, ſo hat die Gleichung gar keine mögliche Wurzel. Iſt D negativ, und Dp größer als $b^2 + c^2$, ſo iſt r^2 negativ, welches ſogleich, ohne Conſtruction, zu erkennen giebt, daß die Gleichung keine mögliche Wurzeln habe. Segner hat ſich geirrt, da er in den Elem. Anal. finit. pag. 475. ſagt, daß man r immer möglich machen könne, weil man die Einheit nach Gefallen annehmen, und dadurch b^2 immer groß genug machen möge. Die Einheit iſt durch den Parameter, den er = 1 ſetzt, beſtimmt. — In dem Falle, da eine Gleichung drey gleiche Wurzeln hat, giebt unſere Conſtruction ſie nur als einzeln auſſer der vierten Wurzel an. Für dieſen Fall müßte die Abſciſſenlinie gegen die Axe geneigt ſeyn, damit für den Berührungspunct und einen der

Es ist für quadratische Gleichungen eingerichtet. Die Bewegungen geschehen mittelst gezähnter Räder, die in gezahnte Lineale eingreifen. Ein ähnliches Instrument hat Rowning in den Englischen Transactionen 1770 angegeben. Die Construction, worauf diese Instrumente beruhen, hat Segner in den neuern Petersburger Comment. T. VII. gelehrt, sie auch in seinen Elem. Analyseos finit. §. 705 ff. vorgetragen. Der Beweis ist in diesem Artikel sehr abgekürzt. Die Instrumente sind mehr sinnreich als brauchbar.

V. Auflösung quadratischer und cubischer Gleichungen durch die Goniometrie (trigonometrische Formeln).

1. Die Formeln für die Sinus, Cosinus und Tangenten vielfacher Winkel durch eben solche Functionen des einfachen können angewandt werden, um die letztern aus den erstern sehr genau zu finden, da alle diese Functionen der Winkel in den Tafeln mit großer Genauigkeit angegeben sind. Da aber in diesen Formeln nur zwey Größen unbestimmt bleiben, der Sinus totus oder die Tangente von 45 Grad, und die Function des vielfachen Winkels; wenn die Function des einfachen gesucht wird, so kann man dadurch nur die Gleichungen vom zweyten und dritten Grade auflösen, und die letztern nur, wenn das zweyte Glied darin fehlt, wodurch die zwey Coefficienten gegeben werden, welche den Sinus totus und den Sinus oder Cosinus des dreyfachen Winkels bestimmen. Die goniometrischen Formeln für die Functionen größerer Vielfachen eines Winkels enthalten gewisse Relationen der Coefficienten, welche in einer gegebenen Gleichung sich auch finden müssen, wenn sie durch die Theilung eines Winkels aufgelöset werden soll.

2. Eine quadratische Gleichung sey

$$x^2 - ax + b = 0,$$

ist. Durch diese Puncte ziehe man aus freyer Hand eine krumme Linie mit möglichster Beobachtung der allmähligen Krümmung, so erhält man an den Stellen, wo die Endpuncte der aufgetragenen Ordinaten nahe genug liegen, die krumme Linie, deren Ordinaten die Werthe der Gleichung für jede Abscisse darstellen. Die Abstände ihrer Durchschnittspuncte mit der Abscissenlinie von dem Anfange der Abscissen geben die Wurzeln der Gleichung, desto genauer, je vollkommner die Zeichnung ist.

Z. B. Es ist (Fig. 27. Tab. II.) die Abscissenlinie XY, und darauf der Anfang in A. Die Abscissen nach der rechten Hand hin bedeuten die positiven Werthe von x in der Gleichung für x; die nach der andern Seite hin die negativen. Man setze auf diese die zu verschiedenen Werthen von x gehörigen Werthe der Gleichung, als in A selbst den Werth Aa, oberhalb der Abscissenlinie, wenn der Werth positiv ist, unterhalb, wenn er negativ ist. So ist der zu AB gehörige Werth Bb negativ, der zu AC gehörige Cc positiv. Nach Beschaffenheit der Umstände hat man mehr oder weniger Werthe der Gleichung zu berechnen und aufzutragen. Die durch die gefundenen Puncte gezogene krumme Linie schneide die Abscissenlinie in M, N, P, so sind AM und AN positive Wurzeln der Gleichung, und AP' eine negative. Ist die Gleichung eine cubische, so sind nicht mehr Durchschnitte möglich, und die krumme Linie erstreckt sich mit zwey Zweigen NQ, PR ins Unendliche auf beiden Seiten der Abscissenlinie nach entgegengesetzten Gegenden fort. Letzteres ist der Fall bey allen Gleichungen von einem ungeraden Grade. Die Anzahl der möglichen Durchschnitte mit der Abscissenlinie ist nicht größer als die Zahl, welche den Grad der Gleichung ausdrückt, kann aber kleiner seyn; es kann selbst nur ein einziger Durchschnitt Statt haben, wenn nämlich die Abscissenlinie oberhalb oder unterhalb aller Biegungen der krummen Linie liegt, oder die krumme Linie gar keine Biegung hat.

In Fig. 28. Tab. II. ist eine Gleichung vom vierten Grade durch den Zug einer krummen Linie abgebildet.

Es ist für quadratische Gleichungen eingerichtet. Die Bewegungen geschehen mittelst gezähnter Räder, die in gezahnte Lineale eingreifen. Ein ähnliches Instrument hat Rowning in den Englischen Transactionen 1770 angegeben. Die Construcion, worauf diese Instrumente beruhen, hat Segner in den neuern Petersburger Comment. T. VII. gelehrt, sie auch in seinen Elem. Analyseos finit. §. 705 ff. vorgetragen. Der Beweis ist in diesem Artikel sehr abgekürzt. Die Instrumente sind mehr sinnreich als brauchbar.

V. Auflösung quadratischer und cubischer Gleichungen durch die Goniometrie (trigonometrische Formeln).

1. Die Formeln für die Sinus, Cosinus und Tangenten vielfacher Winkel durch eben solche Functionen des einfachen können angewandt werden, um die letztern aus den erstern sehr genau zu finden, da alle diese Functionen der Winkel in den Tafeln mit großer Genauigkeit angegeben sind. Da aber in diesen Formeln nur zwey Größen unbestimmt bleiben, der Sinus totus oder die Tangente von 45 Grad, und die Function des vielfachen Winkels; wenn die Function des einfachen gesucht wird, so kann man dadurch nur die Gleichungen vom zweyten und dritten Grade auflösen, und die letztern nur, wenn das zweyte Glied darin fehlt, wodurch die zwey Coefficienten gegeben werden, welche den Sinus totus und den Sinus oder Cosinus des dreyfachen Winkels bestimmen. Die goniometrischen Formeln für die Functionen größerer Vielfachen eines Winkels enthalten gewisse Relationen der Coefficienten, welche in einer gegebenen Gleichung sich auch finden müssen, wenn sie durch die Theilung eines Winkels aufgelöset werden soll.

2. Eine quadratische Gleichung sey

$$x^2 - ax + b = 0,$$

3. Die quadratische Gleichung sey

$$x^2 + ax - b = o.$$

Diese läßt sich nicht durch Hülfe des Sinus auflösen, weil der Sinus des Winkels 2φ für sie unmöglich wird. Man nehme aber die Formel 46 der Goniometrie

$$\text{tang } 2\varphi = \frac{2 \text{ tang } \varphi}{1 - \text{tang } \varphi^2},$$

und setze $\text{tang } \varphi = \frac{t}{r}$, $\text{tang } 2\varphi = \frac{f}{r}$, so ist

$$t^2 + \frac{2r^2}{f} t - r^2 = o.$$

Hält man diese Gleichung gegen die für x, so ist $t = x$; $\frac{2r^2}{f} = a$; $r^2 = b$, also $\text{tang } 2\varphi = \frac{2\sqrt{b}}{a}$, und $x = \text{tang } \varphi . \sqrt{b}$.

In diesem Ausdrucke liegt ein doppelter Werth. Ist φ der kleinste Winkel zu der Tangente f, so gehört dieselbe Tangente auch zu $\pi + 2\varphi$ (Goniom. 8.), und es ist sowohl $\text{tang } \frac{1}{2}(\pi + 2\varphi) . \sqrt{b}$ als $\text{tang } \varphi . \sqrt{b}$. Es ist aber $\text{tang } \frac{1}{2}(\pi + 2\varphi) = -\text{tang } (\frac{1}{2}\pi - \varphi) = -\cot \varphi$. Demnach ist, wenn $\text{tang } 2\varphi = \frac{2\sqrt{b}}{a}$ genommen wird,

$x = \text{tang } \varphi . \sqrt{b}$, und $x = -\cot \varphi . \sqrt{b}$.

Die Summe von den entgegengesetzten dieser Wurzeln ist $= (\cot \varphi - \text{tang } \varphi)\sqrt{b}$, das ist (Goniom. 45) $= 2 \cot 2\varphi . \sqrt{b} = \frac{2\sqrt{b}}{\text{tang } 2\varphi} = a$, wie es seyn muß (Gleichung I. 8.). Das Product ist $=$ $-\text{tang } \varphi . \cot \varphi . \sqrt{b} . \sqrt{b} = -b$.

4. Die Gleichung $x^2 - ax - b = o$ hat dieselben Wurzeln der Quantität nach mit der Gleichung $x^2 + ax - b = o$, aber entgegengesetzt. Setzt man demnach

Wurzeln möglich seyn sollen, einstimmig mit (Gleichung I. 4.)

$$\text{Da } a = \frac{2\sqrt{b}}{\sin 2\varphi} = \frac{\sqrt{b}}{\sin\varphi . \cos\varphi} \text{ (Goniom. 35),}$$

so sind die beiden Wurzeln der Gleichung, $\tan\varphi . \sqrt{b}$ und $\cot\varphi \sqrt{b}$. (eben daf. 14.).

2. Exempel. Es sey die Gleichung $x^2 - 64x + 720 = 0$ aufzulösen. Es ist

log b =	2,8573325	
log $\sqrt{b}$ =	1,4286662	
log 2 =	0,3010300	
− log a =	−1,8061800	
log sin 2φ =	9,9235162	$2\varphi = 56°59'5''$
		$\varphi = 28.29.32,5$

log sin φ =	9,6785562	
	9,6785562	
log a =	1,8061800	
	1,1632924	... I. 14, 5644

log cos φ =	9,9439300	
	9,9439300	
log a =	1,8061800	
	1,6940400	.. II. 49, 4356

Die Summe der beiden Wurzeln ist = 64; ihr Product, wie durch die Addition ihrer Logarithmen gleich erhellt, ist = 720.

Nach der zweyten Form der Wurzeln ist

log tg φ = 9,7346263	log cot φ = 0,2653737
log $\sqrt{b}$ = 1,4286662	log $\sqrt{b}$ = 1,4286662
log. I. = 1,1632925	log II. = 1,6940399

3. Die quadratische Gleichung sey

$$x^2 + ax - b = o.$$

Diese läßt sich nicht durch Hülfe des Sinus auflösen, weil der Sinus des Winkels 2φ für sie unmöglich wird. Man nehme aber die Formel 46 der Goniometrie

$$\text{tang } 2\varphi = \frac{2 \text{ tang } \varphi}{1 - \text{tang } \varphi^2},$$

und setze $\text{tang } \varphi = \frac{t}{r}$, $\text{tang } 2\varphi = \frac{f}{r}$, so ist

$$t^2 + \frac{2r^2}{f} t - r^2 = o.$$

Hält man diese Gleichung gegen die für x, so ist $t = x$; $\frac{2r^2}{f} = a$; $r^2 = b$, also $\text{tang } 2\varphi = \frac{2\sqrt{b}}{a}$, und $x = \text{tang } \varphi . \sqrt{b}$.

In diesem Ausdrucke liegt ein doppelter Werth. Ist 2φ der kleinste Winkel zu der Tangente f, so gehört dieselbe Tangente auch zu $\pi + 2\varphi$ (Goniom. 8.), und es ist x sowohl $\text{tang } \frac{1}{2}(\pi + 2\varphi) . \sqrt{b}$ als $\text{tang } \varphi . \sqrt{b}$. Es ist aber $\text{tang } \frac{1}{2}(\pi + 2\varphi) = -\text{tang } (\frac{1}{2}\pi - \varphi)$ $= -\cot \varphi$. Demnach ist, wenn $\text{tang } 2\varphi = \frac{2\sqrt{b}}{a}$ genommen wird,

$x = \text{tang } \varphi . \sqrt{b}$, und $x = -\cot \varphi . \sqrt{b}$.

Die Summe von den entgegengesetzten dieser Wurzeln ist $= (\cot \varphi - \text{tang } \varphi) \sqrt{b}$, das ist (Goniom. 45) $= 2 \cot 2\varphi . \sqrt{b} = \frac{2\sqrt{b}}{\text{tang } 2\varphi} = a$, wie es seyn muß (Gleichung I. 8.). Das Product ist $=$ $-\text{tang } \varphi . \cot \varphi . \sqrt{b} . \sqrt{b} = -b$.

4. Die Gleichung $x^2 - ax - b = o$ hat dieselben Wurzeln der Quantität nach mit der Gleichung $x^2 + ax - b = o$, aber entgegengesetzt. Setzt man demnach

$\text{tang}\, 2\varphi = \frac{2\sqrt{b}}{a}$, so ist $x = + \cot\varphi . \sqrt{b}$, und $x = - \text{tang}\, \varphi . \sqrt{b}$.

5. Die Auflösungen der beiden Fälle einer quadratischen Gleichung haben etwas übereinstimmendes und auch verschiedenes. Für die Gleichung $x^2 - ax + b = o$ wird $\sin 2\varphi = \frac{2\sqrt{b}}{a}$ gesetzt, und die beiden Wurzeln sind $+ \text{tang}\, \varphi . \sqrt{b}$ und $+ \cot\varphi . \sqrt{b}$. Für die Gleichung $x^2 + ax - b = o$ wird $\text{tang}\, 2\varphi = \frac{2\sqrt{b}}{a}$ genommen, und die beiden Wurzeln sind $+ \text{tang}\, \varphi . \sqrt{b}$, und $- \cot\varphi . \sqrt{b}$.

6. Für den Sinus eines dreyfachen Winkels ist die Formel (Goniometrie IV.)

$$\sin 3\varphi = 3\sin\varphi - 4\sin\varphi^3.$$

Es sey $\sin\varphi = \frac{x}{r}$, und $\sin 3\varphi = \frac{f}{r}$, so ist

$$x^3 - \tfrac{3}{4} r^2 x + \tfrac{1}{4} r^2 f = o.$$

Hiegegen halte man eine gegebene cubische Gleichung, worin das zweyte Glied fehlt,

$$x^3 - bx + c = o,$$

so ist $\frac{3}{4} r^2 = b$; $\frac{1}{4} r^2 f = c$, also $r = \sqrt{\frac{4b}{3}}$, und $\sin 3\varphi = \frac{3c}{2b}\sqrt{\frac{3}{b}} = \sqrt{\frac{27c^2}{4b^3}}$. Damit dieser Sinus möglich sey, muß $27c^2 < 4b^3$ seyn, welches die Bedingung der Möglichkeit aller drey Wurzeln ist, (Gleichung III. 13.). Auch darf b nicht negativ seyn, oder in der Gleichung das Vorzeichen + haben, da der Halbmesser $r = 2\sqrt{\frac{b}{3}}$ ist.

$x^3 = r^3 (tg\varphi^3 + 3\,tg\varphi + 3\cot\varphi + \cot\varphi^3)$, das ist

$$x^3 - 3r^2x - r^3(tg\varphi^3 + \cot\varphi^3) = 0.$$

Die Zusammenhaltung mit der Gleichung

$$x^3 - bx - c = 0$$

giebt $3r^2 = b$, und $r^3(tg\varphi^3 + \cot\varphi^3) = c$; also

$r = \sqrt{\frac{b}{3}}$, und $tg\varphi^3 + \cot\varphi^3 = \frac{3c}{b}\sqrt{\frac{3}{b}}$.

Da $tg\varphi^3 . \cot\varphi^3 = 1$, so ist die Summe und das Product der beyden unbekannten gegeben, und es ist

$$tang\,\varphi^3 = \frac{3c}{2b}\sqrt{\frac{3}{b}} \pm \sqrt{\left(\frac{27c^2}{4b^3} - 1\right)}$$ zu folge (Gleichung I. 1.) wo die Bedingung, daß $27c^2 > 4b^3$ sey, der Annahme gemäß ist. Man setze $\frac{3c}{2b}\sqrt{\frac{3}{b}} = sec\,A$; so ist $tang\,\varphi^3 = sec\,A + tang\,A = tang\,(45° + \frac{1}{2}A)$, (Goniometrie, II. 43). Nimmt man das eine Vorzeichen für $tang\,\varphi^3$, so gilt das andere für $\cot\varphi^3$.

Man setze $\sqrt[3]{tang\,(45° \pm \frac{1}{2}\,tang\,A)} = B$, so ist $x = r\,(tang\,B + \cot B)$, das ist $x = 2r\,cosec\,2B$ (Goniom. II. 45.), oder $x = cosec\,2B\sqrt{\frac{4b}{3}}$, oder auch

$$x = \frac{1}{\sin 2B}\sqrt{\frac{4b}{3}}.$$

11. Exempel. Die Gleichung sey

$$x^3 - 13{,}3592\,x - 24{,}6377 = 0.$$

Hier ist $b = 13{,}3592$; $c = 24{,}6377$, und die Berechnung, wie folget.

log c	= 4,3802112	l. b	= 3,32221
½ l. 6,75	= 0,4146519	½ l. b	= 1,66110
	4,7948631	l. b √ b	= 4,98332
	4,9833289		
l. sin 3φ	= 9,8115342	3φ	= 40° 23′
l. b	= 3,3222193	φ	= 13. 27.
l. 0,75	= 9,8750613	⅓π − φ	= 46. 32.
l. r²	= 3,4471580	⅓π + φ	= 73. 27.
l. r	= 1,7235790		
l. sin φ	= 9,3669878		
l. x′	= 1,0905668	x′	= 12, 31
l. sin (⅓π − φ)	= 9,8608344		
l. x″	= 1,5844134	x″	= + 38,4
l. sin (⅓π + φ)	= 9,9816518		
l. x‴	= 1,7052308	x‴	= − 50,7

Die Summe der beiden positiven Wurzeln ist = 72601, der negativen sehr genau gleich. Die Summ Logarithmen aller drey Wurzeln ist = 4, 3802110 cher von dem log. c fast gar nicht abweicht. Zur C heit der Berechnung ist diese Probe rathsam. Sie auf (Gleichung III. 5.).

In dem Artikel, Cardanische Regel, wird die hi Beyspiel gebrauchte Gleichung auf eine andere Art löset, die aber mühsamer ist.

10. In der Gleichung $x^3 - bx - c = 27c^2 > 4b^3$, so ist nur eine mögliche Wurzel vorh Man setze $x = r(\tang \varphi + \cot \varphi)$ so ist $x^3 = r^3(\tg \varphi^3 + 3\tg \varphi^2 \cot \varphi + 3\tg \varphi \cot \varphi^2 + c$

Weil $\cot \varphi = \frac{1}{\tang \varphi}$, so ist

$z^5 = r^5 (\text{tg}\,\varphi^5 + 3\,\text{tg}\,\varphi + 3\cot\varphi + \cot\varphi^5)$, das ist

$$x^3 - 3r^2x - r^3(\text{tg}\,\varphi^5 + \cot\varphi^5) = 0.$$

Die Zusammenhaltung mit der Gleichung

$$x^3 - bx - c = 0$$

giebt $3r^2 = b$, und $r^3(\text{tg}\,\varphi^5 + \cot\varphi^5) = c$; also

$r = \sqrt{\frac{b}{3}}$, und $\text{tg}\,\varphi^3 + \cot\varphi^3 = \frac{3c}{b}\sqrt{\frac{3}{b}}$.

Da $\text{tg}\,\varphi^3 . \cot\varphi^3 = 1$, so ist die Summe und das Product der beyden unbekannten gegeben, und es ist

$$\text{tang}\,\varphi^3 = \frac{3c}{2b}\sqrt{\frac{3}{b}} \pm \sqrt{\left(\frac{27c^2}{4b^3} - 1\right)}$$ zu folge (Gleichung I. 1.) wo die Bedingung, daß $27c^2 > 4b^3$ sey, der Annahme gemäß ist. Man setze $\frac{3c}{2b}\sqrt{\frac{3}{b}} = \text{sec}\,A$; so ist $\text{tang}\,\varphi^3 = \text{sec}\,A + \text{tang}\,A = \text{tang}\,(45° + \frac{1}{2}A)$, (Goniometrie, II. 43). Nimmt man das eine Vorzeichen für $\text{tang}\,\varphi^3$, so gilt das andere für $\cot\varphi^3$.

Man setze $\sqrt[3]{\text{tang}\,(45° \pm \frac{1}{2}\,\text{tang}\,A)} = B$, so ist $x = r(\text{tang}\,B + \cot B)$, das ist $x = 2r\,\text{cosec}\,2B$ (Goniom. II. 45.), oder $x = \text{cosec}\,2B\sqrt{\frac{4b}{3}}$, oder auch

$$x = \frac{1}{\sin 2B}\sqrt{\frac{4b}{3}}.$$

11. Exempel. Die Gleichung sey

$$x^3 - 13{,}3592\,x - 24{,}6377 = 0.$$

Hier ist $b = 13{,}3592$; $c = 24{,}6377$, und die Berechnung, wie folget.

log c	= 1,3916001	l. b	= 1,1257804
$\frac{1}{2}$ l. 6,75	= 0,4146519	$\frac{1}{2}$ l. b	= 0,5628902
	1,8062520	l b $\sqrt{b}$	= 1,6886706
	1,6886706	l. 4 : 3	= 0,1249387
l. sec A	= 0,1175814	l. 4b : 3	= 1,2507191
l. tg(45° − $\frac{1}{2}$ A)	= 9,6658245	$\frac{1}{2}$ l. 4b : 3	= 0,6253595
l. tg B	= 9,8886082	A	= 40° 17′ 15″
l. cosec 2B	= 0,0141315	$\frac{1}{2}$ A	= 20. 8. 37
$\frac{1}{2}$ l. 4 b : 3	= 0,6253595	45° − $\frac{1}{2}$ A	= 24. 51. 23
l. x	= 0,6394910	B	= 37. 43. 53
		2B	= 75. 27 46
		x	= 4,36004

In dem Artikel, Cardanische Regel, ist diese Gleichung unmittelbar nach jener Regel aufgelöset.

12. Die Gleichung $x^3 - bx + c = o$ hat dieselbe einzige Wurzel, welche $x^3 - bx - c = o$ hat, aber entgegengesetzt oder negativ.

13. Die Gleichung $x^3 + bx - c = o$ hat nur eine einzige mögliche Wurzel, wie auch b und c sich gegen einander verhalten mögen. Man setze $x = r(\text{tang}\,\varphi - \cot\varphi)$, so ist $x^3 + 3r^2x - r^3(\text{tang}\,\varphi^3 - \cot\varphi^3) = o$. Nun ist $3r^2 = b$, und $r^3(\text{tang}\,\varphi^3 - \cot\varphi^3) = c$, also $r = \sqrt{\frac{b}{3}}$, und $\text{tang}\,\varphi^3 = \frac{3c}{b}\sqrt{\frac{3}{b}}$. Hier ist der Unterschied zweyer unbekannten Größen gegeben, deren Product = 1 ist. Der Unterschied heiße der Kürze wegen d, so ist $\text{tang}\,\varphi^3 = \sqrt{(\frac{1}{4}d^2 + 1)} + \frac{1}{2}d$, und $\cot\varphi^3 = \sqrt{(\frac{1}{4}d^2 + 1)} - \frac{1}{2}d$, (Gleichung I. 2). Man setze $\frac{1}{2}d = (\text{tang}\,A$, so ist $\sqrt{(\frac{1}{4}d^2 + 1)} = \text{sec}\,A$, und $\text{tang}\,\varphi^3 = \text{sec}\,A + \text{tang}\,A = \text{tang}\,(45° + \frac{1}{2}A)$, so wie $\cot\varphi^3 = \text{sec}\,A - \text{tang}\,A = \text{tang}\,(45° - \frac{1}{2}A)$.

Ferner ſetze man

$\sqrt[3]{\text{tang}\,(45° - \frac{1}{2}A)} = \text{tang}\,B$, ſo iſt

$\sqrt[3]{\text{tang}\,(45° + \frac{1}{2}A)} = \text{cot}\,B$, und daher

$x = r\,(\text{cot}\,B - \text{tang}\,B)$, oder $x = 2r\,\text{cot}\,2B$.

Die Regel der Auflöſung iſt demnach: man ſuche

$\text{tang}\,A = \frac{3c}{2b}\sqrt{\frac{3}{b}}$, und $\text{tang}\,B = \sqrt[3]{\text{tang}(45° - \frac{1}{2}A)}$,

ſo iſt $x = 2\,\text{cot}\,2B.\sqrt{\frac{b}{3}}$.

14. Wenn man für die Sinus und Coſinus der Sectoren einer gleichſeitigen Hyperbel ſolche Tafeln hätte, wie für die Sinus und Coſinus der Kreisſectoren durch die Sinus und Coſinus ihrer Bogen, ſo könnte man die cubiſchen Gleichungen mit einer einzigen möglichen Wurzel eben ſo bequem auflöſen, als die mit drey Wurzeln mittelſt der trigonometriſchen Tafeln. Denn wenn a die halbe Axe der gleichſeitigen Hyperbel, x der Coſinus eines Sectors S, g der Coſinus des dreyfachen Sectors, in Beziehung auf a iſt, ſo iſt $x^3 - \frac{3}{4}a^2x - \frac{1}{4}a^2g = 0$, (Goniom. VIII.). Die gegebene Gleichung ſey $x^3 - bx - c = 0$, ſo giebt die Vergleichung $a = \sqrt{\frac{4b}{3}}$; $g = \frac{3c}{b}$. Es ſey $\frac{g}{a} = \text{cof hyp. } 3S$, und $\frac{x}{a} = \text{cof hyp. } S$ für die halbe Axe $= 1$, ſo iſt $\text{cof hyp. } 3S = \frac{3c}{2b}\sqrt{\frac{3}{b}}$, und

$x = \left(\sqrt{\frac{4b}{3}}\right)$. cof hyp. S. Hier iſt $27c^2 > 4b^3$, da der hyperboliſche Coſinus größer als die halbe Axe iſt.

15. Es ſey y der hyperboliſche Sinus eines Sectors S, und f der Sinus des Sectors 3 S für die halbe Axe a, ſo iſt $y^3 + \frac{3}{4}a^2y - \frac{1}{4}a^2f = 0$. Die gegebene

$\sin \frac{2(m+r)\pi}{2m} = -\sin \frac{2(m-r)\pi}{2m}$, weil die 2

kel zusammen den ganzen Umfang 2π ausmachen. her kann für

$$x = \cos \frac{2(m+r)\pi}{2m} + \sin \frac{2(m+r)\pi}{2m} \cdot \sqrt{-}$$

gesetzt werden

$$x = \cos \frac{2(m-r)\pi}{2m} - \sin \frac{2(m-r)\pi}{2m} \cdot \sqrt{-}$$

und es sind je zwey Werthe von

$$x = \cos \frac{2k\pi}{n} + \sin \frac{2k\pi}{n} \cdot \sqrt{-1},$$

wo k alle ganze Zahlen von 1 bis $\frac{1}{2}n$, nebst 0, bedeu und die Winkel nicht über zwey Rechte groß sind. $k = \frac{1}{2}n$ ist der zweyte Theil $= 0$, und es ist nur Werth von x vorhanden, nämlich -1, so wie für $k=$ auch nur ein Werth, $x = +1$ ist.

Es sey $n = 2m+1$; und $k = m+r$, so wiederum für

$$x = \cos \frac{(2m+r)\pi}{2m+1} + \sin \frac{(2m+r)\pi}{2m+1} \cdot \sqrt{-}$$

zu setzen

$$x = \cos \frac{2(m+1-r)\pi}{2m+1} - \sin \frac{2(m+1-r)\pi}{2m+1} \cdot \sqrt{-}$$

so daß je zwey Werthe von x sind

$$x = \cos \frac{2k\pi}{n} \pm \sin \frac{2k\pi}{n} \cdot \sqrt{-1},$$

wo k außer 0, die ganzen Zahlen von 1 bis $\frac{1}{2}(n-$ bedeutet.

Zweytens ſetze man $\cos n\varphi = -1$, ſo hat $n\varphi$ die Werthe π, 3π, 5π, 7π, etc. und $\sin n\varphi$ iſt $= 0$. Folglich giebt nun $\cos\varphi \pm \sin\varphi . \sqrt{-1}$, nebſt der einzigen möglichen Wurzel aus -1, die nämlich in dem Falle eines ungeraden n Statt hat, auch alle unmöglichen Wurzeln an. Bezeichnet man jede derſelben durch x, ſo iſt

$$x = \cos\frac{(2k+1)\pi}{n} \pm \sin\frac{(2k+1)\pi}{n} . \sqrt{-1},$$

wo für k alle ganzen Zahlen von 1 bis $n-1$, nebſt 0, zu ſetzen ſind. Nimmt man ſtatt der Winkel über zwey Rechte ihre Ergänzungen zu vier Rechten, ſo ſind je zwey Werthe,

$$1 = \cos\frac{(2k+1)\pi}{n} \pm \sin\frac{(2k+1)\pi}{n} . \sqrt{-1},$$

wo die Werthe von k alle ganze Zahlen von 1 bis $\frac{n-2}{2}$ oder bis $\frac{n-1}{2}$, für ein gerades oder für ein ungerades n, nebſt 0, ſind. Iſt n ungerade, ſo iſt für $2k+1 = n$, der Werth $x = -1$. Iſt n einfach gerade, ſo iſt für $2k+1 = \frac{1}{2}n$ der Werth $x = \pm 1 . \sqrt{-1}$; iſt n doppelt gerade, ſo iſt jede Wurzel zweytheilig.

Hieraus ſieht man, daß es gleichgültig iſt, ob in der Formel $\cos n\varphi \pm \sin n\varphi . \sqrt{-1}$ das obere oder das untere Vorzeichen gebraucht wird, um die Wurzeln aus $+1$ und -1 zu finden.

Mit dieſen Wurzeln verbinde man den Factor a^n, ſo liefert der Ausdruck, $a(\cos\varphi \pm \sin\varphi . \sqrt{-1})$ alle Wurzeln aus $\pm a^n$. Für $+a^n$ ſind die Werthe von φ, wie bey den Wurzeln aus $+1$, für $-a^n$, wie bey den Wurzeln aus -1 zu nehmen.

Exempel. Die Cubikwurzeln aus $+1$ ſind $+1$; $\cos 120° + \sin 120° . \sqrt{-1}$. Die Cubikwurzeln aus -1 ſind $\cos 60° \pm \sin 60° . \sqrt{-1}$, und $\cos 180°$

oder — 1. Sie sind jenen, gehörig genommen, gleich und entgegengesetzt.

Die Biquadratwurzeln aus ± 1 sind ± 1; und cos 90° ± sin 90°. $\sqrt{-1}$, das ist, $\pm\sqrt{-1}$. Aus — 1 sind sie cos 45° ± sin 45°. $\sqrt{-1}$, und cos 135° ± sin 135°. $\sqrt{-1}$

Die fünften Wurzeln aus + 1 sind I. + 1; II. cos 72° ± sin 72°. $\sqrt{-1}$; III. cos 144° ± sin 144°. $\sqrt{-1}$ Aus — 1 sind sie I. cos 36° ± sin 36°. $\sqrt{-1}$; II. cos 108° ± sin 108° $\sqrt{-1}$; III. cos 180° oder — 1

Da die Wurzeln der Gleichungen $x^n - a^n = 0$ und $x^n + a^n = 0$ solchergestalt bekannt sind, so werden auch die Factoren der Functionen $x^n - a^n$ dadurch gefunden.

Es hat nämlich, wenn ± p eine der Wurzeln x einer Gleichung ist, das Aggregat ihrer Glieder, für jeden Werth von x, den Factor (x ∓ p), (Gleichung VI. 13). Die Functionen $x^n - a^n$ und $x^n + a^n$ haben also einfache Factoren von der Form $x - a(\cos\varphi \pm \sin\varphi\sqrt{-1}$ Das Product von je zwey solchen Factoren ist = $x^2 - 2ax\cos\varphi + a^2$. Nämlich $x^n - a^n$ hat die Doppelfactoren von der Form $x^2 - 2ax \cdot \cos\frac{2k}{n}\pi +$ wo k alle ganze Zahlen von 1 bis $\frac{1}{2}n$ oder $\frac{1}{2}(n - 1$ zu Werthen hat. Die Function $x^n + a^n$ hat die Doppelfactoren von der Form $x^2 - 2ax\cos\frac{2k+1}{n}\pi +$ wo k alle ganze Zahlen von 1 bis $\frac{n-1}{2}$ oder $\frac{n-}{2}$ zu Werthen bekommt.

Exempel. Die Factoren von
$x^3 - a^3$ sind $x - a$; $x^2 - 2ax\cos\frac{1}{3}\pi + a^2$

$x^4 - a^4$ ſind $x - a;\ x^2 - 2ax\cos\frac{1}{4}\pi + a^2$
$x + a$

$x^5 - a^5$ ſind $x - a;\ x^2 - 2ax\cos\frac{2}{5}\pi + a^2$
$x^2 - 2ax\cos\frac{1}{5}\pi + a^2$

u. ſ. w.

Die Factoren von

$x^3 + a^3$ ſind $x^2 - 2ax\cos\frac{1}{3}\pi + a^2$
$x + a$

$x^4 + a^4$ ſind $x^2 - 2ax\cos\frac{1}{4}\pi + a^2$
$x^2 - 2ax\cos\frac{3}{4}\pi + a^2$

$x^5 + a^5$ ſind $x^2 - 2ax\cos\frac{2}{5}\pi + a^2$
$x^2 - 2ax\cos\frac{4}{5}\pi + a^2$
$x + a$.

u. ſ. w.

Wenn man dieſe Factoren in einander multipliciren will, um daraus das Binomium hervorzubringen ſo muß man die Sätze von der Summe und dem Producte der Cosinus aliquoter Theile des Kreisumfanges und Vielfachen deſſelben kennen, (Goniometrie, V.) Auch iſt der Satz, $2\cos A.\cos B = \cos(A + B).\cos(A - B)$ hier nöthig.

Die geometriſche Darſtellung dieſer Factoren liefert der Coteſiſche Lehrſatz.

VII. Zerlegung der dreytheiligen Function $x^{2n} - 2px^n + 1$ in quadratiſche Factoren.

Die Gleichung $x^{2n} - 2px^n + 1 = 0$ hat als quadratiſche Gleichung betrachtet die Wurzeln
$x^n = p \pm \sqrt{(p^2 - 1)}$, oder $p + \sqrt{(p^2 - 1)}$ und
$\frac{1}{p + \sqrt{(p^2 - 1)}}$. (Gleichung II. 7).

Es sey $p + \sqrt{(p^2 - 1)} = q$, so sind die Wurzeln q und $\frac{1}{q}$. Ist $p^2 > 1$, so läßt sich die Gleichung oder Function in zwey mögliche Factoren zerlegen, nämlich $x^n - q$ und $x^n - \frac{1}{q}$, und diese werden nach dem gleich vorher gewiesenen Verfahren in quadratische zerlegt.

Es sey $p < 1$, und werde deshalb durch $\cos \alpha$ ausgedruckt. Es ist also $x^n = \cos \alpha \pm \sin \alpha . \sqrt{-1}$. Da $(\cos \alpha \pm \sin \alpha . \sqrt{-1})^{\frac{1}{n}} = \cos \frac{\alpha}{n} \pm \sin \frac{\alpha}{n} . \sqrt{-1}$ ist, so ist $x = \cos \frac{\alpha}{n} \pm \sin \frac{\alpha}{n} . \sqrt{-1}$. Nun hat $\frac{\alpha}{n}$ weil der Winkel α durch seinen Cosinus gegeben wird, n verschiedene Werthe, und x erhält dadurch $2n$ Werthe, wie es seyn muß. Die verschiedenen Werthe dieser Winkel sind, wenn α den kleinsten der zu $\cos \alpha$ gehörigen Winkel bedeutet,

$$\frac{\alpha}{n}; \frac{2\pi \pm \alpha}{n}; \frac{4\pi \pm \alpha}{n}; \frac{6\pi \pm \alpha}{n}; \text{ etc.}$$

bis daß deren n sind. Diese sind alle kleiner als π. Oder auch

$$\frac{\alpha}{n}; \frac{2\pi + \alpha}{n}; \frac{4\pi + \alpha}{n} \ldots \frac{(2n-4)\pi + \alpha}{n}; \frac{(2n-2)\pi + n}{n},$$

wo der letzte mit $\frac{2\pi - \alpha}{n}$, der vorletzte mit $\frac{4\pi - \alpha}{n}$ u. s. f. einerley Cosinus hat. Die Winkel der letztern Reihe sind in der zweyten Hälfte größer als π. (Goniometrie, V.)

Man bezeichne jeden dieser Winkel allgemein durch φ, so ist

$$x = \cos\varphi + \sin\varphi . \sqrt{1}.$$

Die Function $x^{2n} - 2x^n . \cos\alpha + 1$ hat also n Paare Factoren, $x - \cos\varphi - \sin\varphi . \sqrt{-1}$, und $x - \cos\varphi + \sin\varphi . \sqrt{-1}$. Das Product je zweyer solcher ist

$$x^2 - 2x . \cos\varphi + 1.$$

Dieses ist ein quadratischer oder trinomischer Factor der Function $x^{2n} - 2x^n . \cos\alpha + 1$. Der Winkel φ erhält die vorher angegebenen n Werthe.

Exempel. Die Function $x^6 - 2x^3 . \cos\alpha + 1$ hat die Factoren.

$$x^2 - 2x . \cos\frac{\alpha}{3} + 1$$

$$x^2 - 2x . \cos\frac{2\pi - \alpha}{3} + 1$$

$$x^2 - 2x . \cos\frac{2\pi + \alpha}{3} + 1.$$

Die Function $x^8 - 2x^4 . \cos\alpha + 1$ hat die Factoren,

$$x^2 - 2x . \cos\frac{\alpha}{4} + 1$$

$$x^2 - 2x . \cos\frac{2\pi - \alpha}{4} + 1$$

$$x^2 - 2x . \cos\frac{2\pi + \alpha}{4} + 1$$

$$x^2 - 2x . \cos\frac{4\pi - \alpha}{4} + 1.$$

Es ist $\cos\frac{4\pi - \alpha}{4} = -\cos\frac{\alpha}{4}$ und $\cos\frac{2\pi + \alpha}{4} = -\cos\frac{2\pi - \alpha}{4}$.

Zur Übung in der Rechnung mit goniometrischen Formeln mag man diese und andere solche Functionen durch die

Multiplication ihrer Factoren herausbringen. Die dazu nöthigen Formeln finden sich in (Gonometrie, V.). Producte von Cosinus werden mittelst der Formel, $2 \cos A . \cos B = \cos (A + B) . \cos (A - B)$ zerlegt.

Die Function $x^{2n} - 2a^n x^n . \cos \alpha + a^{2n}$ hat die quadratischen oder trinomischen Factoren von der Form $x^2 - 2ax . \cos \varphi + a^2$. Denn man setze $x = az$, so ist jene Function $a^{2n}(z^{2n} - 2z^n . \cos \alpha + 1)$. Diese hat die quadratischen Factoren, $a^2(z^2 - 2z . \cos \varphi + 1)$, das ist, $x^2 - 2ax . \cos \varphi + a^2$.

Die geometrische Darstellung dieser Factoren wird in dem Artikel, **Cotesischer Lehrsatz**, gezeigt.

Zu vergleichen: Euleri Introd. in Anal. Infin. T. I. cap. 9.

Apollonische Parabel heißt die gewöhnliche Parabel, die aus dem Schnitte eines Kegels entsteht, zum Unterschiede von den Parabeln höherer Ordnungen, weil Apollonius von Pergä (250 J. v. Ch.) über die Parabel und die andern Kegelschnitte ein meisterhaftes Werk geschrieben hat, das älteste, was über die Kegelschnitte aus dem Alterthum zu uns gekommen ist. Von den höhern Parabeln, s. Parabel.

Apomecometria, die Kunst, die Entfernung eines Gegenstandes mittelbar zu messen. Der Ausdruck kommt kaum anders als in tabellarischen Abtheilungen der Materien in der Mathematik vor. Das Wort ist griechischen Ursprungs, zusammengesetzt aus ἀπο, von, ab, μηκος, Entfernung, Länge, und μετρειν, messen.

Aporema (Aporisma) ist bey einigen alten Geometern eine Aufgabe, deren Auflösung man nicht geben kann, ob es gleich auch nicht erweislich ist, daß sie unmöglich sey. Z. B. die Aufgabe von der Quadratur des Kreises. Das griechische Wort bedeutet eine aufgeworfene Frage, und Bedenklichkeit oder Verlegenheit. Marinus sagt in der Vorrede zu den Datis des Euklides, daß

Porimon iſt, was man bewerkſtelligen und conſtruiren oder darſtellen könne, aporimum ſey das Entgegengeſetzte, wie die Quadratur des Kreiſes, die man noch nicht gefunden habe, ob es gleich gewiß ſey, daß ſie gefunden werden könne.

Apothema, die ſenkrechte Linie von dem Mittelpuncte eines ordentlichen Vielecks auf eine Seite deſſelben. Von ἀπο und τίθημι.

Apotome (Reſiduale, reſiduum binomiale) iſt in der Arithmetik der Griechen der Unterſchied einer rationalen und quadratiſchen irrationalen Zahl, oder zweyer ſolchen irrationalen Zahlen. Es ſeyn b, c rationale Zahlen, und $b - \sqrt{c} = a$, oder $\sqrt{c} - b = a$, oder auch $\sqrt{b} - \sqrt{c} = a$, ſo iſt a eine Apotome. Das Wort bedeutet etwas abgeſchnittenes, von ἀποτεμνειν. Euklides Elemente X. 74. Größen, wie $\sqrt{b}$, wenn b rational iſt, heißen bey Euklides auch rationale, weil ihr Quadrat rational iſt, aber nur in der Potenz mit einer als Einheit gegebenen Größe commenſurabel, da b mit ihr, als Linie betrachtet, der Länge nach commenſurabel iſt.

Euklides unterſcheidet ſechs Gattungen der Apotome (Definitiones tertiae). Die erſte Apotome iſt, wenn $b - \sqrt{c} = a$, und $\sqrt{(b^2 - c)} : b = m : n$, dem Verhältniſſe zweyer rationalen Zahlen iſt. Die zweyte Apotome iſt, wenn $\sqrt{c} - b = a$, und $\sqrt{(c - b^2)} : \sqrt{c} = m : n$ iſt. Die dritte iſt, wenn $\sqrt{b} - \sqrt{c} = a$, und $\sqrt{(b - c)} : \sqrt{b} = m : n$ iſt. Die vierte iſt, wenn $b - \sqrt{c} = a$, und $\sqrt{(b^2 - c)} : b$ nicht ein rationales Verhältniß iſt. Die fünfte iſt, wenn $\sqrt{c} - b = a$, und $\sqrt{(c - b^2)} : \sqrt{c}$ nicht ein rationales Verhältniß iſt. Die ſechſte Apotome endlich iſt, wenn $\sqrt{b} - \sqrt{c} = a$, und $\sqrt{(b - c)} : \sqrt{b}$ nicht ein rationales Verhältniß iſt.

Die Apotomen unterſcheiden ſich von den Binomialen (quae ex binis nominibus) beym Euklides nur dadurch, daß in dieſen letzteren die Summe genommen wird. Auch macht Euklides ſechs Gattungen der Binomialen.

Die geometrische Behandlungsart der Binomialen und Apotomen beym Euklides ist sinnreich; nur muß man sich in seine Vorstellungsarten hinein studiren, welches wegen der Gewöhnung an unsere bequemere Rechnungsart mit irrationalen Größen Mühe macht. Die ersten algebraischen Schriftsteller in Europa haben sich mit der Erklärung der in dem 10ten Buche der Euklideischen Elemente vorgetragenen Lehre von den irrationalen Größen sehr viel beschäftigt. Es ist eine gute Übung, mit der Euklideischen Methode die neuere parallel gehen zu lassen.

Applicare, auf einander legen, bey Vergleichung ebener Figuren, ist, sie auf einander legen, um zu zeigen, daß sie gleich groß oder ungleich sind. Dieses Aufeinanderlegen ist eine bloße Vorstellung des Verstandes, wovon die sinnliche Darstellung nur ein Bild ist, wie alle gezeichneten Figuren nur Bilder sind, deren Originale ganz und gar in dem reinen Verstande allein sich befinden.

Applicare A ad B heißt bey ältern Schriftstellern, die Größe A durch die Größe B dividiren. Die Redensart hat ihren Ursprung aus der Geometrie. Eine geradlinichte Figur an eine Linie appliciren heißt über dieser Linie ein Rechteck oder Parallelogramm beschreiben, das jener Figur gleich ist (Eucl. Elem. VI. 25. ſ. X. 23). Die Figur sey ein Rechteck, dessen Seiten a, b sind, die gegebene Seite sey c, so ist die zweyte Seite des Rechtecks, das jenem gleich ist, die vierte Proportional-Linie zu c, a, b, das ist $\frac{ab}{c}$. Das gegebene Rechteck an die gegebene Linie c zu appliciren erfordert also arithmetisch die Division desselben durch die Linie c.

Applicare lineam rectam in circulo vel curva ist eine gerade Linie in der krummen Linie so legen, daß sie mit ihren Endpuncten in den Umfang derselben falle, etwa in einen gegebenen Punct dieses Umfanges.

Applicate (Ordinate) iſt eine gerade Linie, die in einer krummen Linie parallel mit einer gegebenen Linie an den Umfang zwiſchen zwey Puncten der krummen Linie gezogen, und nebſt allen andern ſolchen Parallelen von einem Durchmeſſer der krummen Linie halbirt wird. Der Durchmeſſer heißt die Axe, wenn die Applicaten unter einem rechten Winkel geſchnitten werden, ſonſt ein Durchmeſſer. Dieſe Erklärung giebt Apollonius in ſeinem Werke über die Kegelſchnitte. Die Neuern, als Euler, Cramer, nennen Applicate oder Ordinate eine gerade Linie, die von irgend einem Puncte einer krummen Linie unter einem beſtimmten Winkel (am gewöhnlichſten einem Rechten) an eine der Lage nach gegebene gerade Linie, die Abſciſſenlinie, gezogen wird. Die Applicaten mögen auf beiden Seiten der Abſciſſenlinie gleich oder ungleich ſeyn; es mögen auf jeder Seite eine oder mehrere Applicaten, nach der Anzahl der Zweige der krummen Linie, vorhanden ſeyn, auf beiden Seiten gleich oder ungleich viele; auch auf einer Seite gar keine. Dieſe Abänderung des Begriffs der Applicaten war nöthig, um durch die Veränderungen in der Lage der Abſciſſenlinie und der Applicaten alle Verwandlungen der Gleichung, welche die Natur einer krummen Linie ausdrückt, zu erhalten, und daraus ihre Eigenſchaften herzuleiten.

Approximatio, ſ. Näherung.

Arbelus, ein ſichelförmiger Raum zwiſchen drey ſich berührenden Kreiſen. Es iſt (Fig. 30. Tab. II.) ABC ein Halbkreis, auf deſſen Durchmeſſer AC irgend ein Punct E genommen wird, um über AE und EC die ſich einander und den erſtern Kreis berührenden Halbkreiſe ADE, EFC zu beſchreiben. Hierauf werde um den Mittelpunct G ein Kreis beſchrieben, der jene drey Kreiſe berührt, ferner ein Kreis um H, der die Halbkreiſe ABC, ADE und den um G berührt, dann ein Kreis um J, der jene beiden, und den um H berührt, noch ein Kreis um K der die beiden erſtern und den um J berührt, u. ſ. f. Von den Mittelpuncten dieſer Kreiſe werden die ſenkrech-

ten auf AC gezogen, Gg, Hh, Ji, Kk, etc. so ist Gg gleich dem Durchmesser des Kreises um G; Hh dem Doppelten des Durchmessers des Kreises um H; Ji dem Dreyfachen des Durchmessers des Kreises um J; Kk dem Vierfachen des Durchmessers des Kreises um K, u. s. f. Den Beweis dieses Satzes liefert Pappus in Collect. math. L. V. propos. 16. Er sagt vorher, daß es ein alter Satz sey, der sich in einigen Büchern finde. Die berührenden Kreise, welche nach einander in dem Raume zwischen den dren Kreisen ADE, CFE, BDF auf gleiche Art wie jene beschrieben werden, haben dieselben Verhältnisse ihrer Durchmesser zu den Abständen ihrer Mittelpuncte von AC.

Das Wort Arbelus bedeutet im Griechischen ein gekrümmtes Messer, desgleichen sich die Schuster bedienen.

Archimedeische Spirallinie, s. Spirallinie.

Archimetria, eine Benennung für die Elementar-Geometrie, welche Weigel in der Philosophia mathematica derselben giebt, weil sie die Gründe enthält, nach welchen alle Größen gemessen werden können.

Area s. Flächenraum.

Arithmetik ist die Wissenschaft, welche sich mit den Formen und den Verknüpfungen der Zahlen beschäftigt, insbesondere zu dem Zwecke, die Erfindung des Unbekannten aus dem Bekannten oder Gegebenen daraus herzuleiten. Von dem griechischen Worte, ἀριθμος, Zahl.

Die gemeine Arithmetik enthält die leichtern Fälle der Verbindungen der Zahlen, und die praktischen Anwendungen. Jene sind die bekannten vier Species der Rechenkunst in ganzen und gebrochnen Zahlen, die Ausziehung der Quadrat- und Cubikwurzeln, (gewöhnlich nur in mathematischen Lehrbüchern), die Lehre von den Proportionen, von den leichtesten Progressionen, und die Anweisung zum Gebrauch der Logarithmen, deren Berechnung aber in die mathematische Analysis gehört.

Die **höhere Arithmetik** begreift die Unterſuchungen ber die Eigenſchaften der Zahlen, ſo fern ſie allgemein, hne Rückſicht auf ein beſonderes Numerations-Syſtem etrachtet werden. Dahin gehören die Lehren in den ier arithmetiſchen Büchern der Euklideiſchen Elemente . Zuſatz über die Arithmetik der Alten), die Zerfällung er ganzen Zahlen in Factoren und Ausſonderung der rimzahlen, die Zerlegung einer ganzen Zahl in alle mögchen ganzen Theile, oder in Theile von einer gewiſſen orm als in Quadrate, in Trigonalzahlen; die continuirchen Brüche (Kettenbrüche); die Unterſuchungen über ie Eigenſchaften der Zahlen, und mancherley Formen erſelben, wohin auch die befreundeten und vollſtändigen ahlen gehören; die Verfertigung der magiſchen Quarate, die Combinirung von Zahlenperioden, von welchen n der Chronologie eine Anwendung vorkommt, u. m. Dieſe machen einen Theil der mathematiſchen Analyſis aus, ne höhere Arithmetik, welche die Größen als unbeſtimmte Zahlen betrachtet, und ſie auch wie die gemeine rithmetik mit einander verbindet. — Die Unterſuchunen aus der höhern Arithmetik ſind größtentheils in den kademiſchen Sammlungen zerſtreut. Zwey neuere wichige Werke ſie betreffend ſind: Eſſai d'une Théorie des ombres, par A. M. le Gendre, à Paris, An VI. nd Disquiſitiones arithmeticae, auctore C. F. Gauſs. ipſiae 1801.

Die **theoretiſche Arithmetik** hat zum Hauptzwecke, ie Lehrſätze von den Verbindungen und Eigenſchaften der ahlen im Allgemeinen zu entwickeln und zu erweiſen. Der Vortrag der Arithmetik in den mathematiſchen Lehrbüchern pflegt dahin gerichtet zu ſeyn, wo die Anwendungen ur zur Erläuterung dienen.

Die **praktiſche, techniſche oder bürgerliche Arithmetik** iſt eine Anleitung zu der Kunſt, ſicher, bequem und eſchwind in allen Fällen zu rechnen. Dieſe benenne man ur Unterſcheidung mit dem deutſchen Namen: **Rechenunſt.** Von dieſer in dem Artikel: Rechenkunſt.

Die numerische Rechenkunst (Arithmetica numerosa) lehrt die Rechnung mit bestimmten Zahlen, die auf die bekannte Art durch Zahlziffern ausgedruckt werden.

Die *Arithmetica speciosa* zeigt, wie Rechnungen, ohne Rücksicht auf eine bestimmte Zahlgröße, zufolge der Bedingungen der Aufgabe, durch allgemeine Symbole oder Zeichen gemacht werden. Vieta, der den Gebrauch der Buchstabenzeichen allgemein für alle Größen, sowohl bekannte als unbekannte, einführte, nannte dieselben Species, weil sie die Zahlgrößen im Allgemeinen, als Arten, darstellen. Die Juristen nennen ihre erdichteten allgemeinen Personen, als Cajus, Sempronius, ebenfalls Species. (s. Buchstabenrechnung.)

Allgemeine Arithmetik (Arithmetica universalis) ist der Titel eines schätzbaren elementarischen Werks einer höhern Gattung über Algebra und die Anwendung derselben auf die Geometrie, von Newton, welches er zum Leitfaden seiner Vorlesungen als Professor zu Cambridge gebraucht hatte. Die erste Ausgabe von 1707 zu Cambridge ist ohne Wissen des Verfassers veranstaltet; die zweyte 1722, ist von ihm verbessert. Diese hat 's Gravesande zu Leiden 1732 mit einigen Abhandlungen aus den Englischen Transactionen vermehrt abdrucken lassen. Eine mit vielen Anmerkungen versehene Ausgabe von J. Castillion ist zu Amsterdam 1761 in zwey Quartbänden herausgekommen.

Arithmetik des Unendlichen ist die Benennung, welche Wallis seiner Methode unendliche Reihen zu summiren gab. Das Werk, worin er diese sinnreiche Erfindung vortrug, erschien zu Oxford 1656. (200 S. in 4), und ist in dem ersten Theile seiner Werke befindlich, wo die Anzahl der Sätze dieselbe wie in der ersten Ausgabe ist. Wallis ist der erste, der in die Theorie der Reihen und ihre Summirung tiefer eindrang, da man vor ihm nur einzelne Fälle aufzulösen Mittel gefunden hatte. Er machte besonders davon Anwendung auf die Berechnung krummlinichter Flächen und körperlicher Räume. Seine Me-

thode, gewisse Reihen zu interpoliren, wodurch er zu einer merkwürdigen Formel für den Inhalt des Kreises gelangte, ist von einer ganz besondern Art. Doch giebt die Integralrechnung, welche mit der Differentialrechnung die allgemeinste Arithmetik des Unendlichen ist, leichtere und allgemeinere Methoden an, als die von Wallis gebrauchten, lehrt auch vieles, was durch diese nicht erreichbar ist.

Politische Rechenkunst ist die Anwendung auf Rechnungsfälle in der Verwaltung eines Staats. S. an ihrem Orte in der zweyten Abtheilung dieses Werks.

Arithmetik der Harmonie ist die Vergleichung der musikalischen Intervalle durch zugehörige Zahlen. S. Ton, Ton-Intervall, Tonleiter in der zweyten Abtheilung.

Errathende Rechenkunst (Arithmetica divinatoria) ist die Kunst durch Rechnung verschiedenes aus gewissen Angaben dem Scheine nach zu errathen. Sie dient bloß zur Belustigung, s. an ihrem Orte.

Logarithmische Arithmetik ist diejenige, nach welcher man sich der Logarithmen zur großen Abkürzung der Rechnung bedient. Diesen Titel führt der große Canon der Logarithmen von Vlacq, Gouda 1628 Fol. s. Logarithmen.

Tabularische Arithmetik, die Rechnung mit Hülfe mancherley Tafeln, als einer Tafel der Factoren zusammengesetzter Zahlen, der Primzahlen, der Vielfachen der Zahlen bis zum Neunfachen, der Quadrate, der Würfel, besonders der Logarithmen, und der trigonometrischen Zahlen, s. Tafel.

Instrumentale Arithmetik, die Rechnung vermittelst gewisser Werkzeuge. Dergleichen sind die Rechentafel oder der Abacus der Alten; die Rechenpfennige, die aufgereiheten Kugeln der Chineser, die Neperischen Rechenstäbe, Reihers Sexagenal-Stäbe, Scheffelts mechanischer Maaßstab und Rechenstab, verschiedene Arten von Rechenscheiben oder Rechenwalzen, besonders die Rechenmaschinen. Von allen diesen handelt der Artikel, Instrumentale Arithmetik.

Die **numeriſche Rechenkunſt** (Arithmetica numeroſa) lehrt die Rechnung mit beſtimmten Zahlen, die auf die bekannte Art durch Zahlziffern ausgedruckt werden.

Die *Arithmetica ſpecioſa* zeigt, wie Rechnungen, ohne Rückſicht auf eine beſtimmte Zahlgröße, zufolge der Bedingungen der Aufgabe, durch allgemeine Symbole oder Zeichen gemacht werden. Vieta, der den Gebrauch der Buchſtabenzeichen allgemein für alle Größen, ſowohl bekannte als unbekannte, einführte, nannte dieſelben Species, weil ſie die Zahlgrößen im Allgemeinen, als Arten, darſtellen. Die Juriſten nennen ihre erdichteten allgemeinen Perſonen, als Cajus, Sempronius, ebenfalls Species, (ſ. Buchſtabenrechnung.)

Allgemeine Arithmetik (Arithmetica univerſalis) iſt der Titel eines ſchätzbaren elementariſchen Werks einer höhern Gattung über Algebra und die Anwendung derſelben auf die Geometrie, von Newton, welches er zum Leitfaden ſeiner Vorleſungen als Profeſſor zu Cambridge gebraucht hatte. Die erſte Ausgabe von 1707 zu Cambridge iſt ohne Wiſſen des Verfaſſers veranſtaltet; die zweyte 1722, iſt von ihm verbeſſert. Dieſe hat 's Gravesande zu Leiden 1732 mit einigen Abhandlungen aus den Engliſchen Tranſactionen vermehrt abdrucken laſſen. Eine mit vielen Anmerkungen verſehene Ausgabe von J. Caſtillion iſt zu Amſterdam 1761 in zwey Quartbänden herausgekommen.

Arithmetik des Unendlichen iſt die Benennung, welche Wallis ſeiner Methode unendliche Reihen zu ſummiren gab. Das Werk, worin er dieſe ſinnreiche Erfindung vortrug, erſchien zu Oxford 1656. (200 S. in 4.) und iſt in dem erſten Theile ſeiner Werke befindlich, die Anzahl der Sätze dieſelbe wie in der erſten Ausgabe. Wallis iſt der erſte, der in die Theorie der Reihen ihre Summirung tiefer eindrang, da man vor ihm einzelne Fälle aufzulöſen Mittel gefunden hatte. Er machte beſonders davon Anwendung auf die Berechnung krummlinichter Flächen und körperlicher Räume. Seine

metik; die Zahlenrechnung hieß Logistik. Ihre unbequeme Bezeichnungsart der Zahl erschwerte ihnen die Rechnungen sehr. Sie mußten die Rechnungen mehr im Kopfe machen, als wir es nöthig haben, und sich mit sinnlichen Hülfsmitteln helfen, dergleichen Steinchen und die Rechentafel (abacus) waren. Von den zum Rechnen gebrauchten Steinchen kommen im Lateinischen die Redensarten her, calculos ponere, subducere. Im Griechischen ist ψηφος ein Steinchen, und ψηφιζειν, rechnen, wofür aber auch noch ein anderes Wort vorhanden ist.

Die Alten haben sich vorzüglich mit den Formen und Verhältnissen der Zahlen beschäftigt. Sie betrachteten Arithmetik und Geometrie als bloße beschauliche Gegenstände, ohne auf ihre Anwendungen in bürgerlichen Geschäften zu denken, oder wenigstens einen Werth darauf zu legen. Die ägyptischen Priester oder Gelehrten scheinen den Eigenschaften der Zahlen sehr nachgespürt, und darin geheime Beziehungen auf die Einrichtungen der Welt gesucht, oder daraus eine geheime Zeichensprache gebildet zu haben, um den Uneingeweihten ihre Kenntnisse zu verstekken, und dadurch ehrwürdiger zu machen. Denn Pythagoras, der sich in der ägyptischen Gelehrsamkeit hatte unterrichten lassen, und seine Nachfolger, webten in den Vortrag ihrer Philosophie, wenigstens für die exoterischen Schüler oder Liebhaber, vieles Symbolische aus der Arithmetik ein. (Proclus in primum libr. Eucl. l. c. 8.) Als der wahre Sinn, den die Eingeweihten der ältern Schule gekannt hatten, verloren gegangen war, mögen die späteren Anhänger dieser Partey die arithmetischen Einkleidungen wörtlich genommen und mit spitzfindigen, phantastischen Einfällen vermehrt haben, wie es in andern Fällen auch gegangen ist. Galilei glaubt (Syst. cosm. p. 3.), daß die Pythagoräer ihre mystischen arithmetischen Lehren nur dem großen Haufen hingeworfen hätten, um ihre Kenntnisse von den tiefern Eigenschaften der Zahlen und Irrationalgrößen sicherer geheim zu halten, deren Bekanntmachung unter Androhung harter Strafen in der künftigen Welt verboten gewesen sey.

Arithmetik der Brüche, ſ. Bruchrechnung.

Arithmetik der Irrational Zahlen. (Arithmetica Incommenſurabilium ſ. Surdorum), ſ. Irrationalgrößen.

Arithmetik, dekadiſche oder decimale; dodekaſche (Duodecimale); dyadiſche, pentadiſche ſexagenale oder ſexageſimale, tetradiſche, ſ. Zahlenſtem, und die Artikel, Dekadik, Dodekadik, Dyadik, Pentadik, Sexageſimalrechnung, Tetraktys.

Geſchichte der Arithmetik.

Wahrſcheinlich iſt von der Arithmetik, wie von mehrern Kenntniſſen, der Urſprung bey den Indiern anzunehmen allein es fehlt uns an Nachrichten darüber. Wir haben dieſem Volke unſere Bezeichnungsart der Zahlen zu danken. Ägypten rühmte ſich in der Arithmetik die Lehrmeiſterin anderer Nationen zu ſeyn, und nannte ſeinen Theut oder Thot als Erfinder der Arithmetik und Geometrie. Wie man in dem Alterthume die Erfindung der drey älteſten Wiſſenſchaften, der Arithmetik, Geometrie und Aſtronomie, vertheilt habe, ſieht man aus einer Stelle in dem Leben des Pythagoras von Porphyris, wo geſagt wird, daß dieſer die mathematiſchen Wiſſenſchaften von den Ägyptern, Chaldäern und Phöniziern der Sage nach erlernt habe. Denn die Ägypter hätten ſich von uralten Zeiten her mit der Geometrie beſchäftigt, die Phönizier mit Rechnen, die Chaldäer mit der Betrachtung des Himmels. Die Phönizier oder die Tyrier haben vermuthlich wegen ihrer Handlungsgeſchäfte ſehr früh mancherley Rechnungsarten gefunden. Proklus ſagt in ſeinem Commentar über das erſte Buch des Euklides, daß bey ihnen wegen des Handels die wiſſenſchaftliche Kenntniß der Zahlen ihren Urſprung genommen habe. Strabo führt dieſes auch als die zu ſeiner Zeit gewöhnliche Meynung an.

Die Arithmetik der Alten hatte eine ganz andere Geſtalt als die der Neuern. Allgemeine Unterſuchungen über Verhältniſſe und Formen der Zahlen hießen bey ihnen Arith-

metik: die Zahlenrechnung hieß Logiſtik. Ihre unbequeme Bezeichnungsart der Zahl erſchwerte ihnen die Rechnungen ſehr. Sie mußten die Rechnungen mehr im Kopfe machen, als wir es nöthig haben, und ſich mit ſinnlichen Hülfsmitteln helfen, dergleichen Steinchen und die Rechentafel (abacus) waren. Von den zum Rechnen gebrauchten Steinchen kommen im Lateiniſchen die Redensarten her, calculos ponere, ſubducere. Im Griechiſchen iſt ψηφος ein Steinchen, und ψηφιζειν, rechnen, wofür aber auch noch ein anderes Wort vorhanden iſt.

Die Alten haben ſich vorzüglich mit den Formen und Verhältniſſen der Zahlen beſchäftigt. Sie betrachteten Arithmetik und Geometrie als bloße beſchauliche Gegenſtände, ohne auf ihre Anwendungen in bürgerlichen Geſchäften zu denken, oder wenigſtens einen Werth darauf zu legen. Die ägyptiſchen Prieſter oder Gelehrten ſcheinen den Eigenſchaften der Zahlen ſehr nachgeſpürt, und darin geheime Beziehungen auf die Einrichtungen der Welt geſucht, oder daraus eine geheime Zeichenſprache gebildet zu haben, um den Uneingeweihten ihre Kenntniſſe zu verſtekken, und dadurch ehrwürdiger zu machen. Denn Pythagoras, der ſich in der ägyptiſchen Gelehrſamkeit hatte unterrichten laſſen, und ſeine Nachfolger, webten in den Vortrag ihrer Philoſophie, wenigſtens für die exoteriſchen Schüler oder Liebhaber, vieles Symboliſche aus der Arithmetik ein. (Proclus in primum libr. Eucl. l. c. 8.) Als der wahre Sinn, den die Eingeweihten der ältern Schule gekannt hatten, verloren gegangen war, mögen die ſpäteren Anhänger dieſer Parteyen die arithmetiſchen Einkleidungen wörtlich genommen und mit ſpitzfindigen, phantaſtiſchen Einfällen vermehrt haben, wie es in andern Fällen auch gegangen iſt. Galilei glaubt (Syſt. coſm. p. 3.), daß die Pythagoräer ihre myſtiſchen arithmetiſchen Lehren nur dem großen Haufen hingeworfen hätten, um ihre Kenntniſſe von den tiefern Eigenſchaften der Zahlen und Irrationalgrößen ſicherer geheim zu halten, deren Bekanntmachung unter Androhung harter Strafen in der künftigen Welt verboten geweſen ſey.

Die Pythagoräer haben mancherley Formen der Zahlen erdacht, die Polygonalzahlen (als dreyeckige, viereckige u. ſ. f.) und die Pyramidalzahlen; die ebenen und körperlichen; die vollkommenen oder vollſtändigen, und ihr Gegentheil, die überſchießenden und mangelhaften Zahlen. Es war dies eine Verknüpfung der Arithmetik mit der Geometrie. Durch den nach Pythagoras genannten geometriſchen Lehrſatz kamen ſie auf die Frage, ein Zahlenquadrat mit rationaler Wurzel aus zwey ſolchen Quadraten zuſammenzuſetzen, wovon ſie auch die Auflöſung fanden, welche Proklus in ſeinem gedachten Commentar uns aufbehalten hat. Sie haben alſo den Grund zu der unbeſtimmten Analytik gelegt.

Dieſe Philoſophen erfanden auch die Berechnung der muſikaliſchen Verhältniſſe, welche ſich auf feine Beobachtungen und Vergleichungen gründet. Die Entdeckung wird dem Pythagoras ſelbſt zugeſchrieben. Die Lehre von der Zuſammenſetzung und Theilung der Verhältniſſe mußte ihnen dazu ſehr geläufig ſeyn, da hier einige kleine Unterſchiede in den Intervallen vorkommen. Ein gewiſſes kleines Intervall heißt noch jetzt das pythagoriſche Komma, (ſ. Ton, in der zweyten Abtheilung).

Der Nachricht des Boëthius (in ſeiner Geometrie, am Ende) zufolge haben die Pythagoräer eine Bezeichnung der Zahlen, wie die unſrige iſt, gehabt, und mit dieſen Zahlzeichen gerechnet. Er nennt ihre Zeichen Apices vel Characteres. Pythagoras, oder einer ſeiner Nachfolger, muß die Bezeichnungsart von den Indiern bekommen haben, da es nicht möglich iſt, daß die Indier ſie von einer kleinen Anzahl geheimnißvoller Menſchen ſollten erhalten haben. In dem Artikel, Zahlzeichen, wird hievon umſtändlicher gehandelt werden.

Die Rechnung mit Zahlen machte den Alten viele Mühe, weil ſie unſere Bezeichnung nicht hatten. Archimedes konnte die Berechnung des Umfanges eines Kreiſes nicht weiter treiben, als bis zu den Gränzen $3\frac{1}{7}$ und $3\frac{10}{71}$, den Durchmeſſer zur Einheit genommen. Um eine gewiſſe ſehr große Zahl auszudrücken, nahm er eine geometriſche

rn, 1557. u. m. Die Beweiſe des Verfahrens bei nungen mit Ziffern wurden nicht ſo ausführlich ge- 1, als jetzt gewöhnlich iſt, weil es ſich aus dem mit enmarken leicht ergab. Die Beweiſe wurden über- t gewöhnlich weggelaſſen. Bey Vergleichung und mmenſetzung der Verhältniſſe berief man ſich auf Eu- s Elemente In Stifels Arithmetica integra ei- vorzüglichen Werke aus dem 16ten Jahrhundert, fin- an die erſten Begriffe von Logarithmen, auch die Bi- alcoefficienten, und die magiſchen Quadrate. Die rn ſind zwar älter, da Emanuel Moskopulus im 14ten 15ten Jahrhundert ein Buch darüber verfaßt hat; ſie en aber noch bis zu Stifels Zeit wenig bekannt ge- n ſeyn.

dem 16ten Jahrhundert verdankt man die ausführliche chnung der trigonometriſchen Linien, welche große andtheit in der Rechnung mit Irrationalgrößen, und nerkſamkeit auf Rechnungsvortheile, bey den damah- weitläufigen Methoden dieſer Rechnung erforderte. Regeln, welche man in den Rechenbüchern jener Zeit die Annäherung zu irrationalen Wurzeln antrifft, ſind unbequem, oder laſſen es bey einer ſehr mäßigen An- rung bewenden. William Buckley in England, der 1550 geſtorben ſeyn mag, gab die Regel, dem drat ſechs Nullen anzuhängen, und die gefundene rzel durch 1000 zu dividiren.

Die Anwendungen der Rechenkunſt auf Geſchäfte des inen Lebens beſtanden zu dieſer Zeit in der Regel de de Quinque, ꝛc. der Kettenregel, der Geſellſchafts- nung, Alligationsrechnung, zuſammengeſetzter Zins- nung. Die Kettenregel trifft man in des Peter Apianus 17 und 1543), und in Simon Jacob von Coburgk Re- buche an. Der letztere ſagt, ſie könne gründlich durch poſitionem proportionum erwieſen werden, wel- er der Kürze wegen unterlaſſe. Käſtner hat die Ket- egel bey den Rechenmeiſtern des 16ten Jahrhunderts t angetroffen. Geſchichte der Mathematik. Th. I.

sehr feine Untersuchungen über gewisse Formen der Zah
zur unbestimmten Analytik gehörig, (s. Algebra und
bestimmte Analytik.). Zu diesem Werke gehört noch
scharfsinnige Abhandlung über die Polygonal-Zahl
Im sechsten Jahrhundert schrieb Boethius zwey Bü
von der Arithmetik, welche das Werk des Nikomachus
Abkürzungen und Verbesserungen enthalten.

Nach der Einführung der jetzt gebräuchlichen Zahl
chen in Europa, die um das Ende des zehnten Jahrh
derts geschah, (s. Zahlzeichen) änderte sich die ganze
stalt der Arithmetik, wiewohl langsam In England
förderte ihre Verbreitung Johannes de Sacro-Bosco (
Holywood, dem jetzigen Hallifax) durch sein Buch,
gorismus seu Arithmetica introductio, die zu Ve
dig 1523 gedruckt erschienen ist. Dieser zu seiner
und noch lange nachher sehr berühmte Mann starb 12
Seines Zeitgenossen, des Jordanus Nemorarius, W
über die Arithmetik ist eine theoretische Abhandlung n
der alten Form. Es ist 1496 zu Paris, und 1514
selbst, ganz mit gothischer Schrift, gedruckt. Barla
aus Calabrien, im 14ten Jahrhundert, schrieb eine Ari
metik, worin er ihre gewöhnlichen Operationen erwi
Das Werk ist 1600 zu Paris griechisch und lateinisch
ausgegeben. Am Ende des 15ten Jahrhunderts trug
Minorit, Lucas Pacioli dal Borgo san Sepolcro aus
vorhandenen Schriften über die Arithmetik, Algebra u
Geometrie ein Werk zusammen, das die damahligen Ken
nisse in der Arithmetik ziemlich zu enthalten scheint,
Algebra). Neben der theoretischen Lehre ist auch vieles v
der kaufmännischen Rechnung darin enthalten.

Im 16ten Jahrhundert pflegte man noch die Re
nung mit Marken (Rechenpfennigen) auf und zwisch
parallelen geraden Linien der Rechnung mit Ziffern zuzu
sellen, daher man in diesem Zeitraume mehrere Rechenb
cher antrifft, welche beide Rechnungsarten lehren, als
Adam Rise Rechnung auf den Linien und Federn, w
ches lange Zeit ein classisches Buch gewesen ist; Sim
Jacob von Coburgk Rechenbuch auf den Linien und

Ziffern, 1557. u. m. Die Beweiſe des Verfahrens bei Rechnungen mit Ziffern wurden nicht ſo ausführlich gegeben, als jetzt gewöhnlich iſt, weil es ſich aus dem mit Rechenmarken leicht ergab. Die Beweiſe wurden überhaupt gewöhnlich weggelaſſen. Bey Vergleichung und Zuſammenſetzung der Verhältniſſe berief man ſich auf Euklides Elemente In Stifels Arithmetica integra einem vorzüglichen Werke aus dem 16ten Jahrhundert, findet man die erſten Begriffe von Logarithmen, auch die Binomialcoefficienten, und die magiſchen Quadrate. Die letztern ſind zwar älter, da Emanuel Moskopulus im 14ten oder 15ten Jahrhundert ein Buch darüber verfaßt hat; ſie werden aber noch bis zu Stifels Zeit wenig bekannt geweſen ſeyn.

Dem 16ten Jahrhundert verdankt man die ausführliche Berechnung der trigonometriſchen Linien, welche große Gewandtheit in der Rechnung mit Irrationalgrößen, und Aufmerkſamkeit auf Rechnungsvortheile, bey den damahligen weitläufigen Methoden dieſer Rechnung erforderte. Die Regeln, welche man in den Rechenbüchern jener Zeit für die Annäherung zu irrationalen Wurzeln antrifft, ſind noch unbequem, oder laſſen es bey einer ſehr mäßigen Annäherung bewenden. William Buckley in England, der um 1550 geſtorben ſeyn mag, gab die Regel, dem Quadrat ſechs Nullen anzuhängen, und die gefundene Wurzel durch 1000 zu dividiren.

Die Anwendungen der Rechenkunſt auf Geſchäfte des gemeinen Lebens beſtanden zu dieſer Zeit in der Regel de Tri, de Quinque, ꝛc. der Kettenregel, der Geſellſchaftsrechnung, Alligationsrechnung, zuſammengeſetzter Zinsrechnung. Die Kettenregel trifft man in des Peter Apianus (1527 und 1543), und in Simon Jacob von Coburgk Rechenbuche an. Der letztere ſagt, ſie könne gründlich durch compoſitionem proportionum erwieſen werden, welches er der Kürze wegen unterlaſſe. Käſtner hat die Kettenregel bey den Rechenmeiſtern des 16ten Jahrhunderts nicht angetroffen. Geſchichte der Mathematik. Th. I.

Die Decimalrechnung war in der That bey der von Regiomontanus gemachten Einrichtung der trigonometrischen Tafeln gebraucht. Ramus bediente sich ihrer in seiner Arithmetik (1550), aber Simon Stevin war der erste, der sie in einer besondern Schrift, la Pratique d' Arithmetique 1585. empfahl. Seit dieser Zeit ward sie in den arithmetischen Anweisungen gewöhnlich gelehrt, wenn man gleich im gemeinen Leben bey den hergebrachten Eintheilungen eines Ganzen bleiben mußte. Die Absonderung der Bruchtheile von den Ganzen durch ein Komma oder einen Punct, wie sie jetzt geschieht, gebraucht Stevin nicht, sondern giebt jeder Stelle einen eigenen Namen, Prime, Secunde, u. s. f. und setzt die Zeiger derselben in Kreisen eingeschlossen neben den Ziffern hin, den Zeiger Null für die Ganzen genommen. Beyer in seiner Logistica decimali, 1619, setzte dafür die Zeiger o, $'$, $''$, $'''$, an die Spitze der Ziffern.

Im Anfange des 17ten Jahrhunderts berechneten Neper, Briggs und Vlacq die Logarithmen. Der scharfsinnige Fermat in Frankreich fand manche versteckte Eigenschaft der Zahlen. Die Analysis, welche nun immer mehr erweitert ward, verschaffte auch der Zahlenrechnung Erleichterungen und Bereicherungen, als bey der Ausziehung der Wurzeln durch den binomischen Lehrsatz für gebrochne Exponenten, bey Summirungen von Zahlenreihen, beym Interpoliren einer Reihe gegebener Größen, in der zusammengesetzten Zinsrechnung, in der Berechnung der Wahrscheinlichkeiten bey Spielen, der Leibrenten, u. m. Die Geschichte der höhern Arithmetik ist in der neuern Zeit mit der Geschichte der Analysis verbunden.

Zusatz.

Über die Arithmetik der alten Griechen.

Ein interessantes Werk über die theoretische Arithmetik, in der Bedeutung bey den Alten, sind die vier

arithmetiſchen Bücher des Euklides, das ſiebente bis zehnte ſeiner Elemente. Das zehnte enthält die Arithmetik der Irrationalgrößen, wovon unter dieſem Artikel ſich ein Abriß befindet. Die drey andern enthalten Lehrſätze über die Proportionen, die Primzahlen, die Quadrate, die Würfelzahlen, und die Producte aus zwey oder drey Zahlen. Euklides hat zwar ſchon das fünfte Buch ganz der Lehre von den Proportionen gewidmet; allein da geſchah es in Rückſicht auf die Geometrie. Die proportionalen Größen werden nicht alle als gleichartige angeſehen, weil in der Geometrie Verhältniſſe einer Gattung von Größen (z. B. Flächen) mit Verhältniſſen einer andern Gattung (z. B. Linien) verglichen werden. In der Arithmetik ſind alle proportionalen Größen als Zahlen gleichartig; daher es für dieſen Fall noch Sätze über die Proportionalität giebt, die dort nicht vorgetragen werden konnten. Auch giebt Euklides hier eine andere Erklärung der Proportionalität als im 5ten Buche, nämlich gerade die, welche die Neuern größtentheils gebrauchen. Denn Zahlen ſieht er immer als rationale Größen an. Jene Erklärung begreift auch den Fall irrationaler Verhältniſſe, (ſ. Proportion). Euklides zeigt (VII. 13) daß, wenn A : B = C : D iſt, daraus A : C = B : D folgt, und (VII. 14.), daß, wenn A : B = D : E, und B : C = E : F iſt, daher A : C = D : F wird. Jener Satz ſetzt voraus, daß alle Größen in der Proportion gleichartig ſind; der andere Satz zwar nicht, allein in dem Beweiſe, der hier gebraucht wird, wird es angenommen. Derſelbe Satz iſt der 22ſte des 5ten Buchs, wo die Gleichartigkeit nicht vorausgeſetzt wird. So hat Euklides hier (VII. 19.) den Satz, daß in einer Proportion das Product der äuſſern Glieder gleich iſt dem Producte der beiden mittlern. In der Geometrie kommen nach der Methode der Alten keine Producte von Linien, oder von Linien in Flächen vor. Euklides lehrt hier (VII. 35.) die kleinſten Zahlen finden, welche mit mehrern gegebenen Zahlen einerley Verhältniß haben. Ferner (VIII. 2.) mehrere Verhältniſſe, die in den kleinſten Zah-

len gegeben sind, in andere an einander hangende zu verwandeln, als A : B ; C : D ; E : F in die a : b; b : c; c : d, die folgweise jenen gleich sind. Vieles von Primzahlen, doch nicht von den Kennzeichen derselben, sondern von den Eigenschaften derselben bey Producten und Verhältnissen. Z. B. (VII. 28.) sind zwey Zahlen, A, B, zu jeder von zwey andern, C, D, Primzahlen, so sind auch die Producte, E, F, aus den erstern und aus den letztern, Primzahlen zu einander. Und (VIII. 3.), von mehreren stetig proportionirten kleinsten Zahlen A, B, C, . . . N sind die äussersten, A, N, Primzahlen zu einander. Ein Product zweyer Zahlen nennt Euklides eine Flächenzahl, ein Product aus drey Zahlen eine Körperzahl. Durch diese Benennung ward eine Verbindung zwischen der Arithmetik und Geometrie erhalten, daher wir noch die zweyte und dritte Potenz einer Zahl Quadrat und Cubus nennen, so wie Euklides es thut. Er hat auch ähnliche Flächen und Körperzahlen, deren Factoren proportionirt sind. Der 35ste Satz IX. lehrt eine geometrische Progression summiren, wovon gleich im 36. S. eine Anwendung gemacht wird. Dieser ist folgender: Nimmt man so viele von der Einheit an stetig verdoppelte Zahlen 1, A, B, C, D, bis deren Summe eine Primzahl, E, wird, so ist das Product aus solcher Summe und der letzten jener Zahlen, D, eine vollständige Zahl (numerus perfectus), d. i. eine solche, welche allen ihren Theilen zusammen genommen gleich ist, wie 496, (s. vollständige Zahl). Dieser merkwürdige Satz beschließt das neunte Buch. Das siebente machte den Anfang mit einer praktisch brauchbaren Anweisung, für zwey oder mehrere gegebene Zahlen das größte gemeine Maaß zu zu finden.

Vom Archimedes ist eine kleine Schrift übrig, ψαμμιτης. die Sandberechnung, worin die Anzahl der Sandkörner berechnet wird, die in dem Raume um die Erde bis an die Bahn der Sonne, und in dem Raume bis zu der Sphäre der Fixsterne, nach den damahligen Begriffen, Platz haben können. Diese große Zahl durch Worte

auszudrücken, theilt er die Progreſſion der Zehnfachen von der Eins an, 1 : 10 : 100 : 100 : 10000; etc. in Claſſen von je acht Gliedern, (Octaden). Da die Griechen für die Zahl 10000 ein beſonderes Wort, Myrias, haben, ſo zählt er von der Myrias an bis zu der Myrias von Myriaden. Dieſe iſt der Einer der zweyten Claſſe, deren achte Zahl nach unſerer Benennungsart die 15te Potenz der 10 iſt. Die dritte Octas geht von der 16ten bis mit zur 23ſten Potenz der 10. Nun bezeichnet er jede Zahl der ganzen Reihe durch die Zahl der Octas und die Stelle des Gliedes in derſelben. Die Abſicht des Archimedes iſt zu zeigen, daß die Zahl des Sandes in jedem Raume zählbar iſt, welches gewiſſe Leute damahls nicht glauben wollten. Er nimmt alſo in einem Mohnkorne 10000 Sandkörnlein an, und ſetzt, daß 40 Mohnkörner nur einen Zoll (dactylus) der Länge nach einnehmen, ob es gleich wirklich nur 25 ſind. Hieraus berechnet er die Menge der Sandkörner in einer Kugel von einem Zoll im Durchmeſſer, nämlich 640 Millionen nach unſerer Benennung, wofür er 10 der zweyten Octas nimmt. Nun berechnet er folgweiſe die Anzahl der Sandkörner von Kugeln, deren Durchmeſſer hundertfach größer werden. Statt 10000 Zoll nimmt er ein Stadium, welches kleiner iſt als jene Länge. Den Durchmeſſer der Welt, das iſt der Sonnenbahn, ſetzt Archimedes kleiner als 10000 Durchmeſſer der Erde, und den Durchmeſſer der Erde kleiner als 10000. 10000. 100 Stadien. Hieraus folgert er nun, daß die Menge Sandkörner in der ganzen Weltkugel kleiner ſeyn würde als 1000 Einer der 7ten Octas, (kleiner als 10^{51}). Nach Ariſtarchus Schätzung, ſagt Archimedes, verhalte ſich die Sphäre der Fixſterne zu der Welt wie dieſe zur Erde. Die Zahl des Sandes, welcher dieſe Sphäre ausfülle, ſey alſo kleiner als tauſend Myriaden aus der achten Octas, (10^{63}), welche die 64ſte Stelle in der Reihe von Eins an einnehmen.

Die Schrift des Archimedes über die Kreismeſſung iſt nicht bloß wegen des Inhalts ſelbſt, ſondern auch wegen der dabey angewandten Rechnung mit irrationalen

Zahlen merkwürdig. Es kam darauf an, das Verhältniß $\sqrt{3} : 1$ zwischen zwey andern einzuschließen, von welchen das eine ein wenig größer, das andere ein wenig kleiner ist. Für das umschriebene Vieleck gebraucht Archimedes das Verhältniß $265 : 153$; für das eingeschriebene das $1351 : 780$. Man sieht nicht gleich, warum er gerade diese gewählt hat; und sein Commentator, Eutocius, fügt auch nichts hierüber hinzu. Durch die Rechnung mit Kettenbrüchen findet man, daß das erstere Verhältniß durch keine kleinern Zahlen mit drey Ziffern, und das andere durch keine kleinern Zahlen mit vier Ziffern genauer dargestellt werden kann. Archimedes mag in einer Tafel der Quadrate ganzer Zahlen diejenigen ausgesucht haben, deren Dreyfaches sehr nahe ein Quadrat ist. Solche Quadrate sind die von 153 und 780. Daß er sie auf die Art, wie de Lagny (Mem. de l' Acad. des Scienc. 1723) ihn sie finden läßt, entdeckt hätte, möchte man bezweifeln. Das Verfahren ist zu künstlich für den Zustand der alten Arithmetik.

Wenn das algebraische Räthsel, welches Lessing in einer griechischen Handschrift auf der Wolfenbüttelschen Bibliothek gefunden hat, vom Archimedes oder einem seiner Zeitgenossen herrührt, wie das eine oder das andere die Aufschrift besagt, so müßte man schon zu seiner Zeit nicht allein Mittel gehabt haben, weitläufige Zahlenrechnungen zu machen, sondern auch allgemeine Rechnungsarten und selbst die unbestimmte Analytik gekannt haben. Aus den beiden angeführten Schriften des Archimedes sieht man aber, daß die Zahlenrechnungen große Mühe verursachten. Die allgemeinen Rechnungen wurden von den Alten durch Hülfe geometrischer Constructionen gemacht, wie es auch von Archimedes geschehen ist. Wahrscheinlich ist jene Aufgabe von einem viel spätern Rechner, der schon die dekadische Arithmetik kannte, abgefaßt worden. Um Aufmerksamkeit zu erwecken, schrieb er sie dem Archimedes zu, der sie an die Liebhaber solcher Untersuchungen zu Alexandrien in einem Briefe an Eratosthenus gesandt haben sollte. Sie ist in Versen abgefaßt, wie es mit

ſolchen Aufgaben einmahl Sitte war. Der Verfaſſer einer in der gedachten Handſchrift beygefügten Auflöſung hat zwar richtige Verhältnißzahlen für die acht geſuchten Größen angegeben, aber nicht, wie er zwar behauptet, die beiden Bedingungen erfüllt, daß die Summe zweyer unter ihnen das Quadrat einer ganzen Zahl, und die Summe zweyer andern eine Trigonalzahl ſeyn ſollte. Die letztere Bedingung macht die Auflöſung ſchwer. Leſſings Beyträge zur Geſchichte und Litteratur, 2ter Beytr. S. 421 ff.

Ein Platoniſcher Philoſoph, Theon von Smyrna, der im erſten Jahrhundert gelebt haben mag, hat ein Buch geſchrieben, worin er mathematiſche Begriffe und Lehren erklärt, die zum Verſtändniß der Platoniſchen Schriften dienlich ſind. Bouillaud hat das davon übrig gebliebene Stück, welches die Arithmetik und Muſik betrifft, mit einigen wenigen Bemerkungen aus der Geometrie, griechiſch und lateiniſch herausgegeben: Theonis Smyrnaei eorum, quae in Mathematicis ad Platonis lectionem utilia ſunt, expoſitio. Edidit Iſmael Bullialdus. Lutet. Pariſ. 1644. 4. Das wichtigſte darin ſind die Berechnungen der muſikaliſchen Verhältniſſe. Zuerſt werden die verſchiedenen Formen der Zahlen aufgeführt; gerade, ungerade; einfache (Primzahlen), zuſammengeſetzte; Producte nach Verſchiedenheit der Factoren; Triangularzahlen, Quadrate, Pentagonalzahlen, und dergleichen. In dem Buche von den muſikaliſchen Verhältniſſen, mehrerley von Verhältniſſen, Proportionen und den verſchiedenen Mittelzahlen. Einige Spielereyen von Anwendungen der Zahlen auf ganz andere Dinge, und unnütze Bemerkungen, z. B. daß Drey die erſte Zahl iſt, die Anfang, Mittel und Ende hat; daß Sieben unter den erſten 10 Zahlen diejenige iſt, die aus keiner entſteht, und keine hervorbringt. Die Verbindung der vier erſten ganzen Zahlen, 1, 2, 3, 4, die Tetraktys, war den Pythagoräern ſehr heilig, weil ſie die vollkommenſten Conſonanzen in der Muſik, nach ihrem Syſtem, enthält, nämlich die Octave (2 : 1), die Doppel-Octave (4 : 1), die Quinte (3 : 2), die Quarte (4 : 3).

Daher sahen sie sie auch als ein Bild der ganzen Welt an; daher auch ihre Eidesformel: Bey dem, der uns die Tetraktys lehrte, die Quelle der unvergänglichen Natur.

Arithmetisch ist, was eine Beziehung oder Verknüpfung von Zahlen anzeigt oder begreift, als arithmetisches **Complement** eines Logarithmen, arithmetisches **Dreyeck**, **Mittel**, arithmetische **Progression** oder **Reihe**, **Proportion**. **Scale**, **Verhältniß**. Man sehe theils die folgenden Artikel, theils die Artikel, Complement, Mittel, Proportion, Verhältniß.

Arithmetisches Dreyeck ist eine Anordnung von arithmetischen Reihen jeder Ordnung von der niedrigsten an, folgender Gestalt,

O.	1
I.	1 . 1 .
II.	1 . 2 . 1 .
III.	1 . 3 . 3 . 1 .
IV.	1 . 4 . 6 . 4 . 1 .
V.	1 . 5 . 10 . 10 . 5 . 1 .
VI.	1 . 6 . 15 . 20 . 15 . 6 . 1 .
VII.	1 . 7 . 21 . 35 . 35 . 21 . 7 . 1 .
VIII.	1 . 8 . 28 . 56 . 70 . 56 . 28 . 8 . 1 .
.	. . . .
.	. . . .
	O. I. II. III. IV V. VI. VII. VIII.

Die Unterschiede der Zahlen in jeder verticalen Reihe sind die Zahlen der nächst vorhergehenden. Daher ist die Reihe I. eine arithmetische der ersten Ordnung, die Reihe II. eine arithmetische der zweyten Ordnung, die Reihe III. eine solche der dritten, u. s. f. Bezeichnet man die Ordnung einer Reihe durch m, so daß die erste Reihe der

gleichen Einheiten von der Ordnung o sey; und den Abstand der horizontalen Reihe, in welcher sich ein Glied einer verticalen Reihe befindet, von der ersten horizontalen, in welcher sich nur ein einziges Glied befindet, durch n, so ist das mte Glied der nten horizontalen Reihe $=$

$$\frac{n.n-1.n-2\ldots n-m+2.n-m+1.}{1.\quad 2.\quad 3.\quad \ldots\quad m-1.\quad m}$$

So ist z. B. das 5te Glied der 8ten horizontalen Reihe $= \frac{8.7.6.5.4}{1.2.3.4.5}$. Dieses folgt aus §. 7 des Artikels: arithm. Reihen höherer Ordn.

Die Zahlen einer horizontalen Reihe, sind die Binomial-Coefficienten in der Potenz $(a+b)^n$, (s. binomischer Lehrsatz.)

Jede Zahl in dem Dreyecke zeigt die Menge der Combinationen an, welche von je m verschiedenen Dingen aus einer Anzahl, n, derselben gemacht werden können. Z. B. aus 8 verschiedenen Karten können je 2 genommen werden 28 mahl, je 5 . . . 56 mahl. (Combination, 15.).

Pascal wird gewöhnlich als der Erfinder des arithmetischen Dreyecks angesehen. Es kommt aber schon in Girards Algebra vor, wie in dem Artikel, Algebra, angeführt ist. Pascal hat eine besondere Schrift darüber im Jahre 1665 herausgegeben, die er aber schon um das Jahr 1653 ausgearbeitet haben mag. Einige Fragen über die Glücksspiele veranlaßten ihn zu Untersuchungen über die Combinationen, und diese führten ihn zu der Anordnung der Combinationszahlen in Form eines Dreyecks, wodurch er verschiedene Aufgaben über die Wahrscheinlichkeiten in Spielen auflösete. Hutton erinnert in seinem Wörterbuche der Mathematik und Physik, daß Pascal nicht der Erfinder dieser Zahlentabelle sey, sondern daß ihre Eigenschaften schon einige hundert Jahre vor ihm in Schriften vorkommen, und beruft sich wegen des Erweises dieser Behauptung auf seine mathematical Tracts.

vol. 1. p. 68. Figurirte Zahlen (das sind die in jeder verticalen Columne) waren, wie Kästner (Geschichte der Mathematik I. S. 123) sagt, schon lange vor Stifel bekannt. Dieser scheint aber in ihnen die Binomial-Coefficienten für Potenzen mit ganzen Exponenten gefunden zu haben. Pascal hat von den figurirten Zahlen zuerst Gebrauch gemacht, die Menge der Combinationen von m Dingen aus einer Anzahl n derselben bequem zu finden.

Arithmetische Reihe oder **Progression** ist eine Folge von Größen, deren jede von der vorhergehenden um eine gegebene Größe unterschieden ist. Je drey auf einander folgende machen eine zusammenhangende (stetige) arithmetische Progression aus. Z. B. die Reihe der natürlichen Zahlen, der geraden, oder ungeraden.

1. Das erste Glied eines Stücks einer arithmetischen Reihe heiße a; der Unterschied von dem folgenden sey $+d$; das xte Glied der Reihe sey $= y$, so ist $y = a \pm (x-1)d$. Dieses ist das allgemeine Glied der arithmetischen Reihe.

2. Wenn der Unterschied d additiv ist, so ist die Reihe zunehmend oder wachsend; ist d subtractiv, so ist die Reihe abnehmend. Die Reihe bricht nicht ab, wenn in dem letztern Falle $(x - 1)d$ größer als a ist. Vielmehr machen die beiden Reihen, worin das Glied a und der Unterschied d gemeinschaftlich sind, das Vielfache des Unterschiedes aber entgegengesetzte Vorzeichen hat, eine einzige Reihe aus, in welcher die Glieder einen gemeinschaftlichen Unterschied haben. Diejenigen Glieder, worin $(x - 1)d$ größer als a ist, und das Vorzeichen $-$ hat, haben die absolute Quantität $(x - 1)d - a$, bekommen aber das Vorzeichen $+$, wodurch sie als Größen angesehen werden, die kleiner sind, als die mit $+$ bezeichneten, worin $(x - 1)d$ kleiner als a oder auch additiv ist, weil sie diesen nur durch die Addition einer gewissen Größe gleich werden. Bey benannten Größen bezeichnet das Vorzeichen $-$ eine besondere entgegengesetzte Qualität, als, bey Linien und Winkeln entgegengesetzte Lage, bey

Bewegung entgegengeſetzte Richtung, bey Geldpoſten Vermögen und Schuld. Z. B. wenn die Reihe, 9, 13, 17, 21 etc. in entgegengeſetzter Folge fortgeſetzt wird, ſo haben wir die Reihe . . . + 13, + 9, + 5, + 1, —3, — 7, — 11, — etc. wo — 3 um 4 kleiner iſt als + 1, indem bey der Addition von 4 zu — 3 ſich + 3 gegen — 3 heben, (ſ. entgegengeſetzte Größen).

3. Jede arithmetiſche Reihe geht alſo in entgegengeſetzter Folge der Glieder, von irgend einem Gliede an, ohne abzubrechen, fort. Für dieſes Glied iſt der Stellenzeiger (Index) oder der Werth von x = o. Man nenne es deshalb das Anfangsglied, indem es beiden, in entgegengeſetzter Folge fortlaufenden Reihen gemeinſchaftlich iſt, und unterſcheide es von dem erſten Gliede, deſſen Stellenzeiger = 1 iſt. Dieſes letztere iſt = a; jenes, das Anfangsglied, iſt = a ± d. Diejenigen Glieder, für welche x poſitiv iſt, ſehe man als die vorwärts geordneten, diejenigen, für welche x negativ iſt, als die rückwärts liegenden an, der Unterſchied d mag poſitiv oder negativ ſeyn. Es können zu poſitiven Stellenzeigern negative Glieder der Reihe, und umgekehrt gehören. Z. B.

Stellenzeiger

etc. −4; −3; −2; −1; −0; +1; +2; +3; +4; etc.

Glieder

etc. −7, −3; +1; +5; +9; +13; +17; +21; +24; etc.

oder

etc. +9; +5; +1; −3; −7; −11; −15; −19; −23; etc.

Das Anfangsglied in der erſtern Reihe iſt + 9, in der zweyten — 7; die erſtere iſt eine zunehmende, die andere eine abnehmende Reihe.

4. Wenn in einer arithmetiſchen Reihe die Glieder, deren Stellen o, n, 2n, 3n, etc. — n, — 2n, 3n, etc. ſind, ausgehoben werden, ſo machen dieſe unter ſich eine

arithmetiſche Reihe aus; in welcher der Unterſchied zweyer nächſten Glieder $= nd$ iſt, wenn er in der urſprünglichen Reihe $= d$ iſt. Die Anzahl der ausgelaſſenen Glieder zwiſchen zwey nächſten Gliedern der neuen Reihe iſt $= n - 1$.

5. Auf umgekehrte Art kann man in der urſprünglichen Reihe zwiſchen je zwey Glieder $n - 1$ Glieder einſchreiben, deren gemeinſchaftlicher Unterſchied $= \frac{1}{n} d$ iſt. Das erſte derſelben nach dem Anfangsgliede iſt $= a - d + \frac{1}{n} d$, und das erſte vor demſelben $= a - d - \frac{1}{n} d$, wo d auch das entgegengeſetzte Vorzeichen haben mag.

6. Man verſtehe unter d ſowohl eine poſitive als negative Größe; die Summe von x Gliedern, von dem erſten a, bis zu dem xten, ſey $= s$, das xte Glied $= y$, ſo iſt

I. $y = a + (x - 1) d$

II. $s = \frac{1}{2} (a + y) x = \frac{1}{2} (2a + (x - 1) d) x$.

Denn man ſetze die Glieder der Reihe in umgekehrter Ordnung unter dieſelbe,

$a, a + d, a + 2d, \ldots y - 2d, y - d, y$

$y, y - d, y - 2d, \ldots a + 2d, a + d, a,$

ſo erhält man durch die Addition beider Reihen x Paare Größen, deren jede $= a + y$; alſo $2s = (a + y) x = (2a + (x - 1) d) x$.

Z. B. $1 + 5 + 9 + 13 \ldots + 401 = \frac{1}{2} . 402 . 101 = 20301$.

7. Der Satz gilt auch, wenn d negativ iſt, und wenn das erſte oder das letzte Glied negativ iſt, z. B. $21 + 17 \ldots - 7 - 11 = \frac{1}{2} . 10 . 9 = 45$.

8. Im bürgerlichen Leben kommen einige Anwendungen der arithmetiſchen Progreſſion vor. An einem Walmendache nimmt die Anzahl der Ziegel jeder Reihe in ei-

ner ſolchen Fortſchreitung von oben nach unten zu. An der ſchmalen Seite iſt zu oberſt ein Ziegel, an der breiten iſt das Anfangsglied der Reihe die Zahl der Ziegel auf der Forſt. — Wenn ein Brunnen gegraben wird, ſo pflegt jede Elle nach Maaßgabe der Tiefe bezahlt zu werden, ſo daß der Lohn in einer arithmetiſchen Progreſſion zunimmt. Eben ſo bey dem Ausmauern eines Brunnen. Bey der Aufführung hoher Mauern muß das Arbeitslohn auch mit der Höhe größer werden. Moivre ſetzte anſtatt der Reihe, nach welcher eine Anzahl gleichjähriger Perſonen abſtirbt, eine arithmetiſche, um darnach die Leibrenten leichter zu berechnen. Dieſe Methode iſt aber fehlerhaft. Eine ſehr wichtige Anwendung der arithmetiſchen Reihe für die ganze rechnende Mathematik ſind die Logarithmen.

9. Vermittelſt der beiden Gleichungen: I. $y = a + (x - 1)d$. II. $s = \frac{1}{2}(a + y)x$, kann man zwey der fünf Größen, a, d, x, y, s, finden, wenn die drey andern gegeben ſind. Dieſes giebt zwanzig verſchiedene Aufgaben, da drey Größen aus fünf auf zehnerley Art genommen werden können, und von den beiden übrigen entweder die eine oder die andere geſucht werden mag.

10. Es iſt nicht nöthig, alle dieſe zwanzig Gleichungen zu entwickeln. Nur diejenigen, in welchen die geſuchte Größe auf die zweyte Potenz ſteigt, mögen zu Beyſpielen dienen.

I. Es ſey die Anzahl der Glieder durch das erſte Glied, den Unterſchied und die Summe zu beſtimmen. Aus den beiden Gleichungen, I. $y = a + (x - 1)d$, und II. $2s = (a + y)x$, iſt nun y herauszuſchaffen. Man ſetze in II. den Werth von y aus I. ſo iſt $2s = (2a + (x - 1)d)x$, daher $dx^2 + (2a - d)x = 2s$, folglich (Gleichung II. 6.)

$$x = -\frac{2a - d}{2d} \pm \frac{\sqrt{((2a-d)^2 + 8ds)}}{2d}.$$

Wie das untere Vorzeichen ſeine Anwendung finde, wird hernach an einem Beyſpiele gezeigt werden.

II. Wird ſtatt des erſten Gliedes das letzte Glied gegeben, ſo iſt d negativ in Abſicht des vorher gebrauchten d. und die beiden äuſſerſten Glieder, a, y, werden mit einander verwechſelt. So wird erhalten

$$x = + \frac{2v + d.}{2d} \pm \frac{\sqrt{((2y + d)^2 - 8ds}}{2d}.$$

III. Es ſey das letzte Glied durch das erſte Glied, den Unterſchied und die Summe zu beſtimmen. — Aus den beiden Gleichungen I. $y = a - d + dx$, und II. $2s = (a + y)x$, wird erhalten:

$$(a + y)\ (y - a + d) = 2ds,$$

das iſt

$$y^2 + dy - a(a - d) = 2ds;$$

und

$$y = -\tfrac{1}{2}d + \sqrt{(2ds + a\,(a - d) + \tfrac{1}{4}d^2)}.$$

IV. Wird ſtatt des letzten Gliedes das erſte geſucht, ſo iſt durch eine Vertauſchung, wie in II.

$$a = + \tfrac{1}{2}d \pm \sqrt{(y\,(y + d) + \tfrac{1}{4}d^2 - 2ds)}.$$

11. Exempel. Es ſey $a = 10$; $d = + 4$; $s = 384$, ſo iſt $x = - 2 + 14$; $y = - 2 + 56$. Hier gehört $y = + 54$ zu $x = + 12$; und $y = - 58$ zu $x = - 16$. Es iſt nämlich $+ 54$ das zwölfte Glied in der Reihe 10, 14, etc. und $- 58$ das Glied, deſſen Stellenzeiger $- 16$ iſt, in derſelben Reihe, aber rückwärts genommen. Die arithmetiſche Summe der Glieder iſt freylich eine andere von $+ 10$ bis zu $- 58$, als von $+ 10$ bis zu $+ 54$; allein es iſt doch das Product $(10 + 54)(+ 12) = (10 - 58)(- 16) = + 768$, deſſen Hälfte $= 384$, die Summe der Glieder von 10 bis $+ 54$ iſt. Die arithmetiſche Summe der 18 Glieder von $+ 10$ bis $- 58$, mit Beobachtung der Vorzeichen, iſt $= \frac{1}{2}(10 - 58).\ 18 = - 432$.

In Pasquich's Analyſis 1 Th. §. 144 ſind alle zwanzig Gleichungen entwickelt. In der Gleichung XII. iſt ein Druckfehler. Das Vorzeichen der Wurzelgröße iſt bloß + genommen.

Jenes von diesem abgezogen giebt das erste Glied der (n + 1)ten Unterschiede,

$$-A+(n+1)B-\frac{n+1\,.\,n}{1\,.\,2}C+\frac{n+1.n.n-1.}{1\,.\,2\,.\,3}D$$

$$-\frac{n+1\,\ldots\,n-2.}{1\,\ldots\,4}E\ldots.+\frac{1+1.n}{1,2}Q-(n+1)R+S,$$

und das zweyte Glied =

$$-B+(n+1)C-\frac{n+1.n}{1.2}D+\frac{n+1.n.n-1.}{1\,.\,2\,.\,3}E$$

$$-\frac{n+1\,\ldots.n-2.}{1\,\ldots\,4}F\ldots.+\frac{n+1.n}{1.2}R-(n+1)S+T.$$

Jenes von diesem abgezogen giebt das erste Glied in der Reihe der (n + 2)ten Unterschiede,

$$+A-(n+2)B+\frac{n+2.n+1.}{1\,.\,2}C-\frac{n+2.n+1.n}{1.\quad 2\,.\,3}D$$

$$-\frac{n+2\,\ldots.n-1.}{1\,\ldots.\,4}E\ldots+\frac{n+2.n+1.}{1\,.\,2}R-(n+2)S+T.$$

Es erhellt also, daß die Form der Coefficienten immer dieselbe bleibt, daß ihre Vorzeichen abwechseln, und daß in den Unterschiedsreihen mit einer geraden Ordnungszahl das Vorzeichen + den Anfang macht, bey einer ungeraden Ordnungszahl das Vorzeichen —. Da nun die Form der Coefficienten für die berechneten Unterschiede gilt, so gilt sie auch für alle folgende. Sie ist übereinstimmend mit der Form der Binomial-Coefficienten in der nten Potenz von a — b, wenn n die Ordnungszahl der Reihe ist, (Binomischer Lehrsatz. 1.). Diese Coefficienten seyn $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{D}$, etc. nach ihrer Folge, ohne den des ersten Gliedes, nämlich 1, und zwar bloß in Absicht auf die Quantität, so ist das erste Glied der nten Unterschiedsreihe

$$= \pm(A-\mathfrak{A}B+\mathfrak{B}C-\mathfrak{C}D+\mathfrak{D}E\ldots\ldots$$

$$\ldots\mp\mathfrak{B}^{-1}N+\mathfrak{A}N\pm N^{+1})$$

wo das obere Vorzeichen für ein gerades n, das untere

A	B — A	C — 2B + A	D — 3C + 3B — A	E — 4D + 6C — 4B + A
B	C — B	D — 2C + B	E — 3D + 3C — B	F — 4E + 6D — 4C + B
C	D — C	E — 2D + C	F — 3E + 3D — C	G — 4F + 6E — 4D + C
D	E — D	F — 2E + D	G — 3E + 3E — D	
E	F — E	G — 2F + E		
F	G — F			
G				
.	.	.	.	.
.	.	.	.	.
.	.	.	.	.
			V. Unterschiede	VI. Unterschiede
			F — 5E + 10D — 10C + 5B — A	G — 6F + 15E — 20D
			G — 5F + 10E — 10D + 5C — B	+ 15C — 6B + A
			.	.
			.	.

Jenes von dieſem abgezogen giebt das erſte Glied der (n + 1)ten Unterſchiede,

$$-A+(n+1)B-\frac{n+1.n}{1.2}C+\frac{n+1.n.n-1.}{1.2.3}D$$

$$-\frac{n+1...n-2.}{1...4}E....+\frac{1+1.n}{1,2}Q-(n+1)R+S,$$

und das zweyte Glied =

$$-B+(n+1)C-\frac{n+1.n}{1.2}D+\frac{n+1.n.n-1.}{1.2.3}E$$

$$-\frac{n+1....n-2.}{1...4}F....+\frac{n+1.n}{1.2}R-(n+1)S+T.$$

Jenes von dieſem abgezogen giebt das erſte Glied in der Reihe der (n + 2)ten Unterſchiede,

$$+A-(n+2)B+\frac{n+2.n+1.}{1.2}C-\frac{n+2.n+1.n}{1.2.3}D$$

$$-\frac{n+2....n-1.}{1....4}E...+\frac{n+2.n+1.}{1.2}R-(n+2)S+T.$$

Es erhellt alſo, daß die Form der Coefficienten immer dieſelbe bleibt, daß ihre Vorzeichen abwechſeln, und daß in den Unterſchiedsreihen mit einer geraden Ordnungszahl das Vorzeichen + den Anfang macht, bey einer ungeraden Ordnungszahl das Vorzeichen —. Da nun die Form der Coefficienten für die berechneten Unterſchiede gilt, ſo gilt ſie auch für alle folgende. Sie iſt übereinſtimmend mit der Form der Binomial-Coefficienten in der nten Potenz von a — b, wenn n die Ordnungszahl der Reihe iſt, (Binomiſcher Lehrſatz. 1.). Dieſe Coefficienten ſeyn A, B, C, D, etc. nach ihrer Folge, ohne den des erſten Gliedes, nämlich 1, und zwar bloß in Abſicht auf die Quantität, ſo iſt das erſte Glied der nten Unterſchiedsreihe

$$=\pm(A-\mathfrak{A}B+\mathfrak{B}C-\mathfrak{C}D+\mathfrak{D}E.....$$

$$...\mp\mathfrak{B}^{-1}N+\mathfrak{A}N\pm N^{+1})$$

wo das obere Vorzeichen für ein gerades n, das untere

für ein ungerades zu nehmen iſt, und N das nte Glied der Reihe bedeutet; das vorhergehende und folgende Glied ſind durch den Buchſtaben N mit dem Stellenzeichen darüber angedeutet.

Für das zweyte Glied der Unterſchiede wird jedes Glied der Reihe mit dem nächſt folgenden vertauſcht, für das dritte Glied mit dem zweyten folgenden, u. ſ. f.

3. Es iſt in einer arithmetiſchen Reihe der

I. Ordn. $A-2B+C=0$

II. Ordn. $A-3B+3C-D=0$

III. Ordn. $A-4B+6C-4D+E=0$

IV. Ordn. $A-5B+10C-10D+5E-F=0$

V. Ordn. $A-6B+15C-20D+15E-6F+G=0$

. . . . . .

. . . . . .

nten Ordnung $A-\mathfrak{A}B+\mathfrak{B}C-\mathfrak{C}D+\mathfrak{D}E \ldots \ldots$

$\ldots \pm \mathfrak{C}N^{-1} \mp \mathfrak{B}N \pm \mathfrak{A}N^{+1} \mp N^{+2} = 0$

wo A, B, C, D, etc. irgend welche auf einander folgende Glieder der Hauptreihe bedeuten, und in der allgemeinen Formel, $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{D}$, etc. die Binomial-Coefficienten aus der $(n+1)$ten Potenz von $(a-b)$ ſind. Die Formel für eine Ordnung enthält ſo viele Glieder, als die um zwey vergrößerte Ordnungszahl (Exponens der Ordnung) Einer enthält.

Denn in einer arithmetiſchen Reihe der erſten Ordnung, oder der gemeinen, ſind die erſten Unterſchiede beſtändig, alſo die zweyten Null. In einer arithmetiſchen Reihe der zweyten Ordnung ſind die zweyten Unterſchiede unveränderlich, alſo die dritten Null. Auf ähnliche Art für die höhern Reihen.

4. Die Glieder einer arithmetiſchen Reihe irgend einer Ordnung machen eine rücklaufende Reihe aus, in welcher die Scale der Relation aus den Binomial-Coefficienten in einer Potenz von $(a-b)$ beſteht, deren Expo-

nens um Eins größer ist als der Exponens der Ordnung. So ist in der

I. Ordn. $C = 2B - A$

II. Ordn. $D = 3C - 3B + A$

III. Ordn. $E = 4D - 6C + 4B - A$

IV. Ordn. $F = 5E - 10D + 10C - 5B + A$

u. s. f.

(Vergleiche rücklaufende Reihe.)

5. Beyspiele von arithmetischen Reihen höherer Ordnungen geben die Potenzen der natürlichen Zahlen oder auch solcher, die in gemeiner arithmetischer Progression sind; die Polygonalzahlen; die Binomial-Coefficienten in einer bestimmten Stelle oder die figurirten Zahlen; die Coefficienten in der Potenz $(a-b)^{-n}$, wo n eine ganze Zahl ist, als

die Würfel,

1, 8, 27, 64, 125, 216, 343, etc.

die Pentagonalzahlen,

1, 5, 12, 22, 35, 51, 70, etc.

die figurirten Zahlen der vierten Ordnung,

1, 5, 15, 35, 70, 126, 210, etc.

die Binomial-Coefficienten in $(a-b)^{-6}$,

6, 21, 56, 126, 252, 462, 792, etc.

6. Eine arithmetische Reihe von irgend einer Ordnung kann auch als eine Reihe einer höhern Ordnung betrachtet werden. Denn wenn die nten Unterschiede Null sind, so sind deren Unterschiede und alle folgenden auch Null. Z. B. für eine Reihe der ersten Ordnung ist $A - 2B + C = 0$, und $B - 2C + D = 0$, also durchs Abziehen $A - 3B + 3C - D = 0$, wie für eine Reihe der zweyten Ordnung. Nun ist eben so $B - 3C + 3D - E = 0$, also ist $A - 4B + 6C - 4D + E = 0$, wie für eine Reihe der dritten Ordnung. Den Beweis kann man auf diese Art leicht allgemein machen.

7. Das Anfangsglied einer arithmetiſchen Reihe ſey dasjenige, deſſen Stelle durch o bezeichnet wird, und ſey = A; das Anfangsglied in der Reihe der erſten Unterſchiede ſey = a; in der Reihe der zweyten = b; in der Reihe der dritten = c; in der Reihe der vierten = d, u. ſ. f. Die Stelle dieſer Anfangsglieder werde ebenfalls durch o bezeichnet. Das Glied der Hauptreihe in der xten Stelle ſey = y, ſo iſt

$$y = A + x.a + \frac{x.x-1.}{1.2}b + \frac{x.x-1.x-2}{1.2.3}c$$

$$+ \frac{x.x-1.x-2.x-3.}{1.2.3.4}d + \frac{x....x-4.}{1...5}e + \text{etc.}$$

Die Reihe geht ſo lange fort, bis entweder ein Coefficient (da x eine ganze Zahl bedeutet), oder ein Unterſchiedsglied mit allen folgenden Null wird.

Der Beweis erhellt aus der Zuſammenſetzung der Glieder der Hauptreihe aus den erſten Gliedern der Unterſchiedsreihen, welche folgende Tafel zeigt, worin Δy die Glieder der erſten Unterſchiedsreihe, $\Delta^2 y$ die Glieder der zweyten, $\Delta^3 y$ die der dritten u. ſ. f. bedeuten. Jedes Glied der Hauptreihe ſowohl als der Differenzenreihen wird aus dem vorhergehenden in ſeiner Reihe, und dem in der nächſten Differenzenreihe mit dieſem gleichſtelligen zuſammen geſetzt. Die Allgemeinheit der Form wird wie §. 2 bewieſen.

8. Die Anfangsglieder der Differenzenreihen können auch negativ ſeyn, einige oder alle. Wenn alle negativ ſind, ſo nehmen die Glieder der Hauptreihe unbedingt ab, und deſto mehr, je weiter ſie von dem Anfangsgliede entfernt ſind, ſo wie ſie auf ſolche Art wachſen, wenn alle Anfangsglieder der Differenzenreihen poſitiv ſind, wie es bisher angenommen iſt. Sind aber einige Anfangsglieder der Differenzenreihen negativ, ſo können die entferntern Glieder der Hauptreihe weniger zunehmen, als die dem Anfangsgliede nähern Glieder; es kann das Zunehmen ſich in ein Abnehmen verwandeln, und umgekehrt. Dieſe Wechſel können öfterer als einmahl erfolgen. Die Glie-

höherer Ordnungen.

	0	1	2	3	4
y	A	A + a	A + 2a + b	A + 3a + 3b + c	A + 4a + 6b + 4c + d
Δy	a	a + b	a + 2b + c	a + 3b + 3c + d	a + 4b + 6c + 4d + e
Δ²y	b	b + c	b + 2c + d	b + 3c + 3d + e	b + 4c + 6d + 4e + f
Δ³y	c	c + d	c + 2d + e	c + 3d + 3e + f	
Δ⁴y	d	d + e	d + 2e + f		
Δ⁵y	e	e + f			
Δ⁶x	f				
					5
					A + 5a + 10b + 10c + 5d + e
					a + 5b + 10c + 10d + 5e + f
					6
					A + 6a + 15b + 20c + 15d + 6e + f

der der Hauptreihe können ſtatt poſitiver Werthe negative bekommen, und wiederum aus negativen Größen poſitive werden. Z. B. die Anfangsglieder der Differenzenreihen der Potenzen der ganzen Zahlen nach ihrer Folge ſind alle poſitiv, und die Potenzen wachſen immer deſto mehr, je größer die Wurzeln ſind; hingegen ſind die Anfangsglieder der Differenzenreihen von den Wurzeln der ganzen Zahlen abwechſelnd poſitiv und negativ, wie man ſich es aus der Tafel der Quadratwurzeln in Lamberts Zuſätzen zu den log. und trigon. Tabellen, Tab. XLI. deutlich machen kann. Die Werthe einer Gleichung, wenn die Werthe der unbekannten Größe in derſelben die ganzen Zahlen nach ihrer Folge, oder ſonſt eine arithmetiſche Reihe der erſten Ordnung ſind, machen häufig eine Reihe aus, deren Glieder theils poſitiv, theils negativ ſind, und für welche die Anfangsglieder ihrer Differenzenreihen auf gleiche Art wechſeln.

9. Wenn x negativ genommen wird, ſo iſt y ein Glied, das ſo viele Stellen von dem Anfangsgliede rückwärts abſteht, als oft x die Einheit enthält. Es ſey z die Stellenzahl des Gliedes abſolut genommen, ſtatt $-x$, ſo iſt

$$y = A - z.a + \frac{z.z+1.}{1.2}b - \frac{z.z+1.z+2.}{1.2.3}c + \frac{z.z+1.z+2.z+3.}{1.2.3.4}d - \frac{z...z+4.}{1..4}e + \text{etc.}$$

10. Es ſey $x = \frac{u}{\Delta u}$, wo u irgend eine benannte Größe, oder auch eine unbenannte, ohne Rückſicht auf eine Einheit, bedeutet, die ſich mit x gleichförmig verändert. Ferner ſey $a = \Delta A$; $b = \Delta^2 A$; $c = \Delta^3 A$, u. ſ. f. ſo iſt

$$y = A + u.\frac{\Delta A}{\Delta u} + \frac{u(u-\Delta u)}{1.2}.\frac{\Delta^2 A}{\Delta u^2} + \frac{u(u-\Delta u)(u-2\Delta u)}{1.2.3}.\frac{\Delta^3 A}{\Delta u^3}$$

$$+\frac{u(u-\Delta u)(u-2\Delta u)(u-3\Delta u)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}\cdot\frac{\Delta^4 A}{\Delta u^4}+\text{etc.}$$

Diese Formel stellt y aus der zwischen y und u gegebenen Gleichung dar, wenn diese keine gesonderte Gleichung für y ist. Sie führt zu dem Taylorschen Lehrsatze, (s. diesen).

Summirung der arithmetischen Reihen.

11. Setzt man das Anfangsglied einer Hauptreihe $=0$, so ist das xte Glied derselben nach diesem (das Glied zu der Stellenzahl x) die Summe von x Gliedern der ersten Differenzenreihe, gezählt von demjenigen an, dessen Stellenzahl o ist, bis mit zu dem Gliede in der Stelle $x-1$.

Denn es sey die Hauptreihe: A, B, C, D . . . P, Q, R, S, so ist die erste Differenzenreihe: $B-A$; $C-B$; $D-C$; . . . . $Q-P$; $R-Q$; $S-R$. Die Summe der Glieder in dieser letztern Reihe ist $=S-A$; also $=S$, wenn $A=0$ ist.

12. Die Summe einer Anzahl Glieder aus einer arithmetischen Reihe irgend einer Ordnung zu finden, sehe man dieselben als die Unterschiede einer arithmetischen Reihe der nächst höhern Ordnung an, in welcher das Anfangsglied $=0$ ist. Das Anfangsglied der Reihe sey $=A$; das erste Glied der ersten Unterschiede $=\Delta A$; das erste der zweyten $=\Delta^2 A$: das erste der dritten $=\Delta^3 A$, u. s. f. Die Anzahl der Glieder $=r$; ihre Summe $=\Sigma$, so ist

$$\Sigma=rA+\frac{r.r-1.}{1\ 2}\Delta A+\frac{r.r-1.r-2.}{1.2.3}\Delta^2 A$$
$$+\frac{r.r-1.r-2.r-3.}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}\Delta^3 A+\text{etc.}$$

Denn es seyn die Glieder der gegebenen Reihe A, B, C . . . R, S T; der summirenden α, β, γ . . . ε, σ, τ, so daß $\alpha=A$; $\beta=A+B$, $\gamma=A+B$

$$+\frac{r+1.r.r-1.r-2.r-3.}{1.2.3.4.5}\Delta^5 A + \text{etc.}$$

Denn man formire aus der gegebenen Reihe die ſummirende, α, β, γ, . . . ϱ, σ, τ, und aus dieſer die zweyte ſummirende, a, b, c . . . r, s, t, ſo daß $a = \alpha$; $b = \alpha + \beta$; $c = \alpha + \beta + \gamma$; etc. und $t = \alpha + \beta + \gamma \ldots + \sigma + \tau$ iſt. Da

$$\begin{aligned}
\alpha &= A \\
\beta &= A + B \\
\gamma &= A + B + C \\
&\cdots \\
\varrho &= A + B + C \ldots + R \\
\sigma &= A + B + C \ldots + R + S \\
\tau &= A + B + C \ldots + R + S + T,
\end{aligned}$$

ſo iſt

$$t = rA + (r-1)B + (r-2)C + \ldots + 3R + 2S + T.$$

Die geſuchte Summe iſt alſo das rte Glied der zweyten ſummirenden Reihe, deren Glieder die ſummatoriſchen für die Glieder der erſten ſummirenden Reihe zu der gegebenen ſind.

Man ordne nun die drey Reihen folgendergeſtalt nebſt ihren Stellenzahlen zuſammen, und bezeichne die Stelle des Anfangsgliedes, wie bisher, durch o.

Stellen.	o; 1, 2, 3, ...	r−2,	r−1,	r	r+1
I. Reihe.	A, B, C, D, ...	S,	T,	. .	. .
II.	o, α, β, γ, ...	ϱ,	σ,	τ,	. .
III.	o, o, a, b, ...	r,	s,	t	

Hier iſt in der dritten Reihe das Glied t, oder die geſuchte Summe, das (r + 1)te Glied nach dem Anfangsgliede; das Anfangsglied derſelben Reihe iſt Null; das erſte

Glied der ersten Unterschiede ist auch Null; das erste der zweyten ist $= A$; das erste der dritten ΔA; das erste der vierten $= \Delta^2 A$, u. s. f. Man hat also in der Formel (7.) für die dortigen

y, A, a, b, c, d, e, ... x

zu setzen

t, o, o, ΔA, $\Delta^2 A$, $\Delta^3 A$, $\Delta^4 a$, ... $r+1$.

So erhält man die angegebene Formel für t, das ist, für die Summe Σ.

Eine Anwendung kommt in der Goniometrie, IV. vor.

Fernere Untersuchungen über die arithmetischen Reihen.

18. Die Reihe A, B, C, D, E, etc. sey eine arithmetische Reihe der nten Ordnung, für welche das beständige Glied der nten Unterschiede ist $= \alpha$; so ist die Reihe A, 2B, 3C, 4D, 5E, etc. eine arithmetische Reihe der $(n+1)$ten Ordnung, für welche das beständige Glied der $(n+1)$ten Unterschiede ist $= (n+1)\alpha$.

Das nte Glied der gegebenen Reihe sey $= N$, die folgenden seyn N', N'', N''', N^{IV}. u. s. f. das nächst vorhergehende sey $'N$, das Glied A für das erste genommen. Die Binomial-Coefficienten aus der nten Potenz seyn ${}^n\mathfrak{A}$, ${}^n\mathfrak{B}$, ${}^n\mathfrak{C}$ etc. aus der $(n+1)$ten Potenz ${}^{n+1}\mathfrak{A}$, ${}^{n+1}\mathfrak{B}$, ${}^{n+1}\mathfrak{C}$, etc. (s. Binomial-Coeffic. 1). Das erste und hier auch beständige Glied der nten Unterschiede ist, nach (2),

$$\pm(A - {}^n\mathfrak{A}B + {}^n\mathfrak{B}C - {}^n\mathfrak{C}D + {}^n\mathfrak{D}E \ldots \ldots + {}^n\mathfrak{B}'N \mp {}^n\mathfrak{A}N \pm N') = \alpha,$$

wo das obere Vorzeichen für ein gerades n, das untere für ein ungerades zu nehmen ist.

Das zweyte Glied der nten Unterschiede ist

$$\pm(B - {}^n\mathfrak{A}C + {}^n\mathfrak{B}D - {}^n\mathfrak{C}E + {}^n\mathfrak{D}F \ldots \ldots + {}^n\mathfrak{B}N \mp {}^n\mathfrak{A}N' \pm N'') = \alpha.$$

Weil die (n + 1)ten Unterſchiede = o ſind, ſo iſt (3),

$$\pm(A - {}^{n+1}\mathfrak{A}B + {}^{n+1}\mathfrak{B}C - {}^{n+1}\mathfrak{C}D + {}^{n+1}\mathfrak{D}E \ldots \ldots \mp {}^{n+1}\mathfrak{B}N \pm {}^{n+1}\mathfrak{A}N' \mp N'') = o.$$

Um dieſe Gleichung mit der zweyten Formel für α zu verbinden, bemerke man, daß

$(n+1).1 = 1.\ {}^{n+1}\mathfrak{A}$; $(n+1).{}^{n}\mathfrak{A} = 2.\ {}^{n+1}\mathfrak{B}$;
$(n+1).{}^{n}\mathfrak{B} = 3.\ {}^{n+1}\mathfrak{C}$; $(n+1).{}^{n}\mathfrak{C} = 4.\ {}^{n+1}\mathfrak{D}$;
$(n+1).{}^{n}\mathfrak{D} = 5.\ {}^{n+1}\mathfrak{E}$; etc.

(ſ. Binomial-Coefficienten, 9). Man multiplicire die zweyte Formel für α mit n + 1, ſo iſt, mit Anwendung dieſer Subſtitutionen,

$$\pm({}^{n+1}\mathfrak{A}.1B - {}^{n+1}\mathfrak{B}.2C + {}^{n+1}\mathfrak{C}.3D - {}^{n+1}\mathfrak{D}.4E \ldots \pm {}^{n+1}\mathfrak{B}.(n-1)N \mp {}^{n+1}\mathfrak{A}.nN' \pm (n+1)N'') = (n+1)\alpha.$$

Wegen der Coefficienten in dem letzten Theile der Formel bemerke man, daß der erſte Coefficient, ${}^{n+1}\mathfrak{A}$, in der (n + 1)ten Potenz zugleich der nte iſt; der zweyte, ${}^{n+1}\mathfrak{B}$, zugleich der (n — 1)te, u. ſ. f.

Von dieſer Gleichung ſubtrahire man die Formel für die (n + 1)ten Unterſchiede, und vertauſche ſowohl die Vorzeichen der einzelnen Theile als des Ganzen mit den entgegengeſetzten, und es entſteht nun die Gleichung,

$$\mp(A - {}^{n+1}\mathfrak{A}.2B + {}^{n+1}\mathfrak{B}.3C - {}^{n+1}\mathfrak{C}.4D + {}^{n+1}\mathfrak{D}.5E \ldots \mp {}^{n+1}\mathfrak{B}.nN \pm {}^{n+1}\mathfrak{A}(n+1)N' + (n+2)N'') = (n+1)\alpha.$$

Dieſer Werth von $(n+1)\alpha$ hat die Form der (n + 1)ten Unterſchiede für die Hauptreihe A, 2B, 3C, 4D, 5E . . . nN, (n + 1)N', (n + 2)N''. Alſo iſt der (n + 1)te Unterſchied dieſer n + 2 Größen = $(n+1)\alpha$.

Auf gleiche Art entſteht aus je (n + 2) auf einander folgenden Gliedern der angenommenen Reihe der nten Ord-

nung, z. B. D. E. F . . N'', N' die Reihe der $(n+1)$ten Ordnung, D, 2E, 3F . . $(n+1)N''$, $(n+2)N'$. deren $(n+1)$te Differenzenreihe das beſtändige Differenzglied $(n+1)\alpha$ enthält. Es iſt aber $3D+3E+3F \ldots 3N''+3N'$ eine Reihe der nten Ordnung, deren $(n+1)$te Differenzen alle $=0$ ſind. Daher bleibt die aus jener und dieſer zuſammengeſetzte Reihe, $4D+5E$, $6F \ldots (n+4)N''$, $(n+5)N'$, noch eine arithmetiſche Reihe der $(n+1)$ten Ordnung mit dem beſtändigen Unterſchiede $(n+1)\alpha$.

Der Beweis für jedes andere Stück der Reihe iſt dieſem völlig ähnlich.

19. Exempel. Es ſey das Glied der fünften Differenzenreihe unveränderlich, nämlich

$$-(A-5B+10C-10D+5E-F)=\alpha$$
$$-(B-5C+10D-10E+5F-G)=\alpha,$$

ſo iſt jedes Glied der ſechſten Differenzenreihe $=0$, nämlich

$$A-6B+15C-20D+15E-6F+G=0.$$

Dazu addire man das ſechsfache des zweyten Ausdrucks von α, nämlich

$$-(6B-30C+60D-60E+30F-6G)=6\alpha,$$

ſo iſt

$$A-6.2B+15.3C-20.4D+15.5E-6.6F+1.7G=6\alpha.$$

20. Die nten Potenzen der natürlichen Zahlen ſind eine arithmetiſche Reihe der nten Ordnung, deren beſtändiges Differenzglied iſt $n.n-1.n-2 \ldots 4.3.2.1$.

Denn da die Zahlen ſelbſt von der Eins an eine arithmetiſche Reihe der erſten Ordnung ſind, ſo ſind ihre Quadrate, die aus den Zahlen durch die Multiplication mit 1, 2, 3, 4, etc. nach der Reihe derſelben entſtehen, eine arithmetiſche Reihe der zweyten Ordnung. Multiplicirt man dieſe folgweiſe durch 1, 2, 3, etc. ſo entſteht eine Reihe der dritten Ordnung, und zugleich die Reihe der

Cuborum. Aus dieſen entſteht auf dieſelbe Art eine Reihe der vierten Ordnung, und zugleich die Reihe der Biquadrate. Auf dieſe Art entſteht zugleich die nte Reihe der Unterſchiede und die Reihe der nten Potenzen. Da das Differenzglied der erſten Reihe oder der Zahlen ſelbſt $= 1$ iſt, ſo iſt das Differenzglied der Quadrate $= 2.1$; der Cuborum $= 3.2.1$; der Biquadrate $= 4.3.2.1$; u. ſ. f. der nten Potenzen $= n, n-1.n-2 \ldots\ldots 3.2.1$.

21. Die Glieder der Reihe A, B, C, D, E, etc. einer arithmetiſchen Reihe der nten Ordnung werden folgweiſe durch die Glieder der arithmetiſchen Reihe, $p+q$; $p+2q$; $p+3q$; $p+4q$; etc. multiplicirt, ſo iſt die Reihe $(p+q)A$; $(p+2q)B$; $(p+3q)C$; $(p+4q)D$; etc. eine arithmetiſche Reihe der $(n+1)$ten Ordnung, deren beſtändiges Differenzglied $=(n+1)q\alpha$, wenn α das beſtändige Differenzglied der Reihe A, B, C, D, etc. iſt.

Denn die Reihe, pA, pB, pC, pD, etc. bleibt eine arithmetiſche Reihe der nten Ordnung, wie es die Reihe, A, B, C, D, etc. iſt, da die Differenzenreihen jener aus den Differenzenreihen dieſer durch die Multiplication mit p entſtehen. Die nte Differenzenreihe enthält alſo das beſtändige Differenzglied $p\alpha$, und die $(n+1)$te Differenzenreihe durchaus die Glieder o. Die Reihe, qA, 2qB 3qC, 4qD, etc. iſt eine arithmetiſche Reihe der $(n+1)$ten Ordnung, da die Reihe qA, qB, qC, qD, etc. eine Reihe der nten Ordnung iſt, zufolge des in (18) erwieſenen. Die aus der Reihe, pA, pB, pC, pD, etc. und der Reihe qA, 2qB, 3qC, 4qD, etc. zuſammengeſetzte Reihe bleibt eine Reihe der $(n+1)$ten Ordnung, da die $(n+1)$ten Unterſchiede der erſtern Null ſind; ſo daß die $(n+1)$ten Unterſchiede bloß aus den Gliedern der zweyten Reihe entſtehen. Da die $(n+1)$ten Unterſchiede der Reihe A, 2B, 3C, 4D, 5E, etc. beſtändig und $=(n+1)\alpha$ ſind, ſo ſind für die Reihe qA, 2qB, 3qC, 4qD, etc. die $(n+1)$ten Unterſchiede $=(n+1)q\alpha$.

22. **Exempel.** Die figurirten Zahlen der vierten Ordnung sind 1, 5, 15, 35, 70, 126, 210, etc. deren vierte beständige Unterschiede = 1 sind. Die Glieder dieser Reihe multiplicire man folgweise durch 1, 3, 5, 7, etc. so erhält man die Reihe, 1, 15, 75, 245, 630, 1386, 2730, etc. deren fünfte Unterschiede = 10 sind. Es ist hier $\alpha = 1$; $n = 4$, $q = 2$, also $(n+1)q\alpha = 10$.

23. Die ganzen Potenzen der Zahlen, welche in gemeiner arithmetischer Progression sind, bilden eine arithmetische Reihe, deren Ordnungszahl der Exponens der Potenz ist. Die Progression der Wurzeln sey a; $a+b$; $a+2b$; $a+3b$; etc. der Exponens der Potenz $= n$, so ist das beständige Glied der nten Unterschiede $= n.n-1.n-2 \ldots 3.2.1.b^n$.

Denn es gelte der Satz für die nte Potenz, so daß die Reihe a^n. $(a+b)^n$. $(a+2b)^n$. $(a+3b)^n$, etc. (S) eine arithmetische der nten Ordnung, und ihr ntes Differenzglied $= D$ sey. Die Reihe a^{n+1}. $(a+2b)^{n+1}$. $(a+3b)^{n+1}$, $(a+4b)^{n+1}$, etc. (T) ist dadurch eine arithmetische Reihe der $(n+1)$ten Ordnung, deren beständiges Differenzglied $= (n+1)bD$. Dieses sey $= D'$. Nun ist, für $n = 1$, S eine arithmetische Reihe der ersten Ordnung, in welcher $D = b$, und daher T eine Reihe der zweyten Ordnung, in welcher $D' = 2b^2$. Demnach ist für $n = 2$, $D = 2b^2$, und $D' = 3.2b^3$; also für $n = 3$, $D = 3.2b^3$. und $D' = 4.3.2.b^4$; folglich allgemein $D = n.n-1.n-2 \ldots 3.2.1\,b^n$.

24. Die Werthe einer rationalen Gleichung vom nten Grade, $x^n - ax^{n-1} + bx^{n-2} \ldots \pm hx \mp k = 0$, machen eine arithmetische Reihe der nten Ordnung aus, in welcher das beständige nte Glied der Unterschiede ist $= n.n-1.n-2 \ldots 2.1.\beta^n$, wenn für x successiv die Glieder der Progression α, $\alpha+\beta$, $\alpha+2\beta$, $\alpha+3\beta$, etc. gesetzt werden.

Denn dieſer Werth wird aus ſo vielen Theilen zuſammengeſetzt, als die Gleichung Glieder hat. In den erſten Unterſchieden der Werthe iſt das niedrigſte Glied k nicht vorhanden, in den zweyten nichts aus hx, u. ſ. f. In der Reihe der $(n-1)$ten Unterſchiede ſind nur noch die von x^n und ax^{n-1} enthalten. Die von der letztern dieſer Größen ſind ſich alle gleich, ſo daß in der Reihe der nten Unterſchiede nur die von x^n enthalten ſind. Dieſe ſind jedes $= n.n-1.n-2..3.2.1.\beta^n$.

Hiervon wird ein ſehr nützlicher Gebrauch zur Auflöſung der Gleichungen gemacht, ſ. Gleichung.

Interpolirung der arithmetiſchen Reihen.

25. Man ſetze für x, welches bisher eine ganze Zahl bedeutet hat, einen Bruch $\frac{z}{n}$, ſo wird in der Formel (7) die Größe y nach demſelben Geſetze gebildet, wie für ganze Werthe von x, und es bedeutet für einen gebrochnen Werth von x das dazu gehörige y ein eingeſchobenes Glied, deſſen Stelle nach dem nächſt vorhergehenden, zu einem ganzen Stellenzeiger gehörigen Gliede, durch den Überſchuß von z über das nächſt kleinere Vielfache von n angezeigt wird, indem zwiſchen je zwey Glieder der urſprünglichen Reihe $n-1$ Glieder eingeſchoben, oder ſtatt je eines Gliedes n Glieder geſetzt werden. Z. B. wenn $x = \frac{1}{5}7$, ſo iſt y das 2te Glied nach dem 3ten der urſprünglichen Reihe, in welcher je 4 eingeſchoben ſind. Oder man nehme ſtatt je eines Gliedes n Glieder, und es iſt y das zte Glied der neuen Reihe. Wird die Stelle von y in dieſer Reihe durch z bezeichnet, ſo iſt

$$y = A + z.\frac{a}{n} + \frac{z.z-n.}{1.2.}.\frac{b}{n^2} + \frac{z.z-n.z-2n.}{1.2\ 3.}.\frac{c}{n^3} + \frac{z.z-n.z-2n.z-3n.}{1.2.3.4}.\frac{d}{n^4} + \text{etc.}$$

26. Das beſtändige Unterſchiedsglied in der interpolirten Reihe iſt für eine Reihe der erſten Ordnung $= \frac{a}{n}$;

für eine der zweyten $= \frac{b}{n^2}$; für eine der dritten $= \frac{c}{n^3}$; für eine der vierten $= \frac{d}{n^4}$, u. s. f. wenn die beständigen Unterschiede in den ursprünglichen Reihen sind, a, b, c, d, etc. Denn wenn die Zähler der Coefficienten entwickelt, und nach den Potenzen von z geordnet werden, so ergeben sich rationale ganze Functionen von z, deren letzte Differenzenreihen einerley sind mit denen einer Gleichung von dem Grade der höchsten Potenz von z in dem Zähler, (24.). Da der Coefficient von z in den Factoren jedes Coefficienten der Reihe $= 1$ ist, so ist, für z alle ganze Zahlen, nach ihrer Folge gesetzt, der erste Unterschied in dem ersten Coefficienten $= 1$; der zweyte beständige Unterschied in dem zweyten $= 1 . 2$; der dritte beständige Unterschied in dem dritten $= 1 . 2 . 3$; der vierte beständige Unterschied in dem vierten $= 1 . 2 . 3 . 4$, u. s. f. (eb. das.). Also ist der beständige Unterschied des zweyten Theils von $y = \frac{a}{n}$, des dritten $= \frac{b}{n^2}$; des vierten $= \frac{c}{n^3}$; des fünften $= \frac{d}{n^4}$, u. s. w. Der beständige Unterschied für y selbst ist dem beständigen Unterschiede des letzten Theils gleich.

27. Exempel. Es werden in der Reihe der Würfel, 1, 8, 27, 64, 125 etc. zwischen die Würfel von 4 und 5 drey eingeschoben, nämlich die von 4,25; 4,50; 4,75, woran sich der von 5 anschließt. Hier ist das beständige Glied der dritten Unterschiede das gleichnamige für die ursprüngliche Reihe, 6, durch 4^3 oder 64 dividirt.

y	Δy	$\Delta^2 y$
$(4,00)^3 = 64,000000$	12,765625	1,593750
$(4,25)^3 = 76,765625$	14,359375	1,687500
$(4,50)^3 = 91,125000$	16,046875	1,781250
$(4,75)^3 = 107,171875$	17,828125	
$(5,00)^3 = 125,000000$		

$\Delta^3 y$
0,093750
0,093750

28. Die Formel in (25) wird beſonders zum Einſchalten einer Größe zwiſchen andre gleichartige gebraucht, ſo daß ſie nach demſelben Geſetze wie dieſe gebildet ſey, wenn gleich dieſes Geſetz nicht analytiſch gegeben, ſondern nur mittelbar aus individuellen Größen, wie in allen mathematiſchen Tafeln, oder auch empiriſch durch Beobachtungen erhalten wird, (ſ. Einſchalten).

29. Zur allgemeinen Darſtellung einer Größe aus ihrer Stelle und den erſten Gliedern der Differenzreihen iſt die Formel (7) bequemer. Nur müſſen die Werthe von x nicht auf ganze Zahlen eingeſchränkt werden, weil das Geſetz der Formation bleibt, wenn x einen gebrochnen Werth $\frac{z}{n}$ hat.

30. In der Formel (7) für das Glied in der Stelle x ſetze man ſtatt x — 1; x — 2; x — 3; etc. allgemeiner x — m; x — n; x — p, etc. ſo wird nun y durch die Glieder beſtimmt, welche zu den Stellen o, m, n, p, etc. gehören, anſtatt daß in (7) die Größe y durch die Glieder in den Stellen o, 1, 2, 3, etc. beſtimmt wird. Für die Factoren, a, $\frac{1}{2}$b; $\frac{1}{3}$c, $\frac{1}{4}$d, ſetze man

, C, D, etc. ſo iſt

$$= A + Bx + Cx(x-m) + Dx(x-m)(x-n) + Ex(x-m)(x-n)(x-p) + \text{etc.}$$

Der Werth von y für jedes x iſt der Werth einer Gleichung von dem Grade, welcher mit der Anzahl der Factoren in dem letzten Gliede, die nämlich x enthalten, übereinkommt. Sie ſind alſo auch Glieder einer arithmetiſchen Reihe einer Ordnung deſſelben Grades, wenn die x in einfacher arithmetiſcher Reihe genommen werden. Die ſucceſſiven Unterſchiede der Werthe in den Stellen o, m, n, p, etc. kann man aber nicht auf dieſelbe Art zur Beſtimmung jedes andern Werthes anwenden, wie die Unterſchiede der Werthe in den Stellen o, 1, 2, 3, etc. angewandt werden, da die Abſtände der Glieder ungleich ſind. In dem Artikel, Einſchalten, wird gezeigt, wie die Unterſchiede modificirt werden müſſen, um ſie zur Beſtimmung jedes Werthes y zu gebrauchen. Allein aus den Werthen von y in den Stellen o, m, n, p, etc. laſſen ſich die Coefficienten folgendergeſtalt beſtimmen.

Es ſeyn für o, m, n, p, etc. als Werthe von x, die Werthe von y folgende: α, β, γ, δ, etc. ſo iſt

$$\alpha = A$$
$$\beta = A + Bm$$
$$\gamma = A + Bn + Cn(n-m)$$
$$\delta = A + Bp + Cp(p-m) + Dp(p-m)(p-n)$$

etc.

Aus dieſen Gleichungen werden die Werthe von A, B, C, D, etc. nach der Reihe gefunden.

Geſchichte der Unterſuchungen über die arithmetiſchen Reihen.

Die erſten arithmetiſchen Reihen, welche man betrachtet hat, ſind die Polygonalzahlen und die figurirten Zahlen. Sie finden ſich ſchon in Stifels Arithmetica integra. Faulhaber, ein Rechenmeiſter zu Ulm um 1600,

ſuchte geheime Winke über die göttliche Regierung der Welt in den Pyramidalzahlen, fand aber doch auch coſſiſche oder algebraiſche Ausdrücke für ſie, alſo für Summen von Polygonalzahlen, das iſt für die zweyten Summen einer gemeinen arithmetiſchen Reihe. Er fand allgemeine Ausdrücke für die Binomial-Coefficienten, die er pondera nannte. Dann fand er auch Formeln für die Summen der Potenzen, ſelbſt für die Summen ſolcher Summen. Da Bernegger in Strasburg gelehrt hatte, wie die Würfel aus einer arithmetiſcher Progreſſion erwachſen, ſo ward Faulhaber dadurch veranlaßt, dieſes auf die höhern Potenzen auszudehnen, und berechnete die ſucceſſiven Differenzen der Potenzen bis mit auf die zwanzigſte Potenz, und fand für die beſtändigen Differenzen der Potenzen, deren Wurzeln um Eins zunehmen, das (20.) erwieſene Geſetz. (Käſtners Geſch. der Math. 3r Bd. S. 111 ff.)

Wallis ſuchte das Verhältniß der Summe der Wurzeln, Quadrate, und höherer Potenzen bis zur ſechſten, die Null mit gerechnet, zu der Summe von eben ſo vielen der größten unter ihnen gleichen Größen durch Induction. Z. B. Es iſt

$$\frac{0+1+8+27+64+125}{125+125+125+125+125+125} = \frac{225}{750}$$

$= \frac{6}{20} = \frac{1}{4} + \frac{1}{20}$. Aus mehrern ſolchen Fällen ſchließt er, daß der Überſchuß über $\frac{1}{4}$ immer ſey $\frac{1}{4}$ dividirt durch die Anzahl der Glieder im Zähler nach der Null.

Für die Summen der vierten, fünften und ſechſten Potenzen giebt er nur die von ihm entdeckten Formeln an, welche durch Induction nach der angeführten Methode zu finden ſchwer geweſen ſeyn muß. Sein eigentlicher Zweck iſt, Reihen von unendlich vielen Gliedern zu ſummiren, deren erſtes Null, und das letzte endlich iſt, die zwiſchen ihnen liegenden alſo jedes von den nächſten unendlich wenig verſchieden ſind. Dieſes wendet er auf Quadraturen und Cubaturen in der Geometrie an. Eine Reihe von unendlich vielen Größen, die von o an ſtetig zunehmen, es ſey in arithmetiſcher Progreſſion, oder wie die

Quadrate, Würfel, Biquadrate, und andere Potenzen arithmetisch proportionaler Größen, verhält sich zu der Reihe von so vielen, der größten in jener Reihe gleichen, Größen, wie folget: I. 1 : 2; II. 1 : 3; III. 1 : 4; IV. 1 : 5; etc. Das erste Verhältniß für arithmetisch proportionale, das zweyte für die Quadrate solcher Größen, das dritte für die Würfel, u. s. f. Dieses ist der Satz aus der Integralrechnung, $\int x^m dx = \frac{1}{m} x^{m+1}$, wenn das beständige Increment der Wurzeln als ein unendlich kleiner Factor betrachtet wird, um die Summe aller Glieder der Reihe endlich zu machen. Die Allgemeinheit jenes Verhältnisses gründet Wallis auf die Induction aus den berechneten Fällen. Nach einer hieraus ferner gefolgerten Analogie, die aber nicht als streng erwiesen angesehen werden kann, findet Wallis auch, wie eine unendliche Reihe von Quadratwurzeln, Cubikwurzeln, Biquadratwurzeln etc. aus Zahlen, die arithmetisch proportional sind, sich zu eben so vielen, der größten unter ihnen gleichen, Größen verhalten, nämlich II. 1 : $1\frac{1}{2}$; III. 1 : $1\frac{1}{3}$; IV. 1 : $1\frac{1}{4}$ etc. wo die römischen Zahlen den Grad der Wurzeln anzeigen. Hieraus folgert er für gebrochne Exponenten, wie $\frac{m}{n}$, das Verhältniß der Reihe der gebrochnen Potenzen zu eben so vielen, der größten unter ihnen gleichen, Größen, wie $1 : 1 + \frac{m}{n}$. Hier war ein wichtiger Satz aus der Integralrechnung gefunden, wenn man das Integriren als ein Summiren betrachtet.

Jakob Bernoulli erinnert gegen die von Wallis gebrauchte Methode der Induction, daß sie nicht wissenschaftlich genug sey, und zeigt, wie man die Verhältnisse scharf erweisen könne, wofern man sie nur erst durch Induction gefunden habe. Acta Erud. 1686. Operum T. I. nr. 24. Dieses ist aber noch ein unbequemer Weg. Weit besser ist das Verfahren die Summen der Potenzen

der natürlichen Zahlen zu finden, welches er in der Arte conjectandi. pag. 96. lehrt. Das Geſetz findet er durch Induction ſehr ſinnreich.

Newton hat zuerſt die Formel (7.) für ein Glied einer arithmetiſchen Reihe irgend einer Ordnung gegeben, in dem Lemmate V. L. III Princip. mathem. Phil. naturalis, wo er zeigt, wie durch irgend eine Anzahl gegebener Puncte eine krumme Linie von der paraboliſchen Gattung gezogen werden könne, ſowohl für den Fall, da die Abſtände der gegebenen Glieder gleich groß ſind, als auch für den Fall, da die Abſtände nicht gleich groß ſind. In dem letztern Falle zeigt er, wie die ſucceſſiven Unterſchiede zunehmen, und durch die einfachen, doppelten, dreyfachen und folgende vielfachen Abſtände zu theilen ſind, wovon ſchon einiges in (30.) erwähnt iſt. Die Interpolation war hier der Zweck. In einem Aufſatze von Newton, Methodus differentialis, iſt das Verfahren etwas erläutert. Einen Commentar dazu liefert Jakob Stirling in der Schrift: Methodus differentialis, ſive tractatus de ſummatione et interpolatione ſerierum infinitarum. Lond. 1730. 4. in dem zweyten Abſchnitte.

Jakob Bernoulli zeigt in der Arte conjectandi pag. 98. nur an dem Beyſpiele von den arithmetiſchen Reihen der dritten Ordnung, wie die Glieder der höhern arithmetiſchen Reihen aus den Anfangsgliedern der Hauptreihe, und der Differenzreihen gebildet werden, und wie die Summe einer gegebenen Anzahl Glieder gefunden wird.

De Lagny hat eine weitläufige Abhandlung über die höhern arithmetiſchen Reihen, und ihre Anwendung zur Auflöſung der Gleichungen geliefert. Traité des progreſſions arithmétiques de tous les degrés à l'Infini. Mem. de l'Acad. des Sc. 1722. Er zeigt, wie die Glieder einer ſolchen Reihe aus den Anfangsgliedern der Hauptreihe und der Differenzreihen, die er nombres générateurs nennt, zuſammengeſetzt werden. Auch giebt

er die Formeln für dieſe Anfangsglieder. Das Verfahren iſt aber nur Induction.

Die Formel (4.) irgend ein Glied einer arithmetiſchen Reihe der (n — 1)ten Ordnung durch die n nächſt vorher gehenden Glieder auszudrücken, hat Moivre in ſeiner Doctrine of chances zuerſt vorgetragen, nach Dan. Bernoulli's Anführung in den Comm. Petr. vet. T. III. p. 87. In der zweyten Ausgabe dieſes Werks von 1738. iſt die Formel S. 195 anzutreffen. Die erſte Ausgabe iſt von 1717. Die Formel (7.) für ein Glied der Hauptreihe durch die Anfangsglieder der Unterſchiedsreihen iſt daſ. S. 52 befindlich.

Friedrich Chriſt. Maier in einer Abhandlung de Arithmetica figurata ejusque usibus aliquot, Comm. Petr. vet. T. III. a. a. 1728 nennt die arithmetiſchen Reihen höherer Ordnungen series collectivas. Er zeigt, wie ſie zu ſummiren ſind, und wie man davon Gebrauch machen könne, theils zur Auflöſung der Gleichungen, theils zur Entdeckung des Geſetzes der Binomial-Coefficienten. In einer andern Abhandlung eb. daſ. Propoſitiones cyclometricae aliquot, bedient er ſich dieſer Reihen, das Geſetz der Coefficienten in den Formeln für die Chorden der Vielfachen eines durch ſeine Chorde gegebenen Bogens zu entdecken.

Die beiden Formeln für das Glied einer Differenzenreihe (2.) und das Glied einer Hauptreihe (7.) hat Käſtner zuerſt allgemein erwieſen. Analyſis endlicher Größen §. 724. 725. Seine Beweiſe ſind in dieſem Artikel gebraucht.

Euler gründet auf die Betrachtung der endlichen Differenzen die Differentialrechnung. Die beiden erſten Capitel ſeines Werks über dieſe handeln von den endlichen Differenzen und ihrem Gebrauche in der Lehre von den Reihen.

Man vergleiche noch Pasquich mathematiſche Analyſis 1. Th. 16. Abſchnitt.

Buſſe Syſtem der allgemeinen Differenzen in deſſelben Beyträgen zur Mathem. und Phyſik.

Hindenburg. Überſicht der Hauptſätze der allgemeinen Differenzen und Summen, im Archiv der Mathematik. 1. Bd.

Die wichtige Lehre von den höhern arithmetiſchen Reihen wird in den Lehrbüchern nicht hinlänglich ausgeführt, oder ſie wird gar vernachläſſigt.

Arithmetiſche Scale iſt die geometriſche Reihe, nach welcher der relative Werth der Zahlziffern in ihren Stellen beſtimmt wird, indem jede Ziffer der Factor zu einem gleichſtelligen Gliede jener Reihe iſt, ſo daß die Summe aller Producte aus jeder Ziffer in das zugehörige Glied der Reihe die ganze Zahl giebt. In dem dekadiſchen Zahlenſyſtem, dem gewöhnlichen, iſt die geometriſche Reihe, 1 : 10 : 100 : 1000 : etc. Die Factoren dieſer Glieder werden allein hingeſchrieben, die Glieder aber in Gedanken zugeſetzt. Allgemein kann jede ganze Zahl durch die Reihe, $a + br + cr^2 + dr^3 + er^4 +$ etc. dargeſtellt werden, wo die Buchſtaben ganze Zahlen bedeuten, und a, b, c, d, etc. kleiner als r ſind, auch o ſeyn können. Hier iſt $1 : r : r^2 : r^3 :$ etc. die arithmetiſche Scale.

Iſt die Zahl eine dekadiſche, und man will ſie in eine Zahl nach einer andern Scale, oder einem andern Syſtem verwandeln, ſo dividire man ſie durch r der Reſt iſt = a. Den Quotienten dividire man wieder durch r, ſo iſt der Reſt = b, den zweyten Quotienten dividire man durch r, ſo iſt der Reſt = c. Der dritte Quotient durch r dividirt giebt den Reſt d; der vierte den Reſt e, u. ſ. f. Wo die Diviſion aufgeht, iſt der Factor, der zu einer Potenz von r gefunden werden ſoll, Null. Beyſpiele ſ. in den Artikeln Dodekadik und Dyadik.

Eine Zahl, die nach einer andern Scale, als der dekadiſchen, ausgedruckt iſt, in eine dekadiſche zu verwandeln, dividirt man ſie fortgeſetzt durch 10, und ſondert die Reſte

ab. Diese geben nach der Reihe die Einer a, die Zehner b, die Hunderte c, die Tausende d, u. s. f. Exempel a. a. O.

Büffon hat der geometrischen Reihe, welche einem Zahlensystem zum Grunde liegt, den Namen, Echelle arithmétique, gegeben. Mem. de l' Ac. des Sc. 1741. Mehreres in dem Artikel: Zahlensystem.

Arithmologia ist der Titel eines Buchs über die Zahlen und ihre geheimen Eigenschaften von dem Jesuiten Kircher: Arithmologia sive de abditis numerorum mysteriis. Romae 1665. 301 pag. in 4. darin gute historische Untersuchungen über Zahlbuchstaben und Zahlziffern; Beschreibung der magischen Quadrate und der Planetensiegel, wozu jene angewandt wurden; viele cabbalistische Thorheiten, die mit Zahlen und andern Symbolen ehedem getrieben sind, endlich des Verfassers phantastische Bemerkungen über gewisse Beschaffenheiten der Zahlen, dergleichen schon bey den jüngern Pythagoräern vorkommen.

Arithmomanctica, dasselbe was Arithmetica divinatoria, oder errathende Rechenkunst.

Arithmonomia, dasselbe was Arithmetik, insbesondere die theoretische.

Armilla, der ringförmige Raum zwischen zwey concentrischen Kreisen. Torricelli gebraucht diesen Ausdruck, (Opera geom. P. II. p. 136). Das Wort bedeutet einen Armreif, dergleichen bey den alten Römern ein Ehrenzeichen für Soldaten war.

Es sey a der Halbmesser des größern Kreises, b des kleinern, und $1:\pi$ das Verhältniß des Durchmessers zum Umfange, so ist die Fläche des erstern $= \pi aa$, des andern $= \pi bb$; also die Fläche des Ringes $= \pi(aa - bb) = \pi(a+b)(a-b)$.

Die Ringfläche ist gleich der Fläche eines Kreises, dessen Halbmesser die mittlere geometrische Proportionale

zwiſchen der Summe und dem Unterſchiede der beiden Halbmeſſer a und b iſt.

Ars major, oder magna, italieniſch, Arte maggiore, hieß im 16ten Jahrhunderte die Algebra, im Gegenſatze gegen die gemeine Rechenkunſt, ſ. Algebra.

Articulus, eine durch 10 theilbare Zahl.

Artificialis numerus, ſinus, tangens, iſt der Logarithme einer Zahl, eines Sinus, einer Tangente u. dgl.

Aſſignabilis quantitas, eine Größe, die ſich mit jeder beſtimmten Größe vergleichen läßt, es ſey auf rationale oder irrationale Art, im Gegenſatze gegen unendlich kleine Größen, die nur in ſo fern Größen heißen können, als ſie mit andern ihrer Art vergleichbar ſind.

Aſymmetria, bey den Analyſten des 17ten Jahrhunderts daſſelbe, was man jetzt Irrationalität oder Incommenſurabilität nennt, ein Verhältniß zweyer Größen, das ſich in ganzen Zahlen nicht vollkommen genau ausdrucken läßt, wie das zwiſchen 1 und $\sqrt{2}$, der Seite eines Quadrats und der Diagonale, dem Durchmeſſer eines Kreiſes und dem Umfange.

Aſymptote iſt eine Linie, welche unbeſtimmt verlängert neben einer krummen, gleichfalls unbeſtimmt verlängerten, Linie ſich ſo erſtreckt, daß der Abſtand dieſer von jener kleiner als jede angebliche Größe wird, ohne daß ſich beide Linien ſchneiden. Das Wort iſt zuſammengeſetzt aus dem verneinenden ἀ, aus συν, mit, oder zuſammen, und πιπτειν, fallen.

Eine Aſymptote kann eine gerade oder eine krumme Linie ſeyn. Doch verſteht man unter Aſymptote ſchlechthin eine gerade.

Die Hyperbel hat zwey Aſymptoten, die durch ihren Mittelpunct gehen, und mit der Axe gleich große

Winkel machen. Ihre vier Zweige nähern sich diesen beiden geraden Linien, nach beiden entgegengesetzten Richtungen derselben, ohne sie eher als in einer unendlichen Entfernung zu erreichen. In Fig. 31. Tab. II. ist ein Zweig einer Hyperbel mit seiner Asymptote CS abgebildet. Es ist C der Mittelpunct der Hyperbel, A ihr Scheitel, CX die Axe, AMS der Zweig; CP die auf der Asymptote genommene Abscisse, PM die mit der andern Asymptote parallele Ordinate, so wie AB durch den Scheitelpunct A. Die Gleichung zwischen CP und PM ist diese: $CP \times PM = CB \times AB$. Folglich wird PM immer kleiner, je größer CP genommen wird, und da für CP keine endliche Gränze des Wachsthums ist, so ist auch keine endliche Gränze des Abnehmens für PM. Daher hat auch der senkrechte Abstand eines Punctes der Hyperbel von der Abscissenlinie CS keine endliche Gränze des Abnehmens.

Die Conchoide stellt auch die Annäherung einer krummen Linie an eine gerade, ohne eine endliche Gränze derselben, sehr gut dar. In (Fig. 32. Tab. II.) ist BMN ein Zweig der Conchoide, C der Pol derselben, APS die Abscissenlinie, PM eine senkrechte Ordinate, CAB die senkrechte auf AS, AB die gegebene Linie, welcher QM gleich ist. Nun ist CQ: AC = QM: PM. Da CQ ohne Ende wachsen kann, so nimmt PM ohne Ende ab, so daß in jeder endlichen Entfernung AP die Ordinate PM noch endlich bleibt.

Die Asymptote ist als berührende Linie in einem unendlich entfernten Puncte anzusehen. Eine gerade Linie, die durch C an einen Punct des Zweiges AS der Hyperbel (Fig. 31.) gezogen wird, schneidet den entgegengesetzten Zweig an der andern Seite von CS jenseits C. Fällt sie in die Asymptote, so berührt sie die Hyperbel an zwey entgegengesetzten, aber unendlich entfernten Puncten. Da aber an der Hyperbel eine berührende Linie nur einen einzigen Punct mit der krummen Linie gemein haben kann, so müssen die beiden unendlich entfernten Puncte für einen

deren Richtung derjenigen einer geraden Linie immer näher kommt.

In dem Artikel, krumme Linien, werden mehrere Beyspiele von den Asymptoten beiderley Art, und ihrer Herleitung aus der Gleichung für eine krumme Linie mitgetheilt.

Von den Asymptoten der Hyperbel handelt Apollonius in dem zweyten Buche seines Werks über die Kegelschnitte, wo auch diese Benennung gebraucht wird. Sie sind aber schon vor ihm den Geometern bekannt gewesen. Archimedes nennt sie gerade Linien, welche dem Schnitte des stumpfwinklichten Kegels (der Hyperbel) am nächsten sind. (Vorrede zu der Schrift von Konoiden und Sphäroiden, vergl. 28ten Satz.). Ein Italiener, Franciscus Barocius, hat in einem weitschweifigen Werke (Venedig 1586, auf 269 Quartf.) dreyzehn Arten angegeben, wie zwey Linien gezogen werden können, die sich immer näher kommen, ohne sich zu schneiden, so weit sie auch verlängert werden. Es ist immer die Hyperbel, ausser nach der zehnten und eilften Art. Nach der letztern dieser ist es die Konchoide, nach der zehnten eine krumme Linie, die er selbst nicht näher zu bestimmen vermag. Sie enthält die Durchschnitte einer Folge von Kreisen, die eine gemeinschaftliche berührende haben, und einer zugeordneten Folge von Parallelen mit jener, die sich derselben, aber mit abnehmenden Abständen von einander, nähern. Ein Theil dieses Werkes ist polemisch. Der Verfasser will die Fehler verschiedener Geometer, die sie in ihren Beweisen von den Asymptoten begangen haben, berichtigen, und findet selbst den Apollonius nicht tadelfrey.

Newton hat zuerst die krummlinichten Asymptoten bey den Linien vom dritten Grade (oder krummen der zweyten Ordnung) angegeben.

Ausführlichern Unterricht über die Asymptoten jeder Art findet man in

Euleri Introd. in Analysin Infin. T. II. Cap. 7. 8

Cramer Analyse des lignes courbes. Ch. 8.

Aufgabe (Problema) ist eine Frage, wie etwas Unbekanntes aus gegebenen Größen unter gewissen Bedingungen gefunden werden möge. In der Geometrie insbesondere, eine Construction zu erfinden, die das verlangte leistet, z. B. ein Rechteck in ein Quadrat oder in ein anderes mit einer gegebenen Seite zu verwandeln; durch drey Puncte einen Kreis zu beschreiben; in einem Kreise ein Dreyeck zu zeichnen, dessen Seiten, wann nöthig, verlängert, jede durch einen gegebenen Punct gehen. Eine Aufgabe kann auch zum Gegenstande den Beweis eines Satzes haben, der aus Induction wahr gefunden ist, oder als wahr behauptet wird. Die Frage selbst, ihre Auflösung, und der Beweis der Richtigkeit des Verfahrens müssen in dem Vortrage deutlich unterschieden werden. Bey den Anwendungen ist es sehr bequem, die Vorschriften des Verfahrens kurz vorzufinden, ohne daß man nöthig habe, die Vorbereitungen zu der Auflösung und die Beweise wieder durchzugehen, nachdem man sie einmahl gehörig gefaßt und geprüft hat.

Eine bestimmte Aufgabe (Problema determinatum, limitatum) ist eine solche, die nur auf eine Art oder nur auf einige, der Anzahl nach bestimmte, Arten aufgelöset werden kann. Eine unbestimmte Aufgabe (Problema indeterminatum, illimitatum) ist eine solche, die unzählich viele Auflösungen zuläßt. Z. B. ein gleichschenklichtes Dreyeck, dessen Winkel an der Grundlinie doppelt so groß sind als der Winkel am Scheitel, ist nur auf eine Art möglich (Euklides IV. 10.); ein gleichschenklichtes Dreyeck, dessen Umfang und Inhalt gegeben sind, ist auf zweyerley Art möglich, wofern der Inhalt nur nicht größer ist als der Inhalt eines gleichseitigen von demselben Umfange. Es ist eine Aufgabe mit zwey Auflösungen, aus zwey gegebenen Puncten an einen Punct eines gegebenen Kreises Linien so zu ziehen, daß die Linie, welche die beiden andern Durchschnittspuncte jener Linie und des Kreises verbindet, der Linie durch die beiden gegebenen Puncte parallel sey. (S. Analysis als Methode,

5te Aufgabe, und mehrere daselbst, wie auch in dem Artikel, Anwendung der Analysis auf die Geometrie.). Eine unbestimmte Aufgabe ist, über einer gegebenen Linie ein Dreyeck zu zeichnen, worin der Winkel, welcher jener Linie gegen über steht, eine gegebene Größe habe; oder ein Dreyeck, worin die beiden andern Seiten ein gegebenes Verhältniß haben. Für beide ist der Kreis der Ort der Auflösung.

In der Analysis ist eine Aufgabe bestimmt, wenn so viele unabhängige Gleichungen als unbekannte Größen vorhanden sind. Sind weniger Gleichungen da als unbekannte Größen, so ist die Aufgabe unbestimmt. Z. B. Zwey Quadrate von rationalen Wurzeln zu finden, deren Summe das Quadrat einer rationalen Wurzel ist. Oder: eine Zahl zu finden, die durch m dividirt den Rest p, durch n dividirt den Rest q lasse.

Bey der Auflösung bestimmter Aufgaben muß immer gezeigt werden, wenn, wie, und auf wie vielerley Arten die Aufgabe möglich ist. Die Alten nannten dieses διορισμος, determinatio. Pappus in coll. mathem. L. VII. praef.

Diophanteische Aufgaben sind solche algebraische, deren Auflösungen in ganzen oder in rationalen gebrochnen Zahlen verlangt werden, dergleichen die eben angeführten sind. S. unbestimmte Analytik.

Linearische Aufgabe ist eine geometrische, die mittelst des Durchschnitts zweyer geraden Linien aufgelöset werden kann. Damit stimmen in der Algebra die Aufgaben, welche auf eine Gleichung vom ersten Grade führen, worin die unbekannte Größe nur auf eine Dimension steigt.

Ebene Aufgabe (Problema planum) ist eine solche, die mittelst der Durchschnitte einer geraden Linie und eines Kreises, oder eines Kreises mit einem andern Kreise aufgelöset wird. Damit stimmen in der Algebra die Aufgaben, welche auf eine Gleichung vom zweyten

Grade führen, da hierin die unbekannte Größe zwey Dimensionen erhält.

Körperliche Aufgabe (Problema solidum) ist in der Geometrie eine solche, die nur mittelst der Durchschnitte eines Kreises und eines Kegelschnittes aufgelöset werden kann, z. B. die Aufgabe zwischen zwey gegebenen Linien zwey mittlere in geometrischer Proportion zu finden. Eine solche ist, ein gleichschenkliches Dreyeck zu zeichnen, in welchem die Winkel an der Grundlinie jedes viermahl so groß sind als der gegen über stehende Winkel, wodurch sich das ordentliche Siebeneck in einen Kreis einschreiben läßt. Sie führt auf eine Gleichung vom sechsten Grade, die aber einer vom dritten Grade gleich zu halten ist. (Goniometrie, VI.) Sie wird durch eine Parabel und den Kreis construirt. So ist es auch eine körperliche Aufgabe, ein Dreyeck zu zeichnen, in welchem die Winkel an der Grundlinie jeder viermahl so groß sind, als der gegen über liegende Winkel, wodurch ein ordentliches Neuneck in einen Kreis eingeschrieben wird. Die Aufgabe führt auf eine Gleichung vom achten Grade, die einer vom vierten Grade gleich zu halten ist. Sie wird also durch den Kreis oder auch eine Hyperbel und die Parabel construirt.

Die Benennungen, ebene und körperliche, für Aufgaben rühren daher, daß der Kreis eine Figur ist, deren Zeichnung in einer Ebene unmittelbar ausgeführt werden kann, dagegen die Kegelschnitte durch den Schnitt eines Kegels mit einer Ebene gebildet werden. Man muß eine gewisse Zusammensetzung von Linien machen, um sie mit stetiger Bewegung in einer Ebene zu beschreiben.

Überkörperliche Aufgabe (problema fursolidum) ist eine solche in der Geometrie, die nicht anders als durch krumme Linien von einer höhern Gattung als die Kegelschnitte sind, aufgelöset werden kann.

Örtliche Aufgabe (Problema locale) ist eine unbestimmte Aufgabe, zu deren Auflösung jeder Punct

einer gehörig zu bestimmenden Linie dient. Sie ist eine einfache, wenn dieser Ort eine gerade Linie ist, eine ebene, wenn es eine Kreislinie, eine körperliche, wenn es der Umfang eines Kegelschnittes, eine überkörperliche (problema fursolidum), wenn es eine Linie von einer höhern Ordnung ist.

Ein Lehrsatz wird in eine Aufgabe verwandelt, wenn die Relation der Größen, welche in dem Lehrsatze ausgesagt ist, zur Bedingung gemacht wird. Z. B. die Aufgabe, zwischen zwey Linien eine mittlere geometrische Proportionale zu finden, enthält als Bedingung, was in dem Satze von der auf einen Durchmesser eines Kreises senkrechten Ordinate ausgesagt wird. Diese Art Aufgaben sind die einfachsten. Sie enthalten eine einfache Bedingung. Eine andere Art Aufgaben ist die, wo mehrere Bedingungen zugleich zu erfüllen sind, z. B. einen Kreis zu ziehen, der zwey gegebene gerade Linien berührt, und durch einem gegebenen Punct geht. Die Form, welche man einen Satze geben mag, ob die eines Lehrsatzes, oder die einer Aufgabe, ist zwar nicht etwas sehr wesentliches, allein es scheint doch, daß man Relationen der Größen in Sätzen, Bedingungen in Aufgaben aufstellen müsse. Z. B. die Relation zwischen dem Sonnenjahre, dem periodischen Monathe, und dem synodischen Monathe sollte durch einen Lehrsatz dargestellt werden. Daraus erhalten dann die Aufgaben, den einen oder den andern Monath zu finden, ihre Auflösung, gleichsam als Folgerungen.

Merkwürdige Aufgaben aus der reinen Mathematik, welche zu ihrer Zeit die Mathematiker beschäftigt haben, sind, die Beaunische — die Delische — die Florentinische — die Isoperimetrische — die allgemeine der alten Geometer für Kegelschnitte — die Keplerische — die Aufgabe von der Quadratur des Kreises — die Aufgaben von den Trajectorien, den rechtwinklichten und den reciproken — die Aufgabe, einen geradlinichten Winkel in drey gleiche Theile zu theilen.

Aus der angewandten Mathematik: die Alhazenische, die Ballistische — die Aufgabe von drey Körpern, wie

man ſie kurz nennt, welche einen groſsen Theil der phyſiſchen Aſtronomie ausmacht — von der elaſtiſchen Krümmung — die Aufgabe von der Fall-Linie, auf welcher ein ſchwerer Punct am ſchnellſten fällt (brachyſtochrona) — auf welcher die Zeiten des Falles gleich groß ſind (iſochrona, tautochrona) — von der Zuſammenſetzung vollkommener Fernröhre — von der Gleichgewichtslinie oder Kettenlinie — von der Figur ſchwingender Saiten — von der Figur eines Körpers zum geringſten Widerſtande in einem flüſſigen Mittel. — Von dieſen letztern Aufgaben in der zweyten Abtheilung.

Aufheben eines Bruches (abbreviiren, verkleinern) iſt das Verfahren, wodurch der Bruch in kleinern Zahlen ausgedruckt wird, ohne ſeinen Werth zu ändern. Es geſchieht durch die Diviſion des Zählers und Nenners mit dem gemeinſchaftlichen Factor oder Theiler, wenn ein ſolcher vorhanden iſt. Wie dieſer gefunden wird, lehrt der Artikel: Theiler, gemeinſchaftlicher, der Zahlen.

Wenn Zähler und Nenner keinen gemeinſchaftlichen Theiler haben, ſo läſst ſich der Bruch in kleinern Zahlen nicht darſtellen, ohne etwas an dem Werthe zu ändern. Bey groſsen Zahlen im Zähler und im Nenner kann man oft unbedenklich etwas von der Genauigkeit der Bequemlichkeit in der Rechnung mit dem Bruche, und der faſslichern Vorſtellung aufopfern.

Wallis giebt in ſeiner Algebra, die 1685 zuerſt Engliſch herauskam, eine Methode an, Brüche in kleinern Zahlen auszudrucken, ſo daſs ſie mit einer gewiſſen Anzahl Ziffern nicht genauer gefunden werden mögen. Er zeigt ſie nur an einem Beyſpiele, weitläufig und dunkel.

Die Rechnung für dieſes einzige Beyſpiel nimmt ſechs Folioſeiten ein, um zwey Brüche, deren einer gröſser, der andere kleiner als ein vorgegebener Bruch mit 7 Ziffern im Zähler und Nenner iſt, zu finden. Allein nach dem

von ihm angewandten Verfahren lassen sich leicht allgemeine Formeln berechnen, und man findet dadurch für den abgekürzten Bruch dieselben Ausdrücke, welche die Reduction eines continuirlichen oder Kettenbruchs giebt, in der That auf demselben Wege, auf welchem man in der gemeinen Arithmetik den gemeinschaftlichen Theiler von Zähler und Nenner findet.

Der gegebene Bruch sey $\frac{a}{b}$, und a größer als b.

Es sey

$\frac{a}{b} = m + \frac{c}{b}$	also	$a = mb + c$
$\frac{b}{c} = n + \frac{d}{c}$		$b = nc + d$
$\frac{c}{d} = p + \frac{e}{d}$		$c = pd + e$
$\frac{d}{e} = q + \frac{f}{e}$		$d = qe + f$
$\frac{e}{f} = r + \frac{g}{f}$		$e = rf + g$
etc.		etc.

wo alle Buchstaben ganze Zahlen bedeuten. Es ist c kleiner als b; d kleiner als c; e kleiner als d, u. s. f.

Man multiplicire die Gleichung

I. $a = mb + c$

mit n, und substituire für nc seinen Werth, $b - d$, so ist

II. $na = (mn + 1)b - d$.

Diese werde mit p multiplicirt, und für pd der Werth, $c - e$, gesetzt, so ist

$$npa = (mnp + p)b - c + e,$$

dazu die Gleichung I. addirt, wird erhalten

III. $(np + 1)a = (mnp + m + p)b + e$.

Durch die Multiplication mit q und Substitution für qe wird diese,

$$(npq+q)a=(mnpq+mq+pq)b+d-f.$$

Die Vereinigung mit II. giebt

$$\text{IV. } (npq+n+q)a=(mnpq+mn+mq+pq+1)b-f$$

u. s. f.

Die genäherten Werthe von $\frac{a}{b}$ sind also

$$\text{I. } \frac{m}{1}; \quad \text{II. } \frac{mn+1}{n}; \quad \text{III. } \frac{mnp+m+p}{np+1};$$

$$\text{IV. } \frac{mnpq+mn+mq+pq+1}{npq+n+q}$$

$$\text{V. } \frac{mnpqr+mnp+mnr+mqr+pqr+m+p+r}{npqr+np+nr+qr+1},$$

etc.

Es erhellt, daß der Zähler jedes Bruchs das Aggregat aus dem Producte des Zählers des vorhergehenden Bruches in den gleichstelligen Quotienten m, n, p, q, r, etc. und dem Zähler des zweyten vorhergehenden Bruchs ist. Man setze nur in der Reihe noch den Bruch $\frac{1}{0}$ vor, um das Gesetz auch auf den zweyten Bruch anzuwenden. Eben so verhält es sich mit den Nennern. Die Brüche sind abwechselnd kleiner und größer als der vorgegebene Bruch $\frac{a}{b}$, weil die Vorzeichen des weggelassenen Bruches wechseln. Da die Reste c, d, e, f, g, etc. so klein sind als sie seyn können, so sind die genäherten Werthe genauer als alle, die mit kleinern Zahlen ausgedruckt werden.

Exempel. Es sey $\frac{a}{b}=\frac{8376571}{2684769}$.

Buſſe Syſtem der allgemeinen Differenzen in deſſelben Beyträgen zur Mathem. und Phyſik.

Hindenburg Überſicht der Hauptſätze der allgemeinen Differenzen und Summen, im Archiv der Mathematik. 1. Bd.

Die wichtige Lehre von den höhern arithmetiſchen Reihen wird in den Lehrbüchern nicht hinlänglich ausgeführt, oder ſie wird gar vernachläſſigt.

Arithmetiſche Scale iſt die geometriſche Reihe, nach welcher der relative Werth der Zahlziffern in ihren Stellen beſtimmt wird, indem jede Ziffer der Factor zu einem gleichſtelligen Gliede jener Reihe iſt, ſo daß die Summe aller Producte aus jeder Ziffer in das zugehörige Glied der Reihe die ganze Zahl giebt. In dem dekadiſchen Zahlenſyſtem, dem gewöhnlichen, iſt die geometriſche Reihe, $1:10:100:1000:$ etc. Die Factoren dieſer Glieder werden allein hingeſchrieben, die Glieder aber in Gedanken zugeſetzt. Allgemein kann jede ganze Zahl durch die Reihe, $a+br+cr^2+dr^3+er^4+$ etc. dargeſtellt werden, wo die Buchſtaben ganze Zahlen bedeuten, und a. b. c, d, etc. kleiner als r ſind, auch o ſeyn können. Hier iſt $1:r:r^2:r^3:$ etc. die arithmetiſche Scale.

Iſt die Zahl eine dekadiſche, und man will ſie in eine Zahl nach einer andern Scale, oder einem andern Syſtem verwandeln, ſo dividire man ſie durch r der Reſt iſt $=a$. Den Quotienten dividire man wieder durch r, ſo iſt der Reſt $=b$, den zweyten Quotienten dividire man durch r, ſo iſt der Reſt $=c$. Der dritte Quotient durch r dividirt giebt den Reſt d; der vierte den Reſt e, u. ſ. f. Wo die Diviſion aufgeht, iſt der Factor, der zu einer Potenz von r gefunden werden ſoll, Null. Beyſpiele ſ. in den Artikeln Dodekadik und Dyadik.

Eine Zahl, die nach einer andern Scale, als der dekadiſchen, ausgedruckt iſt, in eine dekadiſche zu verwandeln, dividirt man ſie fortgeſetzt durch 10, und ſondert die Reſte

Diese geben nach der Reihe die Einer a, die Zehner die Hunderte c, die Tausende d, u. s. f. Exempel a. O.

Büffon hat der geometrischen Reihe, welche einem hlensystem zum Grunde liegt, den Namen, Echelle thmétique, gegeben. Mem. de l' Ac. des Sc. 1741. ehreres in dem Artikel: Zahlensystem.

Arithmologia ist der Titel eines Buchs über die hlen und ihre geheimen Eigenschaften von dem Jesuiten cher: Arithmologia sive de abditis numerorum ysteriis. Romae 1665. 301 pag. in 4. darin gute hirische Untersuchungen über Zahlbuchstaben und Zahlrten; Beschreibung der magischen Quadrate und der anetensiegel, wozu jene angewandt wurden; viele cabistische Thorheiten, die mit Zahlen und andern Symlen ehedem getrieben sind, endlich des Verfassers phanstische Bemerkungen über gewisse Beschaffenheiten der hlen, dergleichen schon bey den jüngern Pythagoräern kommen.

Arithmomantica, dasselbe was Arithmetica vinatoria, oder errathende Rechenkunst.

Arithmonomia, dasselbe was Arithmetik, insbesondere die theoretische.

Armilla, der ringförmige Raum zwischen zwey ncentrischen Kreisen. Torricelli gebraucht diesen Ausuck, (Opera geom. P. II. p. 136). Das Wort bedeutet nen Armreif, dergleichen bey den alten Römern ein Ehnzeichen für Soldaten war.

Es sey a der Halbmesser des größern Kreises, b des einern, und $1:\pi$ das Verhältniß des Durchmessers zum mfange, so ist die Fläche des erstern $= \pi aa$, des anrn $= \pi bb$; also die Fläche des Ringes $= \pi(aa - bb)$ $= \pi(a+b)(a-b)$.

Die Ringfläche ist gleich der Fläche eines Kreises, ssen Halbmesser die mittlere geometrische Proportionale

zwiſchen der Summe und dem Unterſchiede der beiden Halbmeſſer a und b iſt.

Ars major, oder magna, italieniſch, Arte maggiore, hieß im 16ten Jahrhunderte die Algebra, im Gegenſatze gegen die gemeine Rechenkunſt, ſ. Algebra.

Articulus, eine durch 10 theilbare Zahl.

Artificialis numerus, ſinus, tangens, iſt der Logarithme einer Zahl, eines Sinus, einer Tangente u. dgl.

Aſſignabilis quantitas, eine Größe, die ſich mit jeder beſtimmten Größe vergleichen läßt, es ſey auf rationale oder irrationale Art, im Gegenſatze gegen unendlich kleine Größen, die nur in ſo fern Größen heißen können, als ſie mit andern ihrer Art vergleichbar ſind.

Aſymmetria, bey den Analyſten des 17ten Jahrhunderts daſſelbe, was man jetzt Irrationalität oder Incommenſurabilität nennt, ein Verhältniß zweyer Größen, das ſich in ganzen Zahlen nicht vollkommen genau ausdrucken läßt, wie das zwiſchen 1 und $\sqrt{2}$, der Seite eines Quadrats und der Diagonale, dem Durchmeſſer eines Kreiſes und dem Umfange.

Aſymptote iſt eine Linie, welche unbeſtimmt verlängert neben einer krummen, gleichfalls unbeſtimmt verlängerten, Linie ſich ſo erſtreckt, daß der Abſtand dieſer von jener kleiner als jede angebliche Größe wird, ohne daß ſich beide Linien ſchneiden. Das Wort iſt zuſammengeſetzt aus dem verneinenden ’α, aus συν, mit, oder zuſammen, und πιπτειν, fallen.

Eine Aſymptote kann eine gerade oder eine krumme Linie ſeyn. Doch verſteht man unter Aſymptote ſchlechthin eine gerade.

Die Hyperbel hat zwey Aſymptoten, die durch ihren Mittelpunct gehen, und mit der Axe gleich große

Winkel machen. Ihre vier Zweige nähern sich diesen beiden geraden Linien, nach beiden entgegengesetzten Richtungen derselben, ohne sie eher als in einer unendlichen Entfernung zu erreichen. In Fig. 31. Tab. II. ist ein Zweig einer Hyperbel mit seiner Asymptote CS abgebildet. Es ist C der Mittelpunct der Hyperbel, A ihr Scheitel, CX die Axe, AMS der Zweig; CP die auf der Asymptote genommene Abscisse, PM die mit der andern Asymptote parallele Ordinate, so wie AB durch den Scheitelpunct A. Die Gleichung zwischen CP und PM ist diese: $CP \times PM = CB \times AB$. Folglich wird PM immer kleiner, je größer CP genommen wird, und da für CP keine endliche Gränze des Wachsthums ist, so ist auch eine endliche Gränze des Abnehmens für PM. Daher hat auch der senkrechte Abstand eines Punctes der Hyperbel von der Abscissenlinie CS keine endliche Gränze des Abnehmens.

Die Conchoide stellt auch die Annäherung einer krummen Linie an eine gerade, ohne eine endliche Gränze derselben, sehr gut dar. In (Fig. 32. Tab. II.) ist BMN ein Zweig der Conchoide, C der Pol derselben, APS die Abscissenlinie, PM eine senkrechte Ordinate, CAB die senkrechte auf AS, AB die gegebene Linie, welcher QM gleich ist. Nun ist CQ: AC = QM: PM. Da CQ ohne Ende wachsen kann, so nimmt PM ohne Ende ab, so daß in jeder endlichen Entfernung AP die Ordinate PM noch endlich bleibt.

Die Asymptote ist als berührende Linie in einem unendlich entfernten Puncte anzusehen. Eine gerade Linie, die durch C an einen Punct des Zweiges AS der Hyperbel (Fig. 31.) gezogen wird, schneidet den entgegengesetzten Zweig an der andern Seite von CS jenseits C. Fällt sie in die Asymptote, so berührt sie die Hyperbel an zwey entgegengesetzten, aber unendlich entfernten Puncten. Da aber an der Hyperbel eine berührende Linie nur einen einzigen Punct mit der krummen Linie gemein haben kann, so müssen die beiden unendlich entfernten Puncte für einen

einzigen gehalten werden. Um sich dieses Paradoxon zu erläutern, lasse man die Hyperbel durch einen bewegten Punct beschreiben. Er fange in A seinen Weg an, setze ihn auf dem Zweige AS ins Unendliche fort, bis er in die Asymptote fällt. Diese gehört sowohl zu dem Zweige AS, als zu dem entgegengesetzten an derselben jenseits C. Den beschreibenden Punct in die Asymptote fallen lassen, heißt daher sich ihn in den beiden unendlich entfernten Puncten derselben zugleich gedenken, welches nichts widersprechendes ist, weil hier von keinem physischen Puncte oder von wirklicher Bewegung die Rede ist. Bey fortgesetzter Bewegung geht der Punct auf dem entgegengesetzten Zweige zurück, und beschreibt solchergestalt die ganze Hyperbel durch stetige Bewegung, wenn die Asymptote als berührende in einem Puncte betrachtet wird.

Eben so kann man zwey unendlich entfernte Puncte der Conchoide, wo sie die Abscissenlinie berührt, als einen einzigen ansehen. Wenn AP (Fig. 32.) unendlich groß ist, so ist CQ mit AS parallel, und schneidet, so wenig sie sich auch weiter von AS abwärts dreht, die Abscissenlinie nach der entgegengesetzten Gegend von AS auf dem Theile As, so daß der beschreibende Punct auf der Conchoide, indem er unendlich weit entfernt nach N hinaus gedacht wird, auch auf der entgegensetzten Seite Bn unendlich weit gedacht werden muß.

Die Asymptoten sind bey der Betrachtung der krummen Linien wichtig. Sie zeigen, wo sie Statt finden, die Richtung an, welcher ein Zweig einer krummen Linie zuletzt sich immer mehr nähert, wie auch sonst die Gestalt desselben beschaffen seyn mag.

Um die Beschaffenheit der Annäherung einer krummen Linie zu ihrer Asymptote zu erkennen, sucht man eine Gleichung zwischen den Abscissen auf der Asymptote genommen und den Ordinaten, mit Weglassung der Glieder, welche das Quadrat und die höhern Potenzen der Ordinate enthalten. So erhält eine solche Gleichung die Form

)ch ihre Beſchaffenheit im Unendlichen durch eine
:re Gleichung ausgedruckt werden, als die vollſtän-
leichung für die Linie iſt, und dadurch ihre Beſchaf-
auch für ſehr große Abſciſſen faßlicher zu erkennen
Eine ſolche einfachere Gleichung ſey $at = u^2$, für
dere Abſciſſenlinie als diejenige, auf welche ſich die
ng zwiſchen den Coordinaten x und y für die krum-
e bezieht. Auf der neuen Abſciſſenlinie ſey die Ab-
und die normale Ordinate $= u$. Die krumm-
Aſymptote iſt demnach eine Parabel mit dem Pa-
: a, und ihre Axe fällt in die neue Abſciſſenlinie.

e Gleichung für die krummlinichte Aſymptote mag
yn $a^2t = u^3$, oder $at^2 = u^3$, oder überhaupt
$= u^{m+n}$. Wäre der Exponens von u kleiner als
t, ſo nähme man die mit den Ordinaten parallele
den Anfangspunct der Abſciſſen zur Abſciſſenlinie,
rwechſelte die Benennungen und Bezeichnungen der
ten und Abſciſſen. Die Ordinaten u werden zwar
größer, und zuletzt unendlich groß, in Vergleich-
t jeder gegebenen Linie, bleiben aber doch in Ver-
ıa mit den Abſciſſen unendlich klein. Die Rich-

deren Richtung derjenigen einer geraden Linie immer näher kommt.

In dem Artikel, krumme Linien, werden mehrere Beyspiele von den Asymptoten beiderley Art, und ihrer Herleitung aus der Gleichung für eine krumme Linie mitgetheilt.

Von den Asymptoten der Hyperbel handelt Apollonius in dem zweyten Buche seines Werks über die Kegelschnitte, wo auch diese Benennung gebraucht wird. Sie sind aber schon vor ihm den Geometern bekannt gewesen. Archimedes nennt sie gerade Linien, welche dem Schnitte des stumpfwinklichten Kegels (der Hyperbel) am nächsten sind. (Vorrede zu der Schrift von Konoiden und Sphäroiden, vergl. 28ten Satz.). Ein Italiener, Franciscus Barocius, hat in einem weitschweifigen Werke (Venedig 1586, auf 269 Quartf.) dreyzehn Arten angegeben, wie zwey Linien gezogen werden können, die sich immer näher kommen, ohne sich zu schneiden, so weit sie auch verlängert werden. Es ist immer die Hyperbel, ausser nach der zehnten und eilften Art. Nach der letztern dieser ist es die Konchoide, nach der zehnten eine krumme Linie, die er selbst nicht näher zu bestimmen vermag. Sie enthält die Durchschnitte einer Folge von Kreisen, die eine gemeinschaftliche berührende haben, und einer zugeordneten Folge von Parallelen mit jener, die sich derselben, aber mit abnehmenden Abständen von einander, nähern. Ein Theil dieses Werkes ist polemisch. Der Verfasser will die Fehler verschiedener Geometer, die sie in ihren Beweisen von den Asymptoten begangen haben, berichtigen, und findet selbst den Apollonius nicht tadelfrey.

Newton hat zuerst die krummlinichten Asymptoten bey den Linien vom dritten Grade (oder krummen der zweyten Ordnung) angegeben.

Ausführlichern Unterricht über die Asymptoten jeder Art findet man in

Euleri Introd. in Analysin Infin. T. II. Cap. 7. 8
Cramer Analyse des lignes courbes. Ch. 8.

Aufgabe (Problema) iſt eine Frage, wie etwas
nntes aus gegebenen Größen unter gewiſſen Be-
zen gefunden werden möge, in der Geometrie ins-
re, eine Conſtruction zu erfinden, die das verlangte
z. B. ein Rechteck in ein Quadrat oder in ein an-
it einer gegebenen Seite zu verwandeln; durch drey
einen Kreis zu beſchreiben; in einem Kreiſe ein
k zu zeichnen, deſſen Seiten, wann nöthig, verlän-
jede durch einen gegebenen Punct gehen. Eine
e kann auch zum Gegenſtande den Beweis eines
haben, der aus Induction wahr gefunden iſt,
s wahr behauptet wird. Die Frage ſelbſt, ihre
ng, und der Beweis der Richtigkeit des Verfah-
liſſen in dem Vortrage deutlich unterſchieden werden.
n Anwendungen iſt es ſehr bequem, die Vorſchrif-
Verfahrens kurz vorzufinden, ohne daß man nö-
be, die Vorbereitungen zu der Auflöſung und die
ſe wieder durchzugehen, nachdem man ſie einmahl
gefaßt und geprüft hat.

ine beſtimmte Aufgabe (Problema deter-
am, limitatum) iſt eine ſolche, die nur auf eine
er nur auf einige, der Anzahl nach beſtimmte, Ar-
fgelöſet werden kann. Eine unbeſtimmte Auf-
(Problema indeterminatum, illimitatum) iſt
lche, die unzählich viele Auflöſungen zuläßt. Z. B.
ichſchenklichtes Dreyeck, deſſen Winkel an der Grund-
ppelt ſo groß ſind als der Winkel am Scheitel, iſt
uf eine Art möglich (Euklides IV. 10.); ein gleich-
ichtes Dreyeck, deſſen Umfang und Inhalt gegeben
iſt auf zweyerley Art möglich, wofern der Inhalt
cht größer iſt als der Inhalt eines gleichſeitigen von
ben Umfange. Es iſt eine Aufgabe mit zwey Auf-
en, aus zwey gegebenen Puncten an einen Punct
gegebenen Kreiſes Linien ſo zu ziehen, daß die Linie,
die beiden andern Durchſchnittspuncte jener Linie
s Kreiſes verbindet, der Linie durch die beiden ge-
n Puncte parallel ſey. (S. Analyſis als Methode,

5te Aufgabe, und mehrere daselbst, wie auch in dem Artikel, Anwendung der Analysis auf die Geometrie.). Eine unbestimmte Aufgabe ist, über einer gegebenen Linie ein Dreyeck zu zeichnen, worin der Winkel, welcher jener Linie gegen über steht, eine gegebene Größe habe; oder ein Dreyeck, worin die beiden andern Seiten ein gegebenes Verhältniß haben. Für beide ist der Kreis der Ort der Auflösung.

In der Analysis ist eine Aufgabe bestimmt, wenn so viele unabhängige Gleichungen als unbekannte Größen vorhanden sind. Sind weniger Gleichungen da als unbekannte Größen, so ist die Aufgabe unbestimmt. Z. B. Zwey Quadrate von rationalen Wurzeln zu finden, deren Summe das Quadrat einer rationalen Wurzel ist. Oder: eine Zahl zu finden, die durch m dividirt den Rest p, durch n dividirt den Rest q lasse.

Bey der Auflösung bestimmter Aufgaben muß immer gezeigt werden, wenn, wie, und auf wie vielerley Arten die Aufgabe möglich ist. Die Alten nannten dieses διορισμος. determinatio. Pappus in coll. mathem. L. VII. praef.

Diophanteische Aufgaben sind solche algebraische, deren Auflösungen in ganzen oder in rationalen gebrochnen Zahlen verlangt werden, dergleichen die eben angeführten sind. S. unbestimmte Analytik.

Lineariſche Aufgabe ist eine geometrische, die mittelst des Durchschnitts zweyer geraden Linien aufgelöset werden kann. Damit stimmen in der Algebra die Aufgaben, welche auf eine Gleichung vom ersten Grade führen, worin die unbekannte Größe nur auf eine Dimension steigt.

Ebene Aufgabe (Problema planum) ist eine solche, die mittelst der Durchschnitte einer geraden Linie und eines Kreises, oder eines Kreises mit einem andern Kreise aufgelöset wird. Damit stimmen in der Algebra die Aufgaben, welche auf eine Gleichung vom zweyten

grade führen, da hierin die unbekannte Größe zwey Dimensionen erhält.

Körperliche Aufgabe (Problema solidum) ist in der Geometrie eine solche, die nur mittelst der Durchschnitte eines Kreises und eines Kegelschnittes aufgelöset werden kann, z. B. die Aufgabe zwischen zwey gegebenen Linien zwey mittlere in geometrischer Progression zu finden. Eine solche ist, ein gleichschenklichtes Dreyeck zu zeichnen, in welchem die Winkel an der Grundlinie jedermahl so groß sind als der gegen über stehende Winkel, wodurch sich das ordentliche Siebeneck in einen Kreis einschreiben läßt. Sie führt auf eine Gleichung vom sechsten Grade, die aber einer vom dritten Grade gleich zu halten ist. (Goniometrie, VI.) Sie wird durch eine Parabel und den Kreis construirt. So ist es auch eine körperliche Aufgabe, ein Dreyeck zu zeichnen, in welchem die Winkel an der Grundlinie jeder viermahl so groß sind, als der gegen über liegende Winkel, wodurch ein ordentliches Neuneck in einen Kreis eingeschrieben wird. Die Aufgabe führt auf eine Gleichung vom achten Grade, die einer vom vierten Grade gleich zu halten ist. Sie wird also durch den Kreis oder auch eine Hyperbel und die Parabel construirt.

Die Benennungen, ebene und körperliche, für Aufgaben rühren daher, daß der Kreis eine Figur ist, deren Zeichnung in einer Ebene unmittelbar ausgeführt werden kann, dagegen die Kegelschnitte durch den Schnitt eines Kegels mit einer Ebene gebildet werden. Man muß eine gewisse Zusammensetzung von Linien machen, um sie mit stetiger Bewegung in einer Ebene zu beschreiben.

Überkörperliche Aufgabe (problema supersolidum) ist eine solche in der Geometrie, die nicht anders als durch krumme Linien von einer höhern Gattung als die Kegelschnitte sind, aufgelöset werden kann.

Örtliche Aufgabe (Problema locale) ist eine unbestimmte Aufgabe, zu deren Auflösung jeder Punct

einer gehörig zu bestimmenden Linie dient. Sie ist eine einfache, wenn dieser Ort eine gerade Linie ist, eine ebene, wenn es eine Kreislinie, eine körperliche, wenn es der Umfang eines Kegelschnittes, eine überkörperliche (problema fursolidum), wenn es eine Linie von einer höhern Ordnung ist.

Ein Lehrsatz wird in eine Aufgabe verwandelt, wenn die Relation der Größen, welche in dem Lehrsatze ausgesagt ist, zur Bedingung gemacht wird. Z. B. die Aufgabe, zwischen zwey Linien eine mittlere geometrische Proportionale zu finden, enthält als Bedingung, was in dem Satze von der auf einen Durchmesser eines Kreises senkrechten Ordinate ausgesagt wird. Diese Art Aufgaben sind die einfachsten. Sie enthalten eine einfache Bedingung. Eine andere Art Aufgaben ist die, wo mehrere Bedingungen zugleich zu erfüllen sind, z. B. einen Kreis zu ziehen, der zwey gegebene gerade Linien berührt, und durch einem gegebenen Punct geht. Die Form, welche man einen Satze geben mag, ob die eines Lehrsatzes, oder die einer Aufgabe, ist zwar nicht etwas sehr wesentliches, allein es scheint doch, daß man Relationen der Größen in Satzen, Bedingungen in Aufgaben aufstellen müsse. Z. E. die Relation zwischen dem Sonnenjahre, dem periodischen Monathe, und dem synodischen Monathe sollte durch einen Lehrsatz dargestellt werden. Daraus erhalten dann die Aufgaben, den einen oder den andern Monath zu finden, ihre Auflösung, gleichsam als Folgerungen.

Merkwürdige Aufgaben aus der reinen Mathematik, welche zu ihrer Zeit die Mathematiker beschäftigt haben, sind, die Beaunische — die Delische — die Florentinische — die Isoperimetrische — die allgemeine der alten Geometer für Kegelschnitte — die Keplerische — die Aufgabe von der Quadratur des Kreises — die Aufgaben von den Trajectorien, den rechtwinklichten und den reciproken — die Aufgabe, einen geradlinichten Winkel in drey gleiche Theile zu theilen.

Aus der angewandten Mathematik: die Alhazenische, die Ballistische — die Aufgabe von drey Körpern, wie

man sie kurz nennt, welche einen großen Theil der physischen Astronomie ausmacht — von der elastischen Krümmung — die Aufgabe von der Fall-Linie, auf welcher ein schwerer Punct am schnellsten fällt (brachystochrona) — auf welcher die Zeiten des Falles gleich groß sind (isochrona, tautochrona) — von der Zusammensetzung vollkommener Fernröhre — von der Gleichgewichtslinie oder Kettenlinie — von der Figur schwingender Saiten — von der Figur eines Körpers zum geringsten Widerstande in einem flüssigen Mittel. — Von diesen letztern Aufgaben in der zweyten Abtheilung.

Aufheben eines Bruches (abbreviiren, verkleinern) ist das Verfahren, wodurch der Bruch in kleinern Zahlen ausgedruckt wird, ohne seinen Werth zu ändern. Es geschieht durch die Division des Zählers und Nenners mit dem gemeinschaftlichen Factor oder Theiler, wenn ein solcher vorhanden ist. Wie dieser gefunden wird, lehrt der Artikel: Theiler, gemeinschaftlicher, der Zahlen.

Wenn Zähler und Nenner keinen gemeinschaftlichen Theiler haben, so läßt sich der Bruch in kleinern Zahlen nicht darstellen, ohne etwas an dem Werthe zu ändern. Bey großen Zahlen im Zähler und im Nenner kann man oft unbedenklich etwas von der Genauigkeit der Bequemlichkeit in der Rechnung mit dem Bruche, und der faßlichern Vorstellung aufopfern.

Wallis giebt in seiner Algebra, die 1685 zuerst Englisch herauskam, eine Methode an, Brüche in kleinern Zahlen auszudrucken, so daß sie mit einer gewissen Anzahl Ziffern nicht genauer gefunden werden mögen. Er zeigt sie nur an einem Beyspiele, weitläufig und dunkel.

Die Rechnung für dieses einzige Beyspiel nimmt sechs Folioseiten ein, um zwey Brüche, deren einer größer, der andere kleiner als ein vorgegebener Bruch mit 7 Ziffern im Zähler und Nenner ist, zu finden. Allein nach dem

von ihm angewandten Verfahren lassen sich leicht allgemeine Formeln berechnen, und man findet dadurch für den abgekürzten Bruch dieselben Ausdrücke, welche die Reduction eines continuirlichen oder Kettenbruchs giebt, in der That auf demselben Wege, auf welchem man in der gemeinen Arithmetik den gemeinschaftlichen Theiler von Zähler und Nenner findet.

Der gegebene Bruch sey $\frac{a}{b}$, und a größer als b. Es sey

$\frac{a}{b} = m + \frac{c}{b}$	also	$a = mb + c$
$\frac{b}{c} = n + \frac{d}{c}$	"	$b = nc + d$
$\frac{c}{d} = p + \frac{e}{d}$	"	$c = pd + e$
$\frac{d}{e} = q + \frac{f}{e}$	"	$d = qe + f$
$\frac{e}{f} = r + \frac{g}{f}$	"	$e = rf + g$
etc.		etc.

wo alle Buchstaben ganze Zahlen bedeuten. Es ist c kleiner als b; d kleiner als c; e kleiner als d, u. s. f.

Man multiplicire die Gleichung

I. $a = mb + c$

mit n, und substituire für nc seinen Werth, $b - d$, so ist

II. $na = (mn + 1)b - d$.

Diese werde mit p multiplicirt, und für pd der Werth, $c - e$, gesetzt, so ist

$$npa = (mnp + p)b - c + e,$$

dazu die Gleichung I. addirt, wird erhalten

III. $(np + 1)a = (mnp + m + p)b + e$.

Durch die Multiplication mit q und Substitution für qa wird diese,

$$(npq+q)a=(mnpq+mq+pq)b+d-f.$$

Die Vereinigung mit II. giebt

$$\text{IV. } (npq+n+q)a=(mnpq+mn+mq+pq+1)b-f$$

u. s. f.

Die genäherten Werthe von $\frac{a}{b}$ sind also

$$\text{I. } \frac{m}{1}; \quad \text{II. } \frac{mn+1}{n}; \quad \text{III. } \frac{mnp+m+p}{np+1};$$

$$\text{IV. } \frac{mnpq+mn+mq+pq+1}{npq+n+q}$$

$$\text{V. } \frac{mnpqr+mnp+mnr+mqr+pqr+m+p+r}{npqr+np+nr+qr+1},$$

etc.

Es erhellt, daß der Zähler jedes Bruchs das Aggregat von dem Producte des Zählers des vorhergehenden Bruches in den gleichstelligen Quotienten m, n, p, q, r, etc. und dem Zähler des zweyten vorhergehenden Bruchs ist. Man setze nur in der Reihe noch den Bruch $\frac{1}{0}$ vor, um das Gesetz auch auf den zweyten Bruch anzuwenden. Eben so verhält es sich mit den Nennern. Die Brüche sind abwechselnd kleiner und größer als der vorgegebene Bruch $\frac{a}{b}$, weil die Vorzeichen des weggelassenen Bruches wechseln. Da die Reste c, d, e, f, g, etc. so klein sind als sie seyn können, so sind die genäherten Werthe genauer als alle, die mit kleinern Zahlen ausgedruckt werden.

Exempel. Es sey $\frac{a}{b}=\frac{8376571}{2684769}$.

Hier ist $m = 3$; $n = 8$; $p = 3$; $q = 46$; $r = 1$; $s = 1$, etc. also die genäherten Werthe des Bruches

I. $\frac{3}{1}$; II. $\frac{25}{8}$; III. $\frac{78}{25}$; IV. $\frac{3613}{1158}$; V. $\frac{3691}{1183}$; etc.

Dieses ist der Bruch, auf dessen Reduction Wallis sechs Folioseiten verwendet.

Durch dieses Verfahren lassen sich Irrationalzahlen durch eine Reihe rationaler Brüche darstellen, die sich dem völligen Werthe mehr nähern als alle, die mit kleinern Zahlen ausgedruckt werden. Z. B. man habe gefunden, daß $\sqrt{3} = 1{,}7320508075 \ldots$ ist. Hier ist $a = 17320508075 \ldots$; $b = 10000000000 \ldots$ ferner $m = 1$; $n = 1$; $p = 2$; $q = 1$; $r = 2$; $s = 1$; $t = 2$; etc. Also ist die Reihe der convergirenden Brüche für die Quadratwurzel aus 3 diese:

$\frac{1}{1}$; $\frac{2}{1}$; $\frac{5}{3}$; $\frac{7}{4}$; $\frac{19}{11}$; $\frac{26}{15}$; $\frac{71}{41}$;
$\frac{97}{56}$; $\frac{265}{153}$; $\frac{362}{209}$; $\frac{989}{571}$; $\frac{1351}{780}$;
$\frac{3691}{2131}$; etc.

Mittelst der Werthe der Brüche $\frac{a}{b}, \frac{b}{c}, \frac{c}{d}, \frac{d}{e}$, etc. werden die Brüche, woraus die Kettenbrüche bestehen, gefunden.

Auflösung ist die wohl geordnete Darlegung des Verfahrens, wodurch das zufolge einer Aufgabe gesuchte erhalten wird. Es ist mehr als eine Antwort, die auf bestimmte Rechnungsfragen gegeben wird.

Die reinen geometrischen Auflösungen werden allein durch Zeichnung schicklicher Linien für den Verstand bewerkstelligt, so daß sie durch ihre Durchschnitte die gesuchten Grössen darstellen, wenn die Aufgabe eine bestimmte ist, oder daß jeder Punct derselben der Aufgabe

ein Genüge thut, wenn die Aufgabe eine unbestimmte ist. Wie man hiebey verfährt, ist in dem Artikel, Analysis als Methode, theils im Allgemeinen, so weit sich darüber Vorschriften geben lassen, theils in Beyspielen gewiesen. Man sehe auch den Artikel, Ort, geometrischer. Wird eine geometrische Aufgabe durch Hülfe allgemeiner Rechnung aufgelöset, so ist die Auflösung eine gemischte, insbesondere eine trigonometrische, wenn die trigonometrischen (goniometrischen) Formeln dabey angewandt werden, (s. Anwendung der Analysis auf die Geometrie). Eine mechanische Auflösung einer geometrischen Aufgabe ist eine solche, bey welcher man sich einer krummen Linie bedient, zwischen deren Coordinaten keine algebraische endliche Gleichung Statt findet. Weil einige dieser Linien, als die Spiralen, die Cykloide, die Epicykloiden, die Quadratrix, durch gewisse Bewegungen beschrieben werden, und daher mechanische heißen, so ist eine Auflösung (oder Construction) vermittelst derselben eine mechanische, die aber doch bloß im Verstande geschieht. Man nennt auch die Auflösung einer geometrischen Aufgabe eine mechanische; wenn sie an einer wirklichen Zeichnung durch sinnliche Werkzeuge ausgeführt wird, z. B. wenn eine senkrechte Linie mittelst eines rechtwinklichten Dreyecks oder Winkelhakens gezogen, ein Winkel durch den Transporteur gezeichnet, eine Ellipse, mittelst eines dazu dienlichen Werkzeuges mit stetiger Bewegung eines Stiftes beschrieben wird. Die praktische Richtigkeit einer solchen Auflösung beruht auf der Genauigkeit des Werkzeuges und der Aufmerksamkeit bey ihrem Gebrauche. Es giebt auch eine empirische Auflösung in der Geometrie, bey der man sich einer positio falsi bedient, z. B. wenn eine gerade Linie in eine gleiche Anzahl Theile durch Versuche unmittelbar getheilt wird; wenn ein ordentliches Vieleck in einem Kreise durch Eintragung einer, zum Versuche angenommenen, nöthigen Falls nach und nach veränderten Chorde eingeschrieben wird.

Eine arithmetische Auflösung ist die Beantwortung einer Rechnungsfrage durch Zahlenrechnung, den Regeln

für den Fall der Frage gemäß. Eine algebraische Auflösung ist die Erfindung der Gleichung, welche die Verbindung zwischen den gegebenen und gesuchten Größen allgemein darstellt, ohne auf eine bestimmte Quantität zu sehen. Wenn in den Bedingungen der Aufgabe schon so viele Gleichungen gegeben werden, als unbekannte Grössen zu bestimmen sind, so hat die Auflösung wenig Schwierigkeit. Es kommt dabey nur auf eine geschickte Auswahl der Größen an, die gesucht werden sollen, da es oft dienlich ist, nicht diejenigen unmittelbar zu suchen, nach welchen gefragt wird, sondern andere, aus welchen sie bequem gefunden werden können, wenn für diese die Gleichungen eine einfachere Form erhalten als für jene. Wenn aber in der Aufgabe nicht alle Data zu den nöthigen Gleichungen liegen, so müssen diese aus den Lehrsätzen über die Formen der Größen, welche in der Aufgabe vorkommen, geholt werden. Die Aufgabe kann auch unbestimmt seyn, in welchem Falle man sie als eine solche behandelt, oder eine Bedingung hinzufügt, wodurch sie eine bestimmte wird.

Die Auflösungen in der eigentlichen Analysis, der endlichen sowohl als der unendlichen Größen, sind so mannichfaltig als die Gegenstände dieser weitläufigen Wissenschaft (s. Analysis, Differential-Rechnung, Integral-Rechnung). Man muß bey dem Studium dieser hohen Rechenkunst die Wege, wodurch die Analysten zu ihren Auflösungen, so wie auch zu den Aufgaben selbst gelangt seyn mögen, aufzuspüren, und dadurch sich selbst Fertigkeit in der Auflösung und auch der Aufsuchung von Aufgaben zu verschaffen suchen. Es ist vielleicht oft schwerer, Aufgaben zu machen, als vorgelegte Aufgaben aufzulösen. Beydes gehört zur Analytik oder der mathematischen Auflösungskunst, die ein Werk des Erfindungsgeistes ist, und nur da auf bestimmten Regeln beruht, wo man die Untersuchung auf solche Fälle von Verbindungen der Größen bringen kann, die vollständig entwickelt sind.

Augenpunct oder **Hauptpunct**, (Punctum oculi ſ. viſus principale) iſt in der Perſpectiv der Punct auf der Tafel, wo die ſenkrechte von dem Auge auf ſie gezogene Linie ſie trifft, ſ. Perſpectiv.

Ausdehnung oder **ausgedehnte Größe** (Extenſio, extenſum) iſt zuſammenhangende, gleichartige Vielheit

Die körperliche Ausdehnung iſt die allgemeine Form der Vorſtellung eines Körpers, nach Abſonderung jeder beſondern Beſchaffenheit und Wirkſamkeit deſſelben. Wir können den Körpern alles nehmen, ſelbſt die Wirklichkeit, nur nicht die Ausdehnung. Dadurch ſind ſie einer Geſtalt und Größe fähig, und ſind allein dadurch Gegenſtände der Geometrie. Die Ausdehnung, von allen ſinnlichen Beſchaffenheiten befreyt, iſt eine urſprüngliche, in unſerm Geiſte ſelbſt gegründete, Form der Vorſtellung, die allen Vorſtellungen von wirklichen Körpern zum Grunde liegt. Man kommt nicht ſowohl durch Abſonderung der ſinnlichen Eigenſchaften auf die Vorſtellung der Ausdehnung, ſondern ſetzt dieſe voraus, um jene an dieſe zu knüpfen. Betaſtung und Geſicht geben uns, jedes nach ſeiner Art, ein ſinnliches Bild der Ausdehnung. Die erſtere läßt uns aber unmittelbar nur etwas Widerſtehendes, verbunden mit andern Gefühlen erkennen; das Geſicht nur Licht und Farben. Unſer Geiſt iſt es, der ſich vermittelſt dieſer ſinnlichen vereinten Empfindungen Bilder eines zuſammenhangenden, ohne Ende theilbaren Ganzen ſchafft. Aber eben dieſe Vereinigung ganz ungleichartiger ſinnlicher Empfindungen zeigt, daß das Subſtrat, woran wir ſie knüpfen, ein Product unſers Verſtandes iſt.

Dieſe metaphyſiſchen Betrachtungen über den Gegenſtand der Geometrie ſollen dem Verſtande nur das völlige Eigenthumsrecht daran zuſichern. Wenn man aber auch die Ausdehnung als eine durch die Abſtraction aller ſinnlichen Eigenſchaften erworbene Vorſtellung betrachten, und in ſofern als etwas empiriſches anſehen wollte, ſo bleibt

doch die Form der Ausdehnung ganz das Product des Verstandes. In der That aber ist es einerley zu behaupten, daß wir an die schon in dem Geiste vorhandene allgemeine Form der Körper ihre sinnlichen Beschaffenheiten knüpfen, oder zu sagen, daß wir durch die Absonderung derselben bloß die Form ohne etwas wirkliches behalten. Nach beiden Vorstellungsarten gehört die allgemeine Form dem Geiste. Die Sinne geben nur Sinnliches zu erkennen.

Die formlose Ausdehnung, was man in der Physik und Metaphysik den Raum, den Inbegriff aller möglichen Stellen der wirklichen Körper, nennt, bietet dem Geometer nichts dar, was ihn beschäftigen könnte. Die Formen der Ausdehnung sind der Gegenstand seiner Untersuchungen. Diese geben wir ihr eigenmächtig, ohne sie von der Erfahrung zu entlehnen, ob gleich die sinnliche Betrachtung uns zur Erfindung derselben Veranlassung geben kann. Die gerade Linie lernen wir nicht an einem straff ausgedehnten Faden kennen, sondern nennen diese gerade, weil wir unsern ursprünglichen Begriff von einer geraden Linie daran versinnlicht antreffen. Läge der Begriff von einer geraden Linie nicht schon in unserm Vorstellungs-Vermögen, so würden wir an dem Faden nichts als eine körperliche Länge erblicken. Bey den weniger gemeinen Formen erhellt es gleich, daß der Begriff davon früher da ist als die sinnliche Darstellung. Man zeichnet eine Ellipse oder Parabel nach der angenommenen Regel ihrer Form, um sich diese zu versinnlichen; man giebt einem Körper die Form eines Sphäroids, eines Konoids, die man selbst geschaffen hat. Kepler sagt sehr richtig von dem Kreise: Specierum mathematicarum, quae Circulus dicitur, ineſt animae non tantum ut idea rerum externarum, ſed etiam ut forma quaedam ipſius animae. Harmon. L. IV. cap. 7. p. 168. Unter den Alten behaupteten besonders die Platoniker, daß unser Geist selbst die mathematischen Formen und Verhältnisse erzeuge. Umständlich handelt hievon Proklus in seinem Commentar über das erste Buch der Euklideischen

Elemente, im 1ten und 2ten Buche. Aristoteles war der gegenseitigen Meynung.

Die alten Geometer ließen sich auf diese metaphysischen Betrachtungen über den Ursprung der geometrischen Begriffe nicht ein, vielleicht um auf keine Weise den Philosophen Gelegenheit zur Einmischung in ihre Wissenschaft zu geben. Euklides sagt kurz, ein Körper ist, was Länge, Breite und Tiefe hat; eines Körpers Gränze ist Fläche; eine Fläche ist was nur Länge und Breite hat; das Äusserste einer Fläche sind Linien; eine Linie ist eine Länge ohne Breite; das Äusserste einer Linie sind Puncte.

Die auf irgend eine Art begränzte Ausdehnung ist der geometrische Körper. Seine Gränze, die an ihm, nicht als Theil von ihm, vorhanden ist, heißt seine Oberfläche. Diese von dem Körper abgesondert ist die Fläche, die zweyte Gattung der Ausdehnung. Ihre Gränzen sind die Umfangslinien, welche abgesondert Linien sind, die dritte Gattung der Ausdehnung. Zu diesen kommt noch eine besondere Gattung der Ausdehnung, die Winkel, so fern wir sie uns als etwas Zusammenhangendes, Gleichartiges, Theilbares bey der Vorstellung der Lage der Linien gedenken.

Die geometrische Ausdehnung ist durchaus etwas Stetiges, allenthalben Zusammenhangendes. Zwischenräume finden in ihr nicht Statt, da diese wo nichts wirkliches und von einander verschiedenes gedacht wird, zu dem Ausgedehnten selbst als Theile gehören müßten. Der geometrische Körper ist daher ins Unendliche theilbar. Allein man darf darum nicht die Theilbarkeit ohne Ende der physischen Ausdehnung beylegen, weil sie der geometrischen zukommt. S. Kästners Geometrie §. 3.

Introduction à la Géométrie, ou développement de l' idée de l'étendue. Par l'Auteur du livre des Verités. à Brunswick. 1795. Der Verfasser sucht den Begriff der Ausdehnung aus der Erfahrung herzuleiten und zu erklären. Die Absonderung der

Gränzen, es sey zwischen den Theilen eines einzelnen Gegenstandes oder zwischen mehrern Dingen, ist nach ihm der wahre Sinn, den man mit dem Worte, Ausdehnung, zu verknüpfen hat. Gränzen sind aber selbst eine Ausdehnung, und beziehen sich auf etwas ausgedehntes.

Ausdruck (Expressio) ist die symbolische Darstellung der Zusammensetzung einer Größe aus andern Größen, bekannten oder zum Theil unbekannten, unveränderlichen oder zum Theil veränderlichen. Z. B. der Ausdruck für die Wurzel der Gleichung $x^2 - 2ax + b = o$ ist dieser, $a \pm \sqrt{(a^2 - b)}$; für das Quadrat der Ordinate einer Ellipse auf der großen Axe, wenn die Abscissen vom Scheitel an genommen werden, ist der Werth $=$

$$\frac{2bbx}{a} - \frac{bbxx}{aa}.$$

Auseinander fahrende (laufende) **Linien** (lineae divergentes) sind erstlich gerade, sich schneidende, Linien nach derjenigen Gegend hin, wo ihr Abstand immer mehr wächst, je länger man sie nimmt. In der Optik kommen divergirende Linien oder Strahlen, und ihr Gegentheil, die convergirenden, häufig vor. Zweytens heißen Parabeln von einer höhern Ordnung divergirend, wenn ihre Richtungen einen immer größern Winkel mit einander machen, je weiter die Schenkel verlängert werden, da bey der gemeinen Parabel ihre Richtungen sich immer mehr dem Parallelismus nähern. Auch giebt es divergirende Hyperbeln, deren Schenkel ihre erhabene Seiten gegen einander kehren, und nach entgegengesetzten Richtungen laufen. Newtoni enumeratio linearum tertii Ordinis. XII.

Ausmessen, s. Messen.

Ausschnitt (Sector) einer Figur ist ein Theil, der zwischen zwey geraden Linien, die aus einem Puncte innerhalb derselben an den Umfang gezogen sind, und dem von ihnen abgeschnittenen Bogen des Umfangs enthalten

ist. In dem Kreise insbesondre ist ein Ausschnitt zwischen zwey Halbmessern und dem Bogen des Umfanges enthalten.

Ausschnitt eines Körpers ist ein Theil desselben der von einem Theile der Oberfläche als Grundfläche, und dem von jedem Puncte des Umfanges dieses Theils nach einem Puncte innerhalb des Körpers gezogenen Linien begränzt wird. In der Kugel insbesondere ist ein Ausschnitt ein kegelförmiger Theil, dessen Spitze in dem Mittelpuncte der Kugel liegt.

Aussonderung (exclusio) ist eine Methode, arithmetische Aufgaben aufzulösen, dadurch, daß man diejenigen Zahlen aussondert, welche der Aufgabe kein Genüge thun. Frenicle, ein geschickter französischer Mathematiker, der zu den Zeiten des Descartes lebte, besaß eine besondre Geschicklichkeit in der Anwendung dieser Methode. Es war zu seiner Zeit sehr üblich, daß die Mathematiker sich Aufgaben vorlegten; Frenicle zeigte sich bey diesen gelehrten Turnieren immer auf dem Platze, und machte seiner Nation Ehre. Sogar Fermat und Descartes bewunderten die Gewandtheit, wodurch er ohne Algebra, durch die bloße Kraft seines Genie, mit Aufgaben fertig ward, welche die größten Mathematiker mit aller ihrer Algebra aufzulösen Mühe hatten. Wenn er eine Aufgabe, die Zahlen betraf, vornahm, so suchte er nicht die Zahlen, welche die Bedingungen der Aufgabe erfüllten, sondern diejenigen, welche sich nicht dazu schickten. So sehr man ihn bat, sein Verfahren bekannt zu machen, wollte er sich doch nicht dazu bequemen, aber nach seinem Tode fand es sich unter seinen Papieren. Der Aufsatz ist in der Sammlung abgedruckt, welche den Titel hat: Divers ouvrages de Mathématiques et de Physique par MM. de l'Acad. roy. des Sciences, à Paris 1693. Er enthält nur wenige allgemeine kurze Regeln, an der Zahl zehn, aber die Anwendungen auf zehn ausgesuchte und ziemlich weitläufige Beyspiele. Die Methode läßt sich nicht in der Kürze beschreiben: man muß sie in dem Aufsatze selbst studieren. Doch ist zu bemerken, daß sie

ihrer Brauchbarkeit verloren hat, seitdem die algebraischen Methoden vollkommener und anwendbarer geworden sind.

Dictionn. encyclop. art. Exclusion.

Ausziehung einer Wurzel, s. Wurzel.

Axe ist eine gerade Linie in der Ebene einer krummen Linie, welche diese in zwey gleiche, ähnliche und auf beiden Seiten ähnlich liegende Theile zerschneidet, z. B. in einer Parabel, in einer Ellipse und Hyperbel. Die beiden letztern Linien haben zwey Axen, die auf einander senkrecht sind. Der Kreis hat unendlich viele Axen, alle durch den Mittelpunct. Viele krumme Linien haben keine Axen.

Man nennt aber auch diejenige gerade Linie in der Ebene einer krummen Linie, worauf die Abscissen genommen werden, die Axe der Abscissen, oder schlechtweg die Axe, und die durch den Anfangspunct der Abscissen mit den Ordinaten parallele die Axe der Ordinaten, der Ordinatenwinkel mag ein rechter oder schiefer seyn. Wenn bey einem schiefen Ordinatenwinkel die Ordinaten in demselben Puncte auf beiden Seiten der Abscissenlinie sich durchgehends gleich sind, so heißt die Axe ein Durchmesser.

Axe eines geometrischen Körpers ist die gerade Linie, welche durch die Mittelpuncte aller ähnlichen parallelen Durchschnitte des Körpers geht, vorausgesetzt, daß die parallelen Durchschnitte ähnliche Figuren mit einem Mittelpuncte sind, und daß ihre Mittelpuncte in einer geraden Linie liegen. Wenn die parallelen Durchschnitte Kreise sind, und die Axe auf sie senkrecht steht, so ist die Axe zugleich die Axe der Umdrehung (Circumvolution, Rotation), z. B. in der Kugel, dem senkrechten Kegel, senkrechten Cylinder und Konoid. Ein schief stehender Kegel und Cylinder haben eine Axe im Allgemeinen, aber keine Drehungs-Axe. Wenn die Grundfläche eines Kegels oder Cylinders, anstatt ein Kreis zu seyn, in eine Ellipse verwandelt wird,

und alle mit ihr parallelen Durchschnitte in jener ähnliche Ellipsen, die Mittelpuncte unverändert gelassen, so bleibt die gerade Linie durch diese Mittelpuncte eine Axe.

Die Axe eines Sphäroids, das durch die Umdrehung einer Ellipse um eine ihrer Axen entstanden ist, ist diese Axe.

Axioma, s. Grundsatz.

B.

Bacilli decimales, sexagenales, s. Instrumentale Arithmetik.

Bakers Centralregel, s. Anwendung der Geometrie auf die Algebra.

Barlong, im Französischen, ein rechtwinklichtes, ungleichseitiges Parallelogramm. Barlongische Zahl ist das Product zweyer um die Einheit verschiedenen ganzen Zahlen. Die Summe der Reihe der geraden Zahlen, $2+4+6\ldots+(2+2r)$ ist eine solche. Denn sie ist $=\frac{1}{2}(1+r)(4+2r)=(r+1)(r+2)$. (s. arithm. Reihe, 6.). Die Triangularzahlen sind die Hälften einer barlongischen Zahl. Die Benennung von dem gleich vorher angeführten Worte rührt von der ehemals gewöhnlichen Vergleichung der Producte zweyer Zahlen mit Rechtecken her. Theon (s. Arithmetik, ihre Geschichte) handelt in dem 13ten Kap. von dieser Form der Zahlen. Er nennt sie ἑτερομήκεις, altera parte longiores. Die Auszeichnung dieser Form der Zahlen mag wohl etwas bildliches zum Grunde haben.

Basedowische Regel, s. Regel der Zusammensetzung der Verhältnisse.

Basis, s. Grundfläche und Grundlinie.

Bastardbruch (fractio spuria), besser ein uneigentlicher Bruch, d. i. dessen Zähler so groß oder größer als der Nenner ist.

Man nehme auf der Abscissenlinie $AC = a$, ziehe CV unter dem Winkel von 45° oder parallel mit AB, verlängere PM bis an CV, in S, so ist $MS = a + x - y$. Es sey MT parallel mit CP, so ist auch $MT = a + x - y$, und $CT = y\sqrt{2}$. Man setze $TM = u$; $CT = z$, so ist

$$\log \text{nat.} \frac{a}{u} = \frac{z}{a\sqrt{2}}.$$

Es ist also die krumme Linie eine logarithmische, deren Asymptote CV ist. Daß die Coordinaten CT, TM einen Winkel von 45 Grad machen, ist kein wesentlicher Unterschied von derjenigen, wo der Coordinatenwinkel ein Rechter ist.

Die berührende RM schneide die Asymptote in V. Eben so, wie bey rechtwinklichten Coordinaten, ist $TV = -\frac{u\,dz}{du}$ (s. berührende Linie, 13. 14.) Aus der Gleichung zwischen u und z folgt $-\frac{du}{u} = \frac{dz}{a\sqrt{2}}$, also ist $TV = a\sqrt{2}$, oder die Subtangente auf der Asymptote ist unveränderlich, wie an der logarithmischen mit rechtwinklichten Coordinaten. (s. berührende Linie, 20.).

Dieses hat Descartes gefunden. Er läßt die krumme Linie durch die stetige Durchschneidung zweyer geraden Linien beschreiben, deren eine sich parallel mit AB, die andere parallel mit AC von dem Puncte A an bewegt. Die Geschwindigkeit der erstern läßt er gleichförmig seyn, die Geschwindigkeit der andern aber zunehmen nach dem umgekehrten Verhältnisse des auf AC noch rückständigen Weges für die mit AB parallele. In A sollen beide Geschwindigkeiten gleich groß seyn. Dieses ist ganz richtig. Die mit AB parallele sey in LM, die mit AC parallele in TM, ihr Durchschnitt M. Es sey $AL = t$, und $LM = CT = z$, so ist der senkrechte Abstand der TM von $AC = y = \frac{z}{\sqrt{2}}$

Die Geschwindigkeiten der Linien LM, TM, jener nach der Richtung AL, dieser nach der Richtung PM, verhalten sich wie $dt : dy$. Nun ist $t = a - u$, also $dt = -du$. Die Gleichung zwischen u und z giebt $-\frac{au}{u} = \frac{dz}{a\sqrt{2}}$. Da $y = \frac{z}{\sqrt{2}}$, so ist $\frac{dt}{a-t} = \frac{dy}{a}$. Daher ist $dt : dy = a - t : a = 1 : \frac{a}{a-t}$. In A, wo $t = o$ ist, ist $dt : dy = 1 : 1$. Man kann auch, wie man hieraus sieht, TM sich gleichförmig, und LM ungleichförmig bewegen lassen, so wie man die Logarithmen ursprünglich in arithmetischer Progression, die zugeordneten Zahlen in geometrischer sich vorstellt.

Johann Bernoulli hat den Brief von Descartes an Beaune übersehen, als er in den Lect. Hospit. schrieb, Descartes habe in seinen Werken keine Auflösung der Aufgabe gegeben, die er doch gefunden zu haben in einem Briefe behaupte.

Merkwürdig ist es, daß in der Entstehungsart der Beaunischen Curve nach Descartes etwas ähnliches mit den Fluxionen vorkommt. Fluxionen sind Verhältnisse der Geschwindigkeiten einer Linie und eines Punctes, durch deren zusammengesetzte Bewegung eine krumme Linie beschrieben wird. Hier ist auch das Neperische System angenommen, da die Geschwindigkeiten der sich bewegenden Linie zu Anfange gleich groß sind.

Bedingung einer Aufgabe ist eine Forderung, welcher bey der Auflösung Genüge geschehen muß. In jeder eigentlichen Aufgabe sind eine oder mehrere Bedingungen zu erfüllen. In der unbestimmten Analytik ist die allgemeine Bedingung, daß die gesuchten Größen ganze Zahlen oder auch rationale Brüche seyn.

Bedingungs-Gleichung (aequatio conditionalis, équation de condition) ist eine solche, von welch

cher die Möglichkeit der Auflösung einer Aufgabe, entweder überhaupt, oder auf eine vorgeschriebene Art, abhängt.

In der unbestimmten Analytik ist eine Bedingungsgleichung, $mm = ann + 1$, wo m und n ganze Zahlen sind, wenn $axx + b$ ein Quadrat seyn soll. Auserdem muß es eine ganze Zahl f geben, welche für x gesetzt, die Formel $axx + b$ zu einem Quadrate macht.

Bedingungsgleichungen kommen besonders in der Differential- und Integralrechnung vor, und enthalten die Relationen der parallelen Differentiale, welche vorhanden seyn müssen, wenn die Integration einer Differentialgleichung möglich seyn soll. Diese heißen vorzüglich Bedingungsgleichungen. Diejenige für Differentialgleichungen vom ersten Grade zwischen zwey veränderlichen Größen ist die einfachste und vom häufigsten Gebrauche. S. Differentialgleichung.

Für eine Function von endlichen Differenzen irgend eines Grades, mit irgend einer Anzahl veränderlicher Größen hat Condorcet in den Abhandlungen der Pariser Akademie 1770 die Bedingungsgleichungen angegeben. S. Cousin Calcul diff. et intégral. §. 565.

Bey besondern Differentialformeln kommen auch Bedingungsformen zwischen den gegebenen Größen vor, woraus sich die Fälle ergeben, in welchen das Integral sich völlig, durch eine abbrechende Reihe von Gliedern, finden läßt.

Dergleichen lassen sich auch bey einigen Differentialgleichungen angeben, als in einer schweren, die Pfaff aufgelöset hat. Disquisit. analyticae. p. 137.

Befreundete Zahlen (numeri jamicabiles) sind ein Paar Zahlen, deren jede gleich ist der Summe der aliquoten Theile der andern, Z. B. 220 und 284. Die aliquoten Theile der ersten sind 1, 2, 4, 5, 10, 11, 20, 22, 44, 55, 110, und die Summe derselben = 284.

Die aliquoten Theile der andern sind 1, 2, 4, 71, 142, deren Summe = 220. Die Benennung, amicabiles, wird van Schooten zuerst gebraucht haben.

Michael Stifel erwähnt dieses einzigen Paares in seiner Ausgabe der Coß Christoph Rudolphs. Einmal führt er es als Beyspiel an, die aliquoten Theile einer Zahl zu finden (S 45), und setzt hinzu, es sey lustlich zu sehen, wie so eben alle partes aliquote von 220 machen 284, und wie erumb alle partes aliquote von 284 so eben machen 220. Am Ende des Buchs (S. 819) braucht er sie mit einigen andern Beyspielen zum Beweise, daß, wiewohl ein jede Coß einen unaussprechlichen Begriff in sich hat allerley künstlicher Rechnung, dennoch man viel feiner Rechnung finde, welche der Coß nicht sind unterworfen, sondern neben der Coß fließen aus der Theorica. Um diese Behauptung zu widerlegen zeigt van Schooten (Exercit. math. L. V. sect. 9.), wie man durch die Algebra befreundete Zahlen finden könne Die Methode gehört in die unbestimmte Algebra oder Analytik. Doch ist das von Schooten gebrauchte Verfahren zu eingeschränkt. Er findet dadurch drey Paare, 284 und 220; 18416 und 17296; 9437056 und 9363584. Zugleich führt Schooten eine von Descartes ihm mitgetheilte Regel, diese Gattung Zahlen zu finden, an, welche allerdings von dem Scharfsinne des Erfinders zeiget. Man wird sie am leichtesten verstehen, wenn sie in Zeichen ausgedruckt wird. Es seyn P, Q, R unbestimmte Primzahlen, und A eine Potenz der Zwey. Man suche eine Potenz A von der Beschaffenheit, daß $3A - = P$; $6A - 1 = Q$; $18AA - 1 = R$, so sind $2AR$ und $2APQ$ ein Paar befreundeter Zahlen. Die Regel ist ebenfalls eine eingeschränkte, da A eine Potenz der Zwey seyn soll. Auch bey Schootens Verfahren haben die beiden befreundeten Zahlen eine Potenz der Zwey zum gemeinschaftlichen Factor.

G. W. Krafft hat in den neuen Petersburger Commentarien T. II. eine Untersuchung über diese Materie mitgetheilt, die wegen der Bemerkungen über die Rela-

tion der Theiler einer Zahl und ihrer Summe lehrreich ist. (De numeris amicabilibus atque aliis ad hanc doctrinam spectantibus). Die von ihm gefundene allgemeinere Regel ist folgende: Es seyn P, Q, R Primzahlen, von welchen $R = (P + 1)(Q + 1) - 1$ ist; ferner sey a die Summe der Theiler einer Zahl A, die Eins und sie selbst mit eingeschlossen, und es sey $A : a = R + 1 : PQ + R$, so sind PQA und RA ein Paar befreundete Zahlen. Krafft sucht zuerst zu zwey Primzahlen, P und Q, die dritte R von der angegebenen Beschaffenheit, und darauf die Zahl A, welche zu der Summe ihrer Theiler das Verhältniß $R + 1 : PQ + R$ hat. Eine Zahl aus ihrem Verhältnisse zu der Summe ihrer Theiler zu finden, ist wieder eine Aufgabe, die sich nicht directe auflösen läßt. Doch giebt Krafft eine Methode, die in manchen Fällen zum Ziele führt. Daneben hat er eine Tafel der Verhältnisse der Zahlen von 1 bis 150 zu der Summe ihrer Theiler berechnet, worin man nachzusehen hat, ob das gegebene Verhältniß einer Zahl zu der Summe ihrer Theile darin vorkommt, wodurch dann ein Paar befreundeter Zahlen gefunden ist. Das Willkührliche bey der Annahme von P und Q kann die Entdeckung eines Paares solcher Zahlen sehr langwierig machen. In den Beyspielen, die Krafft beybringt, sieht man keinen Grund der Bestimmungen von P und Q. Ich würde mich zur Aufsuchung befreundeter Zahlen folgendes Verfahrens bedienen.

Da $R = PQ + P + Q$ seyn muß, so ist $R + 1 : 2R - P - Q = A : a$, oder, wenn $A : a = m : n$ ist, $R + 1 : 2R - P - Q = m : n$. Also ist $nR + n = 2mR - m(P + Q)$, und

$$P + Q = \frac{(2m - n)R - n}{m}.$$

Da $P + Q = R - PQ$ ist, so ist

$$PQ = \frac{(n - m)R + n}{m}.$$

Folglich werden, wenn für R irgend eine Primzahl angenommen wird,

P und Q durch eine quadratische Gleichung gefunden. Es ist

$$P \text{ oder } Q = \frac{(2m - n)R - n}{2m}$$

$$\pm \frac{1}{2m} \sqrt{((2m - n)^2 R^2 + (2m^2 + n^2 - 4mn)R + n^2 - 4mn)}.$$

Das obere Zeichen für eine der beiden Zahlen P oder Q, das untere für die andere. (s. Gleichung II., 1.) Man nehme für A irgend eine Zahl, und suche die Summe ihrer Divisoren a, so sind m und n gegeben. Nun muß ein solcher Werth der Primzahl R gesucht werden, daß die Wurzelgröße nicht allein einen möglichen rationalen Werth erhalte, sondern daß auch P und Q ganze und zwar Primzahlen werden. Alle diese Bedingungen schränken die Möglichkeit der befreundeten Zahlen sehr ein. Man hat nicht nöthig für R die Primzahlen von 1 an zu versuchen. Denn der Werth von R darf nicht zwischen die Wurzeln der Gleichung, $(2m - n)^2 x^2 + 2(2m^2 + n^2 - 4mn)x + n^2 - 4mn = 0$, fallen, weil sonst die Größe unter dem Wurzelzeichen negativ wird, und wenn die Gleichung eine negative Wurzel hat, muß R grösser als die positive seyn. Nur wenn sie unmögliche Wurzeln hat, giebt jeder Werth von R einen positiven Werth für die Größe unter dem Wurzelzeichen. (S. Gleichung I. 9.). Auch ist zu bemerken, daß $\frac{(2m - n)R - n}{m}$ eine ganze Zahl seyn muß.

Exempel. Man nehme A = 4, so ist die Summe der Divisoren = 7, also m : n = 4 : 7; und P oder $Q = \frac{R - 7}{8} \pm \frac{1}{8}\sqrt{(R^2 - 62R - 63)}$. Die Gleichung $x^2 - 62x - 63 = 0$ hat nur eine positive Wurzel zwischen 60 und 61. Man hat also für R erst von

61 an die Primzahlen zu verſuchen. Es müſſen $\frac{R-7}{4}$ und $\frac{3R+7}{4}$ ganze Zahlen ſeyn. Die erſte Bedingung macht 61 unbrauchbar. Die Zahl 67 giebt keine rationale Wurzel. Setzt man $R = 71$, ſo wird P oder Q $= 8 \pm 3$, beides Primzahlen, $P = 11$; $Q = 5$. Die beiden befreundeten Zahlen ſind 11. 5. 4 und 71. 4, das iſt 220 und 284.

Die unbeſtimmte Analytik leiſtet hier gute Dienſte. Die Größe unter dem Wurzelzeichen ſey $\alpha^2 R^2 + 2\beta R + \gamma$ welche ein Quadrat ſeyn ſoll. Die Wurzel des Quadrats ſey $\alpha R + p$, ſo iſt $2\beta R + \gamma = 2p\alpha R + p^2$, und daher $R = \frac{p^2-\gamma}{2(\beta - p\alpha)} = \frac{\gamma - p^2}{2(p\alpha - \beta)}$. Dieſes iſt die Form von R, nach welcher man eine beliebige Anzahl Werthe von p in ganzen Zahlen verſuchen kann. Iſt γ gerade, ſo muß p auch gerade ſeyn; iſt γ ungerade, ſo iſt p auch ungerade. In dem erſten Falle ſetze man 2p ſtatt p, in dem andern $2p \pm 1$ ſtatt p. Die beſondere Beſchaffenheit der Formel für gegebene α, β, γ, mögen ſchickliche Abkürzungen an die Hand geben.

Wenn $\gamma = 0$ iſt, ſo ſetze man $\sqrt{(\alpha^2 R^2 + 2\beta R)}$ und $= pR$, es iſt $R = \frac{2\beta}{p^2 - \alpha^2}$. Kann man demnach einer in dreytheiligen Wurzelgröße für R einen Werth $r + u$ ſetzen, ſo daß dadurch das gegebene Glied der Wurzelgröße verſchwindet, ſo giebt dieſes eine beträchtliche Erleichterung. Dieſes wird erhalten, wenn r eine der Wurzeln der Gleichung, $\alpha^2 u^2 + 2\beta u + \gamma = 0$, iſt.

Exempel Es ſoll $R^2 - 62R - 63$ das Quadrat einer ganzen Zahl, und zugleich R eine Primzahl ſeyn, wenn es möglich iſt. Es iſt alſo $R = \frac{p^2 + 63}{-2(31 + p)}$.

Weil p ungerade und negativ seyn muß, so setze man $p = -2q - 1$, und es ist $R = \frac{q^2 + q + 16}{q - 15}$ $= q + 16 + \frac{256}{q-15}$. Hieraus ergiebt sich, daß $q - 15$ ein Factor von 256 ist, oder daß $q = \frac{256}{r} + 15$, wo r ein Factor von 256 ist. Die Factoren 1, 2, 4 geben für R keine Primzahl, aber $r = 8$ giebt $q = 47$, und $R = 71$.

Exempel. Man suche, ob aus der Zahl 5 sich, wie vorher aus 4, ein Paar befreundeter Zahlen herleiten lasse. Es ist also $A = 5$, $a = 6$, und $m : n = 5 : 6$; also

$$P \text{ oder } Q = \frac{2R - 3}{5} \pm \tfrac{1}{5}\sqrt{(4R^2 - 17R - 21)}.$$

Zugleich muß $\frac{2R-3}{5}$ eine ganze Zahl seyn. Da alle Primzahlen sich mit einer der Ziffern, 1, 3, 7, 9, endigen, so sind hier nur diejenigen, die sich mit 9 endigen, brauchbar, und es hat also R die Form $10p - 1$. Setzt man diesen Werth für R, so wird die Wurzelgröße $= \sqrt{25(16p^2 - 10p)}$. Soll diese rational seyn, so ist $p = \frac{10}{16 - q^2}$. Offenbar ist keine ganze Zahl für q vorhanden, welche p zu einer ganzen positiven Zahl macht; aber auch kein Bruch. Denn wenn man statt q einen Bruch $\frac{q}{r}$ setzt, so ist $p = \frac{10r^2}{16r^2 - q^2}$. Hier müßte, da r^2 kein Factor des Nenners ist, der Nenner entweder 10 oder 5 seyn, daß ist, $16r^2 - q^2 = 10$ oder 5, welches für ganze Zahlen q und r wenigstens nicht möglich ist. Es kann also ein Paar befreundeter Zahlen nicht den gemeinschaftlichen Factor 5 haben.

Euler hat in dem zweyten Theile seiner Opusculorum (Berolini 1750) eine Abhandlung über die befreundeten Zahlen geliefert, die wegen des dabey angebrachten künstlichen Verfahrens, dergleichen Zahlen zu entdecken, lehrreich ist. Sie ist deutlich geschrieben. Es sind darin 61 Paare befreundeter Zahlen angegeben. Die Methoden erfordern alle gewisse Versuche, und die Kunst besteht darin, die Ungewißheit des Versuchens zu vermindern. Euler giebt den befreundeten Zahlen die Formen apq und ar; oder apq und abr; oder abpq und acr, wo a, b, c angenommene Zahlen, p, q, r gesuchte Primzahlen sind. Die Factoren derselben Zahlen haben nichts gemeinschaftliches. Auch sucht er in den Formen zap und zbq, worin a, b, p, q die vorige Bedeutung haben, aus diesen als angenommenen Zahlen den gemeinschaftlichen Factor z.

Bekanntes Glied ist in einer Gleichung dasjenige, welches nicht in die unbekannte Größe multiplicirt ist, es mag eintheilig oder vieltheilig seyn. Vieta nannte es Homogeneum corporationis.

Benannte Zahlen sind diejenigen, deren Einheit ein bestimmter Begriff ist. Z. B. 12 Fuß, 20 Thaler. Bey der Rechnung mit benannten Zahlen muß man die Eintheilung der Einheit in kleinere Theile kennen.

Benannte Zahlen können nicht mit einander multiplicirt werden. Wenn bey der Anwendung der Regel de Tri eine solche Multiplication vorkommt, so ist der eine Factor allemahl als eine absolute Zahl mit Bruchtheilen, die sich auf eine abstracte Einheit beziehen, oder auch ohne solche, zu betrachten. Wenn benannte Zahlen durch einander dividirt werden, so müssen beide gleichartig seyn. Der Quotient zeigt an, wie vielmahl der Divisor selbst, oder ein gewisser Theil desselben, in dem Dividendus enthalten ist.

Bernoullische Zahlen sind die Coefficienten des niedrigsten Gliedes in den Summen der geraden Potenzen ganzer Zahlen von 1 bis x. Es ist nämlich, wenn $S.x^{2n}$ die Summe der geraden Potenzen mit dem Exponenten $2n$ von der Wurzel 1 bis x bedeutet, (Potenz III. 13.)

$$S.x^2 = \tfrac{1}{3}x^3 + \tfrac{1}{2}x^2 + \tfrac{1}{6}x$$
$$S.x^4 = \tfrac{1}{5}x^5 \ldots\ldots - \tfrac{1}{30}x$$
$$S.x^6 = \tfrac{1}{7}x^7 \ldots\ldots + \tfrac{1}{42}x$$
$$S.x^8 = \tfrac{1}{9}x^9 \ldots\ldots - \tfrac{1}{30}x$$

u. s. f.

Die absoluten Zahlen $\frac{1}{6}$, $\frac{1}{30}$, $\frac{1}{42}$, $\frac{1}{30}$, sind die ersten vier Bernoullischen Zahlen. Den Namen haben sie von ihrem Erfinder, Jakob Bernoulli. (Potenz. III. 19.)

2. Euler hat die ersten 15 dieser Zahlen in den Institt. Calc. diff. P. II. §. 122 mitgetheilt. In den Comm. Petrop. novis. T. XIV. hat er sie bis zur siebzehnten berechnet. Jakob Bernoulli hat nur die fünf ersten angegeben, und gezeigt, wie sie folgweise aus den vorhergehenden gefunden werden, das allgemeine Gesetz ihrer Fortschreitung aber nicht bestimmt. Dieses hat Moivre zuerst bemerkt (Miscell. Analyt. Suppl. p. 9). Euler hat es einfacher, und zur numerischen Berechnung bequemer dargestellt. Calc. diff. P. II. §. 123. Er hat auch den Gebrauch dieser Zahlen zur Vereinfachung mancher Reihen, insbesondere bey Summirungen, gezeigt.

3. Die ersten 12 Bernoullischen Zahlen sind

$$A = \frac{1}{6} \quad ; \quad B = \frac{1}{30} ;$$

$$C = \frac{1}{42} \quad ; \quad D = \frac{1}{30} ;$$

$$E = \frac{5}{66} \quad ; \quad F = \frac{691}{2730} ;$$

$$G = \frac{7}{6} \quad ; \quad H = \frac{3617}{510} ;$$

$$J = \frac{43867}{798} \quad ; \quad K = \frac{174611}{330}$$

$$L = \frac{854513}{138} \quad ; \quad M = \frac{23636409}{2730}$$

4. Es seyn die Bernoullischen Zahlen, A, B, D . . . . $\overset{-3}{N}$, $\overset{-2}{N}$, $\overset{-1}{N}$, N', etc. wo N die nte t selben, $\overset{-1}{N}$, die (n — 1)te, u. s. f. ist. Die Binom Coefficienten in der (2n + 1ten Potenz seyn $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{D}$, etc. so ist (Potenz III. 20).

$$\mathfrak{A}N - \mathfrak{C}\overset{-1}{N} + \mathfrak{E}\overset{-2}{N} - \mathfrak{G}\overset{-3}{N} + \ldots \pm \mathfrak{F}C \mp \mathfrak{I} \pm \mathfrak{B}A \pm 1 = \pm \tfrac{1}{2}\mathfrak{A}.$$

Setzt man für n folgweise 1, 2, 3, etc. so ist

$$3A + 1 = + \frac{3}{2}$$

$$5B - \frac{5.4.3}{1.2.3} A - 1 = - \frac{5}{2}$$

$$7C - \frac{7.6.5}{1.2.3} B + \frac{7..3}{1..5} A + 1 = + \frac{7}{1}$$

$$9D - \frac{9.8.7}{1.2.3} C + \frac{9..5}{1..5} B - \frac{9..3}{1..7} A - 1 =$$

$$11E - \frac{11.10.9}{1.2.3} D + \frac{11..7}{1..5} C - \frac{11..5}{1..7} B$$

$$+ \frac{11..3}{1..9} A + 1 = + \frac{11}{2}$$

u. s. w.

5. Um das Gesetz der Formation deutlicher zu machen, setze man

$$A = 1.2\alpha \quad ; \quad B = 1.2.3.4\beta$$
$$C = 1.2..6\gamma \quad ; \quad D = 1.2,...8\delta$$
$$E = 1.2..10\varepsilon \quad ; \quad \text{etc.}$$

so ist

$$\alpha + \frac{1}{1.2.3} = + \tfrac{1}{2}.\frac{1}{1.2}$$

$$\beta - \frac{\alpha}{1.2.3} - \frac{1}{1..5} = -\tfrac{1}{2}.\frac{1}{1..4}$$

$$\gamma - \frac{\beta}{1.2.3} + \frac{\alpha}{1..5} + \frac{1}{1..7} = + \tfrac{1}{2}.\frac{1}{1..6}$$

$$\delta - \frac{\gamma}{1.2.3} + \frac{\beta}{1..5} - \frac{\alpha}{1..7} - \frac{1}{1..9} = - \tfrac{1}{2}.\frac{1}{1..8}$$

$$\varepsilon - \frac{\delta}{1.2.3} + \frac{\gamma}{1..5} - \frac{\beta}{1..7} + \frac{\alpha}{1..9} + \frac{1}{1..11} =$$
$$+ \tfrac{1}{2}.\frac{1}{1...10}.$$

u. s. f.

Die Größen — 1, α, β, γ, δ, ε, etc. machen eine rücklaufende Reihe aus, deren Relations-Scale ist

$$+\frac{1}{1.2\,3} \quad ; \quad -\frac{1}{1.2..5} \quad ; \quad +\frac{1}{1.2..7}, \text{ u. s. f.}$$

nur daß zu dem hieraus entstehenden Werthe jeder noch eine Größe von der Form kommt, wie diejenigen sind, die in den vorhergehenden Formeln den Theil rechter Hand ausmachen.

6. Man vergleiche mit diesen Formeln diejenigen, welche für die Relationen der Coefficienten in der aus einer gebrochenen Function entstehenden Reihe, in dem Art.

Rücklaufende Reihen, q. sich finden. Es erhellt daraus, daß die obigen Zahlen α, β, γ, δ, etc. Coefficienten in einer Reihe sind, die aus einer rationalen gebrochnen Function einer veränderlichen Größe entsteht, worin Zähler und Nenner eine ohne Ende fortgehende Reihe sind. Um die gebrochne Function nach dem hier vorkommenden Falle einzurichten, setze man den

$$\text{Dividendus} = 1 - az + bz^2 - cz^3 + dz^4 - ez^5 + \text{etc.}$$

$$\text{Divisor} = 1 - Az + Bz^2 - Cz^3 + Dz^4 - Ez^5 + \text{etc.}$$

$$\text{Quotienten} = 1 - \alpha z - \beta z^2 - \gamma z^3 - \delta z^4 - \varepsilon z^5 + \text{etc.}$$

wo A, B, C, D, etc. aber nicht die Bernoullischen Zahlen bedeuten, sondern Coefficienten, die noch bestimmt werden sollen. Es ist nun

$$1 = 1$$

$$\alpha + A = + a$$

$$\beta - A\alpha - B = - b$$

$$\gamma - A\beta + B\alpha + C = + c$$

$$\delta - A\gamma + B\beta - C\alpha - D = - d$$

$$\varepsilon - A\delta + B\gamma - C\beta + D\alpha + E = + e$$

etc.

Die Vergleichung mit den Formeln für α, β, etc. in (5) giebt $A = \frac{1}{1.2.3}$; $B = \frac{1}{1.2..5}$;

$C = \frac{1}{1.2..7}$; $D = \frac{1}{1.2..9}$; $E = \frac{1}{1.2...11}$

u. s. w. Ferner

$a = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1.2}$; $b = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1.2.3.4}$;

$c = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1.2..6}$; $d = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1.2..8}$; $e = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1.2..10}$ etc.

Nun ist $\sin \varphi = \varphi - \frac{1}{1.2.3}\varphi^3 + \frac{1}{1.2..5}\varphi$ $\frac{1}{1.2..7}\varphi^7 +$ etc. und $\cos \varphi = 1 - \frac{1}{1.2.}\varphi$ $\frac{1}{1.2.3.}\varphi^4 - \frac{1}{1.2..6}\varphi^6 +$ etc. (Cyklometrie 5.

Man setze demnach φ^2 für z, und multiplicire zuerst den Divisor durch φ, dagegen man den Quotienten durch φ dividire, so ist der Dividendus $=$ $+ \cos. \varphi)$; der Divisor $\sin \varphi$, und der Quotient $=$ $- \alpha\varphi^3 - \beta\varphi^5 - \gamma\varphi^6 - \delta\varphi^7 -$ etc. Nun ist $\frac{+\cos \vartheta}{2 \sin \varphi} = \frac{1}{2}$ cotang $\frac{1}{2}\varphi$ (Goniometrie, 38.).

olglich ist

$$\cot \tfrac{1}{2}\varphi = \frac{1}{\varphi} - \alpha\varphi - \beta\varphi^3 - \gamma\varphi^5 - \delta\varphi^7 -$$

tc.

Die Bernoullischen Zahlen sind also Factoren der Coefficienten in der Reihe für $\cot \frac{1}{2}\varphi$ Es ist, wenn diese Zahlen selbst wieder eingeführt werden,

$$\cot \tfrac{1}{2}\varphi = \frac{2}{\varphi} - \frac{2A}{1.2}\varphi - \frac{2B}{1.2.3.4}\varphi^3 - \frac{2C}{1.2..6}\varphi^5 - \frac{2D}{1.2...8.}\varphi^7 - \text{etc.}$$

8. Wenn $\cot \varphi = \frac{1}{\varphi} - a\varphi - b\varphi^3 - c\varphi^5 - d\varphi^7 - e\varphi^9 -$ etc. gesetzt wird, so ist (Cyklometrie, 15.)

$3a = 1$ $\quad 5b = aa$

$7c = 2ab$ $\quad 9d = 2ac + bb$

$11e = 2ad + 2bc$ $\quad 13f = 2ae + 2bd + cc,$

$15g = 2af + 2be + 2cd$ etc.

Da die Coefficienten unveränderlich sind, so ist

$$\cot\tfrac{1}{2}\varphi = \frac{2}{\varphi} - \tfrac{1}{2}a\varphi - \tfrac{1}{8}b\varphi^3 - \tfrac{1}{32}c\varphi^5 - \tfrac{1}{128}\varphi^7 - \tfrac{1}{512}\varphi^9 - \text{etc.}$$

Also ist $4\alpha = a$; $4^2.\beta = b$; $4^3.\gamma = c$; $4^4.\delta = d$; $4^5.\varepsilon = e$; etc. Setzt man für a, b, c, etc. diese Werthe in den angeführten Formeln, so lassen diese sich folgeweise durch 4, 4^2, 4^3, etc. dividiren, und es bleiben dieselben Relationen zwischen den Zahlen α, β, γ, etc. wie zwischen a, b, c, etc. nur daß ihre Werthe andere sind. Es ist

$3\alpha = \frac{1}{4}$ $\quad$ $5\beta = \alpha\alpha$

$7\gamma = 2\alpha\beta$ $\quad$ $9\delta = 2\alpha\gamma + \beta\beta$

$11\varepsilon = 2\alpha\delta + 2\beta\gamma$ $\quad$ $13\zeta = 2\alpha\varepsilon + 2\beta\delta + \gamma\gamma$

$15\eta = 2\alpha\zeta + 2\beta\varepsilon + 2\gamma\delta$ etc.

9. Die Relationen der Bernoullischen Zahlen, A, B, C, D, etc. selbst sind folgende:

$$3A = \frac{2.1}{1.2}\cdot\tfrac{1}{2}$$

$$5B = \frac{4.3}{1.2}\cdot AA$$

$$7C = \frac{6.5}{1.2}\cdot 2AB$$

$$9D = \frac{8.7}{1.2}\cdot 2AC + \frac{8..5}{1..4}\cdot BB$$

$$11E = \frac{10.9}{1.2}\cdot 2AD + \frac{10..7}{1..4}\cdot 2BC$$

$$13F = \frac{12.11}{1\ 2}\cdot 2AE + \frac{12..9}{1..4}\cdot 2BD + \frac{12..7}{1..6}\cdot CC$$

$$15G = \frac{14.13}{1\ 2}\cdot 2AF + \frac{14..11}{1..4}\cdot 2BE + \frac{14..9}{1..6}\cdot 2CD$$

etc.

Der Weg, auf welchem dieſe merkwürdigen Relationen der Bernoulliſchen Zahlen hier gefunden ſind, iſt ein anderer, als der mühſamere, auf welchem Euler in den Inſtit. Calc. diff. P. II. cap. 5. dazu gelangt iſt.

Berührende gerade Linie an einem Puncte einer krummen Linie, (Tangente), iſt diejenige, welche zwiſchen zwey ſchneidenden Linien, die durch dieſen Punct und einen andern, auf entgegengeſetzten Seiten deſſelben, gezogen ſind, innerhalb ihres ſpitzigen Winkels liegt, dieſer Winkel mag noch ſo klein und kleiner als jeder angebbare ſeyn.

1. Die krumme Linie ſey A M R, (Fig. 34. Tab. II). Durch den Punct M, und die beiden Puncte N, n, auf entgegengeſetzten Seiten von M, ſeyn die ſchneidenden, N M S, M n s, gezogen, ſo liegt die berührende T M t innerhalb des ſpitzen Winkels S M s und ſeines Scheitelwinkels, ſo klein auch der W. S M s werden mag. Wenn die Linien N M S und M n s ſich um M drehen, ſo fallen ſie, indem ſie ihre Stellen wechſeln auf der berührenden in eine einzige gerade Linie zuſammen.

2. Kann die krumme Linie nur in zwey Puncten von einer geraden geſchnitten werden, ſo iſt eine berührende diejenige, welche nur einen Punct mit ihr gemein hat, und ganz auf einer Seite derſelben liegt. Es giebt aber viele krumme Linien, die von einer geraden Linie in mehr als zwey Puncten geſchnitten werden. Darum kann man die berührende nicht allgemein für diejenige erklären, die mit der krummen Linie nur einen Punct auf die gedachte Art gemein hat, oder man müßte dieſes auf einen gewiſſen Theil der krummen Linie einſchränken, wie Archimedes bey ſeiner Spirallinie thut. Er zeigt von dieſer, daß jeder ihrer Umläufe nur in einem Puncte von der berührenden getroffen wird.

3. Wie die berührende an einem Kreiſe gezogen wird, lehren die Elemente, ſ. Kreis.

4. In einem Kegelſchnitte kann durch jeden Punct eine gerade Linie gelegt werden, welche alle unter dem ge-

hörigen Winkel gezogenen parallelen Chorden oder Doppelordinaten halbirt. Die mit dieſen Chorden durch den Endpunct dieſer Linie gezogene parallele Linie berührt den Kegelſchnitt, ſ. Linien der zweyten Ordnung.

5. Die Benennung, Tangente, wird ſchicklich der Linie, welche in der Goniometrie und Trigonometrie zur Beſtimmung eines Winkels gebraucht wird, eigen gelaſſen werden können.

Analytiſche Methode, gerade berührende an eine krumme Linie zu ziehen.

6. Es ſey AMR (Fig. 34.) ein Bogen der krummen Linie, für welche eine Gleichung zwiſchen den Coordinaten AP und PM gegeben iſt. Man nehme irgend einen Punct N auf der einen oder der andern Seite von M, und ziehe NQ parallel mit MP, ſo findet zwiſchen AQ. und QN dieſelbe Gleichung Statt, wie zwiſchen AP und PM. Durch M, N werde eine gerade Linie NMS gezogen, welche die Abſciſſenlinie APQ in S treffe. Es ſey Mm parallel mit AQ, ſo iſt PS: PM = Mm: Nm. Das Verhältniß Mm: Nm ſuche man durch die beiden Abſciſſen und Ordinaten, und durch PS auszudrucken. Setzt man in dieſem Verhältniſſe AP = AQ, und MP = NQ, ſo geht die ſchneidende SMN in die berührende TMt über. Denn durch eine ähnliche Annahme für die ſchneidende Mns auf der andern Seite von M wird Ps = PS, daher Mns mit NMS in eine gerade Linie zuſammen fällt, das iſt, beide fallen in die berührende TMt.

7. Exempel. I. Es ſey AMR (Fig. 34.) eine Parabel, deren Axe AP, und Parameter = a iſt. Die Ordinaten MP, NQ ſeyn ſenkrecht auf die Axe; und AP = x; MP = y; AQ = z; NQ = u; die Subtangente PT = t, und die Subſecante PS = v. Es iſt $ax = y^2$; und $az = u^2$; ferner v: y = z − x: u − y. Jene erſtere Gleichung von der zweyten abgezogen giebt $a(z-x) = u^2 - y^2 = (u+y)(u-y)$. Daraus iſt z − x: u − y = u + y: a; folglich v: y = u + y: a. Die-

ſelbe Proportion wird erhalten, wenn N auf der andern Seite von M, in n, genommen wird. Setzt man $u = y$, ſo werden die Werthe von PS und Ps ſich gleich, das iſt, $v = t$, und $t : y = 2y : a$, alſo $t = \frac{2y^2}{a}$, oder $t = 2x$.

Iſt PT gefunden, ſo iſt dadurch die berührende beſtimmt.

8. Exempel. II. Es ſey AMB (Fig. 35.) eine halbe Ellipſe, deren halbe große Axe $AC = a$; halbe kleine $CD = b$ iſt. Die Conſtruction und die Bezeichnungen wie in dem 1. Exempel. Die Gleichung für die Coordinaten AP ($= x$) und PM ($= y$) iſt $b^2 (2ax - x^2) = a^2 y^2$, und für AQ, QN iſt ſie $b^2 (2az - z^2) = a^2 u^2$. Durch die Subtraction wird erhalten $2ab^2 (z - x) - b^2 (z^2 - x^2) = a^2 (u^2 - y^2)$, das iſt, $2ab^2 (z - x) - b^2 (z + x)(z - x) = a^2 (u + y)(u - y)$. Da $v : y = z - x : u - y$, ſo iſt $v : y = a^2 (u + y) : 2ab^2 - b^2 (z + x)$, es mag N auf der einen oder der andern Seite von M liegen. Setzt man $z = x$, und $u = y$, ſo werden die beiden Werthe der Subſecante v für entgegengeſetzte Lagen von N einander gleich, und $= PT$, ſo daß $t : y = a^2 y : b^2 (a - x)$, oder $t = \frac{a^2 y^2}{b^2 (a - x)} = \frac{2ax - x^2}{a - x}$. Dieſes giebt die merkwürdige Proportion, $CP : AP = BP : PT$.

9. Exempel. III. Es ſey die Gleichung für die krumme Linie: $y = a + bx + cx^2 + dx^3$, und für die Coordinaten u und z ſey ſie $u = a + bz + cz^2 + dz^3$. Die krume Linie iſt eine paraboliſche der zweyten Ordnung. Hieraus iſt $u - y = b(z - x) + c(z^2 - x^2) + d(z^3 - x^3)$, oder $u - y = b(z - x) + c(z + x)(z - x) + d(z^2 + zx + x^2)(z - x)$; alſo $v : y = 1 : b + c(z + x) + d(z^2 + zx + x^2)$. Setzt man $z = x$, ſo iſt $t = \frac{y}{b + 2cx + 3dx^2}$. Auf dieſelbe Art findet man für paraboliſche Linie höherer Ordnun-

gen die Subtangenten, vermittelst derer die berührenden sich ziehen lassen.

10. Exempel. IV. Die Gleichung zwischen den Coordinaten sey eine ungesonderte (oder y eine functio implicita von x, nämlich:

$$ay^3 - by^2 - cx^2y + dx^3 + exy = o.$$

Statt der Coordinaten x und y nehme man nun die beiden z und u, für welche eben so ist

$$au^3 - bzu^2 - cz^2u + dz^3 + ezu = o.$$

Zieht man die erstere Gleichung von dieser ab, so ist

$$a(u^3 - y^3) - b(u^2 - y^2)z - by^2(z - x)$$
$$- c(z^2 - x^2)u - cx^2(u - y) + d(z^3 - x^3)$$
$$+ e(z - x)u + ex(u - y) = o.$$

das ist

$$[a(u^2 + uy + y^2) - bz(u + y) - cx^2 + ex]$$
$$(u - y) = [by^2 + cu(z + x) - b(z^2 + zx + x^2)$$
$$- eu](z - x).$$

Also ist

$$v : y = [a(u^2 + uy + y^2) - bz(u + y) - cx^2 + ex] :$$
$$[by^2 + cu(z + x) - d(z^2 + zx + x^2) - eu].$$

Setzt man $u = y$ und $z = x$, so ist

$$t : y = [3ay^2 - 2bxy - cx^2 + ex] :$$
$$[by^2 + 2cxy - 3dx^2 - ey].$$

11. Exempel. V. Es sey x der Logarithme von y in dem System, dessen Basis $= a$ ist, wenn nämlich die dadurch bezeichneten Linien in Zahlen mittelst einer beliebigen Einheit ausgedruckt werden. Diese ist die Ordinate AB in dem Anfangspuncte der Abscissen A. (Fig. 36.) Demnach ist $y = a^x$. In der Figur ist $PM = y$, und $AP = x$. Eine andere Zahl sey u, und ihr Logarithme z in demselben System, so ist $u = a^z$. In der Figur wird u durch QN, und z durch AQ dargestellt. Aus beiden Gleichungen folgt erstlich durch die Division, $\frac{u}{y} = a^{z-x}$

Setzt man $a = 1 + b$, so ist nach dem binomischen Lehrsatze, $\frac{u}{y} = 1 + (z-x)\,b + \frac{(z-x)(z-x-1)}{1 \cdot 2} b^2 + z-x-2 \frac{(z-x-1)(z-x-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} b^3 + \text{etc.}$

also ist

$$\frac{u-y}{z-x} = y\left(b + \frac{z-x-1}{2} b^2 + \frac{(z-x-1)(z-x-2)}{2 \cdot 3} b^3 + \text{etc.}\right).$$

Die Subsecante (in der Figur P S) ist $= \frac{z-x}{u-y}$

$y = \frac{1}{b+q}$. wo q das ganze nach b folgende Stück der hier gefundenen Reihe bedeutet. Setzt man in derselben $z = x$, so erhält man den Werth der Subtangente P T

$$t = \frac{1}{b - \frac{1}{2} b^2 + \frac{1}{3} b^3 - \frac{1}{4} b^4 + \text{etc.}}$$

Die Subtangente an der logarithmischen Linie ist also eine unveränderliche Größe. In dem Artikel von den Logarithmen wird gezeigt, daß $b - \frac{1}{2} b^2 + \frac{1}{3} b^3 - \frac{1}{4} b^4 + \text{etc.} = \text{log. nat. } (1+b) = \text{log. nat. } a$ ist. Folglich ist die Subtangente $t = \frac{1}{\text{log. nat. } a}$ Will man sie als Linie, ohne eine Einheit anzunehmen, ausdrucken, so ist $t = \frac{AB}{\text{L nat. } (a : AB)}$. Da Logarithmen sich nie auf Linien oder benannte Größen, sondern nur auf absolute Zahlen beziehen, so ist log a, wenn a eine Linie bedeutet, als $\text{log. } \frac{a}{1}$ zu betrachten, wo für 1 die Linie gesetzt wird, die vorher zur Einheit diente. Für die Zahl t wird nun $\frac{t}{AB}$ ge-

ſetzt, wo t eine abſolute Linie, ohne Beziehung auf eine Einheit, bedeutet.

Anwendung der Differentialrechnung zur Beſtimmung der berührenden Linie.

12. Eine berührende gerade Linie kann auch erklärt werden, als diejenige, welche mit der krummen Linie in dem Berührungspuncte einerley Richtung hat. An der geraden TMt (Fig. 34.) ſeyn die Abſciſſen AP, AQ, wie an der krummen AMR, die Ordinaten PM, Qt, ſo wird ihre Richtung beſtimmt durch das Verhältniß der Unterſchiede der beiden Abſciſſen und der Ordinaten, Mm: tm, welches für jeden Unterſchied daſſelbe bleibt, und = PT: PM iſt. An der krummen Linie AMR wird die Richtung in dem Puncte M beſtimmt durch das Gränzverhältniß der Unterſchiede Mm: Nm, da das Verhältniß endlicher Unterſchiede die Richtung der Chorde oder der ſchneidenden SMN angiebt. Demnach iſt die berührende gerade Linie diejenige, an welcher das Verhältniß der Unterſchiede zweyer Abſciſſen und der zugehörigen Ordinaten dem Gränzverhältniſſe dieſer Unterſchiede an der Curve gleich iſt.

13. Es ſey nun für die krumme Linie AMR (Fig. 34.) die Abſciſſe AP = x, Ordinate PM = y, die berührende MT, die Subtangente PT = t, ſo iſt $t = \frac{y\,dx}{dy}$.

Denn das Gränzverhältniß von Nm: Mm wird durch $dy : dx$ bezeichnet. Das demſelben gleiche an der berührenden iſt PM: PT; folglich iſt $dy : dx = y : t$.

Man kann die Formel für t auch folgendergeſtalt abfaſſen. Es ſey die Differentialgleichung zwiſchen den Coordinaten, $P\,dx = Q\,dy$, ſo iſt $Pt = Qy$, und $t = \frac{Qy}{P}$.

Die Formeln gelten für jeden Coordinatenwinkel.

14. Wenn der Coordinaten-Winkel ein rechter iſt, ſo iſt die Tangente des Winkels TMP, der berührenden mit der Ordinate (d. i. der Curve in M mit der Ordinate)

$= \frac{PT}{PM} = \frac{dx}{dy}$; und die Tangente des W. MTP, der berührenden mit der Abſciſſenlinie $= \frac{dv}{dx}$.

15. Die Subtangente liegt mit dem Anfangspuncte der Abſciſſen auf derſelben Seite der Ordinate, wenn die abſoluten Veränderungen der Coordinaten gleichnamig (beides Zunahmen oder Abnahmen) ſind; auf verſchiedenen Seiten, wenn dieſe ungleichnamig ſind. Ein poſitiver Werth von $\frac{y\,dx}{dy}$ zeigt an, daß die poſitive Abſciſſe von ihrem Anfangspuncte an, und die Subtangente PT von dem Grundpuncte P der Ordinate angenommen, entgegengeſetzte Richtungen haben; ein negativer Werth von $\frac{y\,dx}{dy}$ zeigt das Gegentheil an. Bey negativen Abſciſſen verhält es ſich umgekehrt. Nämlich hier zeigt ein poſitiver Werth der Subtangente an, daß ihre Richtung dieſelbe wie die der negativen Abſciſſe iſt. Man hat hier aber lieber auf die Richtung der poſitiven Abſciſſen zu achten, um die Beurtheilung der Lage der Subtangente einfacher zu machen.

16 Die Differentialrechnung leiſtet das auf einem kürzern Wege, was die obige Differenzenrechnung auf einem längern fand. Das Verfahren iſt nach beiden im Weſentlichen daſſelbe, nach jener aber iſt es kürzer, weil in den Differentialformeln alle die Rechnungen ſchon enthalten ſind, die nach der andern Rechnungsart in jedem Falle erſt gemacht werden müſſen. Die Differenzenrechnung erläutert aber die Anwendung der Differentialrechnung auf dieſen Fall, und überhaupt ihr Verfahren ſehr gut. Man ſieht daraus, wie ein von der Quantität der Unterſchiede unabhängiges Verhältniß entſteht, und daß dabey nichts als unbedeutend klein weggelaſſen wird, ſondern daß Größen oder Verhältniſſe gleich geſetzt werden, die der Beſchaffenheit des Geſuchten zufolge nicht ungleich ſeyn

dürfen. Zur Vergleichung beider Rechnungsart wir die obigen Beyſpiele nach der Differentialrec handeln.

17. Die krumme Linie ſey eine Parabel, der ung iſt $ax = yy$. Nun iſt $adx = 2ydy$ $\frac{dx}{dy} = \frac{2y}{a}$; alſo die Subtangente $t = \frac{2yy}{a}$

18. Die krumme Linie ſey eine Ellipſe, deren iſt $bb(2ax - xx) = aayy$. Die Differential iſt $bb(a-x)\,dx = aaydy$; daher $\frac{dx}{dy} = \frac{aa}{bb}$ und die Subtangente $t = \frac{aayy}{bb(a-x)} = \frac{(2a-}{a-}$

19. Die krumme Linie ſey eine von der par Gattung, und ihre Gleichung, $y = a + bx + dx^5$. Die Differentialgleichung iſt $dy = 2cxdx + 3dx^2dx$.

Daher $t = \frac{y}{b + 2cx + 3dx^2}$.

20. Die Gleichung für die krumme $ay^3 - bxy^2 - cx^2y + dx^3 + exy =$ ſo iſt die Differentialgleichung, wenn man zuer und darauf y veränderlich ſetzt, (Diff. Gleich. 4 $(\frac{3}{-}by^2 - 2cxy + 3dx^2 + ey)\,dx + (3ay^2 - 2bxy - cx^2 + ex)\,dy =$ folglich $t = \frac{y(3ay^2 - 2bxy - cx^2 + e}{by^2 + 2cxy - 3dx^2 -}$

21. Iſt die Gleichung die transſcendente: ſo wird aus der Differenzen-Gleichung die D gleichung $\frac{dy}{dx} = y(b - \frac{1}{2}b^2 + \frac{1}{3}b^3 - \text{etc.})$ indem für den Quotienten der endlichen Diffe

ntial-Quotient $\frac{dy}{dx}$ gesetzt, zugleich aber auch

genommen wird. Zu vergl. Differ. Formeln §. 12.

Subtangente, $\frac{ydx}{dy}$ ist die Constante

$$\frac{1}{\frac{1}{2}b^2 + \frac{1}{3}b^3 - \text{etc.}}$$

. Ist auf derselben Seite der Abscissenlinie mehr
ie stetige Folge von Ordinaten, wenn nämlich die
mehr als einen Zweig auf dieser Seite hat, so hat
ibtangente für Puncte der Curve, die auf den ver-
nen Zweigen zu einer gemeinschaftlichen Abscisse ge-
verschiedene Werthe. Sie kann daher nicht bloß
eine Function seyn. Um die verschiedenen Werthe
en zu bestimmen, verbinde man die Gleichung für
ifferentialquotienten, $\frac{dx}{dy}$, als eine endliche verän-
e Größe, p, mit der Gleichung zwischen x und y,
ite daraus durch die Wegschaffung von y eine Glei-
zwischen dem Quotienten p und x her. Aus dieser
ung müssen sich alle Werthe des Quotienten p für
eine Abscisse ergeben, und daraus die Subtangen-
dieser Abscisse. Ist die Gleichung eine algebraische,
ß ihr Grad wenigstens so groß seyn, als die Anzahl
öglichen Werthe, welche der zu einer und derselben
e gehörige Differentialquotient haben kann.

. Schneiden sich zwey oder mehrere Zweige der Curve
m Puncte, so sind in diesem so viele berührende als
e, die ihn gemein haben. Die Formel für die Sub-
ite kann aber keine derselben angeben, weil die Wer-
n y für diesen Punct nicht verschieden sind. Aber
eichung zwischen dem Differentialquotienten p und
scisse (22.) giebt alle Werthe von p eben so gut an,
nn alle Ordinaten zu einer Abscisse verschieden sind.

dürfen. Zur Vergleichung beider Rechnungsarten wollen wir die obigen Beyspiele nach der Differentialrechnung behandeln.

17. Die krumme Linie sey eine Parabel, deren Gleichung ist $ax = yy$. Nun ist $a\,dx = 2y\,dy$, daher $\frac{dx}{dy} = \frac{2y}{a}$; also die Subtangente $t = \frac{2yy}{a} = 2x$.

18. Die krumme Linie sey eine Ellipse, deren Gleichung ist $bb\,(2ax - xx) = aayy$. Die Differentialgleichung ist $bb\,(a-x)\,dx = aay\,dy$; daher $\frac{dx}{dy} = \frac{aay}{bb(a-x)}$, und die Subtangente $t = \frac{aayy}{bb\,(a-x)} = \frac{(2a-x)\,x}{a-x}$.

19. Die krumme Linie sey eine von der paraboliſchen Gattung, und ihre Gleichung, $y = a + bx + cx^2 + dx^3$. Die Differentialgleichung ist $dy = b\,dx + 2cx\,dx + 3dx^2\,dx$.

Daher $t = \frac{y}{b + 2cx + 3dx^2}$.

20. Die Gleichung für die krumme Linie sey

$$ay^3 - bxy^2 - cx^2y + dx^3 + exy = 0,$$

so ist die Differentialgleichung, wenn man zuerst bloß x, und darauf y veränderlich setzt, (Diff. Gleich. 4 u. 11.)

$$(-by^2 - 2cxy + 3dx^2 + ey)\,dx + (3ay^2 - 2bxy - cx^2 + ex)\,dy = 0$$

folglich $t = \frac{y\,(3ay^2 - 2bxy - cx^2 + ex)}{by^2 + 2cxy - 3dx^2 - ey}$.

21. Iſt die Gleichung die transſcendente: $y = a^x$, ſo wird aus der Differenzen-Gleichung die Differentialgleichung $\frac{dy}{dx} = y\,(b - \frac{1}{2}b^2 + \frac{1}{3}b^3 - \text{etc.})$ hergeleitet, indem für den Quotienten der endlichen Differenzen der

Differential-Quotient $\frac{dy}{dx}$ gesetzt, zugleich aber auch $v = x$ genommen wird. Zu vergl. Differ. Formeln §. 12.

Die Subtangente, $\frac{y\,dx}{dy}$, ist die Constante

$$\frac{1}{b - \frac{1}{2}b^2 + \frac{1}{3}b^3 - \text{etc.}}$$

22. Ist auf derselben Seite der Abscissenlinie mehr als eine stetige Folge von Ordinaten, wenn nämlich die Curve mehr als einen Zweig auf dieser Seite hat, so hat die Subtangente für Puncte der Curve, die auf den verschiedenen Zweigen zu einer gemeinschaftlichen Abscisse gehören, verschiedene Werthe. Sie kann daher nicht bloß von x eine Function seyn. Um die verschiedenen Werthe derselben zu bestimmen, verbinde man die Gleichung für den Differentialquotienten, $\frac{dx}{dy}$, als eine endliche veränderliche Größe, p, mit der Gleichung zwischen x und y, und leite daraus durch die Wegschaffung von y eine Gleichung zwischen dem Quotienten p und x her. Aus dieser Gleichung müssen sich alle Werthe des Quotienten p für irgend eine Abscisse ergeben, und daraus die Subtangenten zu dieser Abscisse. Ist die Gleichung eine algebraische, so muß ihr Grad wenigstens so groß seyn, als die Anzahl der möglichen Werthe, welche der zu einer und derselben Abscisse gehörige Differentialquotient haben kann.

23. Schneiden sich zwey oder mehrere Zweige der Curve in einem Puncte, so sind in diesem so viele berührende als Zweige, die ihn gemein haben. Die Formel für die Subtangente kann aber keine derselben angeben, weil die Werthe von y für diesen Punct nicht verschieden sind. Aber die Gleichung zwischen dem Differentialquotienten p und der Abscisse (22.) giebt alle Werthe von p eben so gut an, als wenn alle Ordinaten zu einer Abscisse verschieden sind.

24. Ein leichterer und auch in allgemeinerer Rücksicht merkwürdiger Weg die Subtangenten für den Durchschnittspunct zweyer oder mehrerer Zweige zu finden, ist folgender.

Es sey $\frac{dx}{dy} = \frac{Q}{P}$, wo P und Q Functionen von x und y sind. In diesen setze man $x + e$ für x und $y + f$ für y, und bezeichne diese Ausdrücke der Coordinaten durch x' und y', so daß $\frac{dx'}{dy'} = \frac{Q + \Delta Q}{P + \Delta P}$, wo P und Q dieselben Functionen von x und y wie vorher, ihre Differenzen ΔP und ΔQ aber zugleich von e und f sind. Für $x = a$, und $y = b$, werde sowohl P als Q Null, so ist $\frac{dx'}{dy'} = \frac{\Delta Q}{\Delta P}$. Je kleiner e und f genommen werden, desto näher kommt der Quotient $\frac{dx'}{dy'}$ dem $\frac{dx}{dy}$, und $\frac{\Delta Q}{\Delta P}$ dem $\frac{dQ}{dP}$. Daher ist für die Coordinaten a und b der Differentialquotient $\frac{dx}{dy} = \frac{dQ}{dP}$, wo $x = a$, und $y = b$ zu setzen ist. Dividirt man in $\frac{dQ}{dP}$ Zähler und Nenner durch dy, so enthalten sie den Differentialquotienten $\frac{dx}{dy}$ nebst beständigen Größen. Wird nun die Gleichung auf beiden Seiten durch $\frac{dP}{dy}$ multiplicirt, so entsteht eine quadratische für $\frac{dx}{dy}$. Hiebey wird vorausgesetzt, daß $\frac{dP}{dy}$ und $\frac{dQ}{dy}$ nicht zugleich Null sind, und daß der erstere Quotient nicht eine gegebene Größe sey; dann erhält

man zwey Werthe für $\frac{dx}{dy}$ und dadurch auch für die Subtangente an dem Doppelpuncte, wo sich zwey Zweige schneiden, und $x = a$; $y = b$ ist.

Wenn in ΔP und ΔQ alle Glieder sich heben, die e und f einfach enthalten, und nur die mit den Quadraten und höhern Potenzen nebst Producten von e und f bleiben, so wird die Gränze von $\frac{\Delta Q}{\Delta P}$ eine gebrochene Function, die das Quadrat von $\frac{dx}{dy}$ enthält. Ist dieses nicht bloß im Zähler, sondern auch im Nenner enthalten, so entsteht aus der Gleichung $\frac{dx}{dy} = \frac{dQ}{dP}$ eine cubische für $\frac{dx}{dy}$, also für den Fall, da drey Zweige sich in einem Puncte schneiden. Wenn in $\frac{\Delta Q}{\Delta P}$ auch e^2, f^2 und ef wegfallen, so entsteht eine Gleichung vom vierten Grade für $\frac{dx}{dy}$ in dem Falle, daß vier Zweige sich in einem Puncte schneiden. Auf ähnliche Art bey noch größerer Anzahl gleicher Ordinaten an einem Puncte.

25. Exempel I. Die Gleichung sey

$$x^3 + xy^2 - 5x^2 + 3x - 4y + 5 = 0,$$

welche für $x = +1$ diese wird: $y^2 - 4y + 4 = 0$, oder $(y-2)^2 = 0$, so daß beide Werthe von $y = +2$ sind. Die krumme Linie ist Fig. 37. Tab. III. abgebildet. Sie schneidet die Abscissenlinie AX in drey Puncten B, C, D, für welche die Abscissen AB, AC, AD die Wurzeln der cubischen Gleichung, $x^3 - 5x^2 + 3x + 5 = 0$ sind, und erstreckt sich mit zwey unendlichen Schenkeln, MU, DU, längs der Asymptote AU, die durch den Anfang der Abscissen A geht. Sie hat in Beziehung auf die Abscissenlinie zwey Zweige, die sich in M schneiden, für welchen Punct die Abscisse $AP = +1$, und die Or-

dinate PM = + 2 ist. Hier sind zwey berührende TMt und T'Mt', deren Lage zu bestimmen ist. Für einen unbestimmten Punct der Curve ist

$$\frac{dx}{dy} = \frac{4 - 2 \cdot y}{3x^2 + y^2 - 10x + 3}.$$

Für den Punct M, an dem x = + 1, und y + 2 ist, sind Zähler und Nenner Null. Da $dQ = -2x\,dy - 2y\,dx$, und $dP = 6x\,dx + 2y\,dy - 10\,dx$; so ist für x = + 1 und y = + 2;

$$dQ = -2dy - 4dx = -2\left(1 + \frac{2dx}{dy}\right)dy,$$

$$dP = +4dy - 4dx = 4\left(1 - \frac{dx}{dy}\right)dy.$$

Folglich ist

$$\frac{dx}{dy} = -\left(1 + \frac{2dx}{dy}\right) : 2\left(1 - \frac{dx}{dy}\right).$$

Daraus wird erhalten

$$\left(\frac{dx}{dy}\right)^2 - \frac{2dx}{dy} - \frac{1}{2} = 0,$$

und daher $\frac{dx}{dy} = 1 \pm \sqrt{\frac{3}{2}}$.

Die Subtangenten sind $PT = 2 + 2\sqrt{\frac{3}{2}}$; und $PT' = 2 - 2\sqrt{\frac{3}{2}}$. Die negative hat die Richtung der positiven Abscisse AP, zufolge (14.).

26. Exempel. II. Die Gleichung für eine krumme Linie sey

$$x^3 + xy^2 - 2x^2 - 2y + 2 = 0,$$

so ist

$$\frac{dx}{dy} = \frac{2 - 2xy}{3x^2 - 4x + y^2}.$$

Für x = + 1 wird yy − 2y + 1 = 0, so daß y zwey gleiche Werthe, + 1 hat. Für diese wird der Zähler und Nenner des Quotienten $\frac{dx}{dy}$ Null. Es ist

$lQ = -2ydx - 2xdy$, und $dP = 6xdx - 4dx + 2ydy$, alſo für $x = +1$, und $y = +1$,

$$dQ = -2dx - 2dy = -2\left(\frac{dx}{dy} + 1\right)dy,$$

$$dP = 2dx + 2dy = 2\left(\frac{dx}{dy} + 1\right)dy.$$

Demnach iſt $\frac{dx}{dy} = -1$, und die Subtangente $\frac{ydx}{dy} = -1$. Dieſer einfache Werth zeigt an, daß die krumme Linie für die Coordinaten, $x = +1$, und $y = +1$ eine Spitze hat, in welcher zwey Zweige an einer gemeinſchaftlichen Berührungslinie zuſammen kommen. Sie iſt in Fig. 38. Tab. III. abgebildet. Sie erſtreckt ſich mit zwey unendlichen Schenkeln MU, BU an der Aſymptote AU hin, und ihre beiden Zweige vereinigen ſich in M, ohne ſich zu ſchneiden. Die Subtangente iſt PT, negativ, und hat daher von P aus mit den poſitiven Abſciſſen dieſelbe Richtung.

Lage der Berührenden für Ordinaten aus einem Puncte.

27. Es iſt BMR (Fig. 39. Tab. III.) eine krumme Linie, in deren Ebene ein beſtimmter Punct C, von dem an die krumme Linie gerade wie CM gezogen werden. Jeder Punct M der Curve wird durch die Länge von CM und ihren Winkel mit einer fixen durch A gelegten geraden AC beſtimmt. Es wird eine allgemeine Formel für die Lage der berührenden TMt gegen CM geſucht, vermittelſt welcher der Winkel CMT aus der Gleichung zwiſchen CM und dem Winkel ACM hergeleitet werden könne.

Man ziehe noch eine Ordinate CN, welche die berührende in t ſchneide, und beſchreibe mit CM als Halbmeſſer den Bogen Mm innerhalb des Winkels MCN. Der veränderliche Radius der Curve CM ſey y, und $CN = y + \Delta y$;

der Winkel $ACM = \varphi$, und $ACN = \Delta\varphi$. Ein Winkel ist bey der Vergleichung mit Linien ein Kreisbogen, dessen Halbmesser die linearische Einheit ist. Die berührende ist auch hier die gerade, an welcher das Gränzverhältniß der Veränderungen der Coordinaten, nämlich tm und MCt gleich ist dem Gränzverhältniß der Veränderungen Nn und MCN an der Curve. Man ziehe noch die senkrechte CP auf die berührende, so ist $\cos MCt = \frac{CP}{CM}$, und $\cos tCP = \frac{CP}{Ct}$, daher

$\cos MCP - \cos tCP = \frac{CP(Ct - CM)}{CM.Ct}$; das ist (Goniometrie, 28.),

$2 \sin \frac{1}{2}(MCP + tCP) . \sin \frac{1}{2} MCt =$

$\frac{CP(Ct - CM)}{CM.Ct}$, und $\frac{Ct - CM}{Mct} =$

$\frac{CM.Ct}{CP} \cdot \frac{2 \sin \frac{1}{2} Mct}{Mct} \cdot \sin \frac{1}{2}(MCP + tCP)$.

Die Gränze dieses Werthes ist $\frac{CM^2 \sin MCP}{CMP}$, oder, weil $CP = MC . \cos MCP$ ist, diese, $\frac{CM . \sin MCP}{\cos MCP}$, oder $\frac{CM}{\tang CMP}$. Diese Gränze ist auch die von dem Quotienten $\frac{\Delta y}{\Delta \varphi}$. Da diese durch $\frac{dy}{\varphi d}$ bezeichnet wird, so ist $\frac{dy}{d\varphi} = \frac{y}{\tang CMP}$, also ist $\tang CMP = \frac{y d\varphi}{dy}$.

Das Differentialverhältniß von tm zu MCt kann man etwas kürzer durch die Differentialrechnung erhalten. Es ist $CM = CP . \sec MCP$, und das Differential von

$CM = CP.\ d\ \text{sec.}\ MCP = CP.\ \text{sec.}\ MCP.\ \text{tang}\ MCP.\ dMCP = CM.\ \text{tang}\ MCP.\ dMCP$

$= \frac{CM}{\text{tang}\, CMP}\ dMCP.$ (s. Differentialformeln.)

28. Exempel. Es ist AMR (Fig. 40. Tab. III.) eine Parabel, deren Axe AX, Brennpunct F. Die Ordinate aus dem Puncte F ist $FM = y$, der Winkel $AFM = \varphi$, der Parameter $= a = 4AF$. Die Gleichung zwischen y und φ ist

$$\tfrac{1}{2}a = (1 + \cos\varphi)\, y,$$

wo $\cos\varphi$ für einen stumpfen Winkel negativ ist.

Es ist $dy = \frac{a \sin\varphi\, d\varphi}{2(1+\cos\varphi)^2} = \frac{y \sin\varphi\, d\varphi}{1+\cos\varphi}$;

also $\frac{y\, d\varphi}{dy} = \frac{1+\cos\varphi}{\sin\varphi} = \cot\tfrac{1}{2}\varphi.$

Die berührende in M sey TMt, so ist $\text{tang}\ FMT = \cot\frac{1}{2}\varphi$; also $FMT = 90° - \frac{1}{2}\varphi$.

Man ziehe MQ parallel mit AX, so ist $FMQ = \varphi$. Ferner sey MN senkrecht auf TMT, so ist $FMN = \frac{1}{2}\varphi$, also $NMQ = NMF$, und $QMt = FMT$. Wenn AMR die von F an sie gezogenen Linien nach dem Gesetze der Zurückstrahlung für das Licht zurück sendet, so sind die zurückgeworfenen der Axe parallel, und die mit der Axe parallelen Linien werden nach dem Brennpunct hin gebogen.

Daher ist der Winkel MTF der berührenden mit der Axe gleich dem FMT, weil jener $= QMt$ ist. Folglich ist $FT = FM$. Auch ist $FN = FM$, weil $FNM = NMQ = NMF$. Also $FN = FT$.

29. Exempel. Es ist AMB (Fig. 41.) eine halbe Ellipse, AB die große Axe, C der Mittelpunct, F, G sind die Brennpunete, man sucht die Winkel der Linien FM, GM mit der berührenden TMt.

Es sey $AC = a$, $CF = CG = e$, und $aa - ee = bb$, dem Quadrat der halben kleinen Axe; $FM = y$;

$AFM = \varphi$, so ist $y = \frac{bb}{a - e\cos\varphi}$. Daraus $dy = -\frac{bbe\sin\varphi . d\varphi}{(a-e\cos\varphi)^2}$ negativ, weil y abnimmt, wenn φ wächst. Also ist tang $TMF = \frac{y\,d\varphi}{dy}$ $= -\frac{a-e\cos\varphi}{e\sin\varphi}$, wo die Negation einen stumpfen Winkel anzeigt. Oder es ist tang $tMF = \frac{a-e\cos\varphi}{e\sin\varphi}$.

Die Linie aus dem andern Brennpuncte, GM, sey $= z$, und $AGM = \omega$, so ist $z = \frac{bb}{a+e\cos\omega}$, und tang $TMG = \frac{a+e\cos\omega}{e\sin\omega}$.

Setzt man für die Zähler ihre Werthe durch y und z, so ist tang $tMF = \frac{bb}{ey\sin\varphi}$;

und tang $TMG = \frac{bb}{ez\sin\omega}$. Da $y : z = \sin\omega : \sin\varphi$, oder $y\sin\varphi = z.\sin\omega$, so sind beide Tangenten einander gleich, und die gleichnamigen Winkel der Linien aus den Brennpuncten mit der berührenden sind gleich groß.

30. Exempel. Es sey $\frac{y\,d\varphi}{dy} = a$, einer unveränderlichen Größe, so ist $d\varphi = \frac{a\,dy}{y}$,

daher $\varphi = a$ lognat $\frac{y}{c}$, wo c eine willkührliche Größe ist. Die Linie ist die logarithmische Spirale.

Berührende krumme Linien.

31. Eine krumme Linie berührt eine andere, wenn sie in einem gemeinschaftlichen Puncte dieselbe gerade berührende haben.

32. Einen Kreis zu ziehen, der eine krumme Linie AMR (Fig. 42. T. III.) in dem Puncte M berührt, ziehe man zuerst die berührende TMt mittelst der Subtangente PT, und auf diese die senkrechte NMn. Auf dieser nehme man irgend einen Punct C, (auf der einen oder der andern Seite von TMt,) und beschreibe aus diesem als Mittelpunct durch M einen Kreis, so berührt dieser die krumme Linie. Liegt der Kreis auf derselben Seite der berührenden geraden mit der krummen Linie, so geht er entweder zwischen der geraden berührenden und der krummen Linie durch, oder die krumme Linie liegt zwischen der geraden berührenden und dem Kreise, wie es in der Figur der Fall ist, oder der Halbmesser des Kreises hat eine solche Größe, daß der damit beschriebene Kreis den Uebergang von den Kreisen in der einen Lage zu denen in der andern macht. Diese ausgezeichnete Größe des Halbmessers findet sich bey dem osculirenden Kreise oder Krümmungskreise.

33. Aus der Gleichung für eine krumme Linie werde die endliche Differenz zweyer Ordinaten, Δy, durch die zugehörige Differenz der Abscissen, Δx, mittelst des Taylorschen Lehrsatzes dargestellt, nämlich

$$\Delta y = \frac{dy}{dx}\Delta x + \frac{d^2y}{1.2\,dx^2}\Delta x^2 + \frac{d^3y}{1.2.3\,dx^3}\Delta x^3 +$$

etc.

Die Differentialquotienten sollen immer veränderlich bleiben, so daß die Reihe nirgends abbricht. Ueber derselben Abscissenlinie, und mit demselben Anfangspuncte der Abscissen, sey eine andere krumme Linie verzeichnet, an welcher die Differentialquotienten eine endliche Reihe ausmachen. Die Ordinaten an dieser seyn z, zu der mit jener erstern Linie gemeinschaftlichen Abscisse x, und

$z = \text{Const} + ax + bx^2 + cx^3 + dx^4 + \text{etc.}$ mit einer endlichen Anzahl Glieder. Für $x = h$, und $y = k$ sey $z = y = k$, und die Const. werde dieser Annahme gemäß bestimmt, damit beide Linien eine gemeinschaftliche Ordinate für $x = h$ erhalten.

Wenn $\frac{dz}{dx} = \frac{dy}{dx}$; $\frac{d^2z}{dx^2} = \frac{d^2y}{dx^2}$; $\frac{d^3z}{dx^3} = \frac{d^3y}{dx^3}$; u. s. f. so berührt die paraboliſche Linie die gegebene in dem Endpuncte der Ordinate k, und die Berührung iſt deſto inniger, je mehr Glieder in der Reihe für z genommen ſind.

34. Es ſey zuerſt $z = C + ax + bx^2$, welches eine Gleichung für eine Parabel iſt, ſo iſt $\frac{dz}{dx} = a + 2bx$, und $\frac{d^2z}{dx^2} = 2b$, alſo nach dem Taylorſchen Lehrſatze, $\Delta z = (a + 2bx)\Delta x + b\Delta x^2$, wie man es auch durch die Differenzenrechnung findet. Setzt man die beiden Glieder dieſes Werthes von Δz den beiden erſten in dem Werthe von Δy gleich, ſo ſind dadurch die Werthe von a und b beſtimmt, da x einen gegebenen Werth h hat. Setzt man nämlich der Abkürzung wegen,

$\Delta y = \alpha\Delta x + \beta\Delta x^2 + \gamma\Delta x^3 + \delta\Delta x^4 + \text{etc.}$

ſo iſt $a + 2bh = \alpha$, und $b = \beta$, alſo $a = \alpha - 2\beta h$, und $z + \Delta z$ iſt von $y + \Delta y$ nur durch die Glieder verſchieden, welche die dritte Potenz und höhere von Δx enthalten, ſo daß der Unterſchied gegen Δz oder Δy in einem viel ſtärkern Verhältniſſe abnimmt, als nach welchem die Differenzen Δx kleiner gemacht werden. Die paraboliſche Linie entfernt ſich von der gegebenen Curve weniger als die gerade berührende an dem gemeinſchaftlichen Puncte beider. Für die gerade berührende ſey die Gleichung $t = C + (a + 2bh)x$, und $C = k - (a + 2bh)h$, ſo iſt $\Delta t = (a + 2bh)\Delta x$, welches mit Δy nur in dem erſten Gliede der Reihe übereinkommt. Die jetzt beſtimmte paraboliſche Linie nähert ſich auch der Curve mehr als jede andere ihrer Gattung, welche die Curve in demſelben

Puncte wie jene berührt. Denn für die letztere sey die Gleichung $\Delta z' = \text{Const} + mx + nx^2$, wo z' ihre Ordinate bedeutet, ferner $m + 2n = \alpha$, aber nicht $n = \beta$, so berührt sie zwar die gegebene Curve, weil sie eine gemeinschaftliche berührende mit ihr hat, die Differenz $\Delta z'$ weicht aber in dem zweyten Gliede ihres Werthes von dem Werthe Δy ab.

35. Es sey $z = \text{Const.} + ax + bx^2 + cx^3$, so ist $\Delta z = (a + 2bx + 3cx^2)\Delta x + (b + 3cx)\Delta x^2 + c\Delta x^3$, wie man es sowohl durch die Differentialrechnung aus dem Taylorschen Lehrsatze, als durch die Differenzenrechnung findet. Nun sey $a + 2bh + 3ch^2 = \alpha$; $b + 3ch = \beta$; $c = \gamma$, so ist für $x = h$ die Ordinate z an der paraboliſchen Linie von der Ordinate y an der gegebenen Curve nur in denen Gliedern verschieden, welche Δx^4 und höhere Potenzen von Δx enthalten. Die Abweichung nimmt daher bey Verminderung der Differenz Δx sehr ab. Die paraboliſche Linie berührt die Curve genauer als die von der ersten Gattung es thut.

36. Auf diese Art kann man paraboliſche Linien höheren Grades finden, welche die gegebene Curve noch vollkommener berühren. Wenn die paraboliſche Linie des ersten Grades zwiſchen der Curve und der geraden berührenden durchgeht, so geht die paraboliſche des zweyten Grades zwiſchen jener und der Curve hin, die vom dritten Grade zwiſchen der vom zweyten und der Curve. u. ſ. f.

37. Man darf daher für einen Bogen irgend einer krummen Linie den Bogen einer paraboliſchen setzen, wenn man sich nur wegen der Gränze der Fehler versichern kann. Denn aus der Gleichung zwiſchen den Coordinaten ergiebt sich der Differentialquotient $\frac{dy}{dx}$, und daraus die folgenden; aus diesen die Größen α, β, γ, etc. und daraus a, b, c, etc. nebst der Conſtans. Auch ohne die endliche Gleichung für die Curve zu haben, genügt es an dem ersten Differentialquotienten, wenn nur die Ordinate h

für die Abscisse h bekannt ist. Allein man muß wohl bemerken, daß zwey Linien, ungeachtet einer sehr genauen Berührung in einem Puncte, sich doch beträchtlich von einander entfernen können. Man darf ohne Einschränkung eine osculirende parabolische Linie so wenig als einen osculirenden Kreis für eine andere krumme Linie setzen. Der Unterschied zwischen Δz und Δy nimmt in einem viel stärkern Verhältnisse zu, als in welchem Δx wächst. Verändert man den Werth der Abscisse k, die zu einem Berührungspuncte gehört, so erhält man eine andere osculirende Linie, weil die Werthe von α, β, γ, etc. nebst der Ordinate k sich ändern, und die Const. erhält auch einen andern Werth. Dazu kömmt, daß, wenn die Reihe der Differentialquotienten nicht abbricht, die Reihe für Δy nur durch kleine Werthe von Δx in Beziehung auf die linearische Einheit convergirend gemacht werden mag.

38. Die paraboliſchen Linien haben als osculirende oder annähernde Linien vor dem Krümmungskreise den Vorzug, daß sie sich jedem Laufe einer andern Linie durch die Änderung ihrer Krümmung gleichsam mehr anschmiegen als ein Kreis, dessen Krümmung unveränderlich ist, und daß man nach Beschaffenheit der Umstände sie von einem höhern oder niedrigern Grade nehmen kann. Auch ist es bequem, daß sie dieselben Abscissen mit der aufgegebenen Curve behalten, und daß beider Ordinaten parallel sind. Aber sie bleiben immer nur berührende Linien.

39. In einer Untersuchung über das ballistische Problem (Mathem. Abhandlungen, Potsdam 1797) ist eine osculirende parabolische Linie an dem Wurfspuncte der Trajectorie in einem widerstehenden Mittel für diese selbst genommen. Daß die berührende von dieser bey einem beträchtlichen Bogen sehr abweichen werde, ist begreiflich.

Normale und Subnormale.

40 Wegen des Zusammenhanges mit der Untersuchung finde hier auch die Bestimmung der Normale und

Subnormale an irgend einem Puncte einer krummen Linie ihre Stelle.

41. Die Normale ist die auf die berührende in dem Berührungspuncte gezogene senkrechte. In Fig. 40. ist es die Linie MN. Die Subnormale ist das Stück der Abscissenlinie PN zwischen der Ordinate und Normale.

42. Bey rechtwinklichten Coordinaten ist, wenn TP die Subtangente ist, TP : PM = PM : PN. Da $TP = \frac{y\,dx}{dy}$, so ist die Subnormale $PN = \frac{y\,dy}{dx}$.

43. Exempel I. Es sey AMR (Fig. 40.) eine Parabel, so ist $ax = yy$, also $\frac{1}{2}\,a\,dx = y\,dy$, und $PN = \frac{1}{2}a$.

44. Exempel II. Es ist AMB (Fig. 41.) eine halbe Ellipse, die halbe große Axe AC = a, die halbe kleine CD = b; AP = x; PM = y, so ist $bb\,(2ax - xx) = aayy$. Daraus ist $bb\,(a-x)\,dx = aay\,dy$, also ist $PN = \frac{bb}{aa}(a-x)$, und $AC^2 : CD^2 = CP : GN$.

Die Normale an der Ellipse halbirt den Winkel FMG der aus den Brennpuncten nach M gezogenen Linien, wegen (29.).

45. Exempel III. An der Hyperbel ist, bey gleichförmigen Bedeutungen der Buchstaben, $bb\,(2ax + xx) = aayy$, also die Subnormale $= \frac{bb}{aa}\,(a + x)$.

Geschichte der Methoden Berührende zu ziehen.

46. Die alten Geometer bestimmten die Lage der berührenden bloß durch Hülfe der Geometrie. Als man im 17ten Jahrhundert die Rechnung mit der Geometrie zu verbinden anfieng, war man sehr angelegentlich auf Methoden bedacht, die berührenden durch allgemeine analytis

sche Regeln zu bestimmen. Descartes giebt in seiner Geometrie, 2ten B. ein Verfahren an, Normalen an eine jede krumme Linie zu ziehen, für welche eine algebraische Gleichung vorhanden ist, und sagt davon, daß diese Aufgabe unter allen, die er kenne, die nützlichste und allgemeinste sey, ja auch, daß ihm in der ganzen Geometrie die Auflösung derselben das liebste wäre. Es ist freylich noch etwas unbequem, allein als einer der ersten Versuche in dieser Art merkwürdig. Aus einem Puncte der Abscissenlinie als Mittelpunct werde ein Kreis beschrieben, der die Curve in zwey oder mehrern Puncten schneide. Man verbinde die allgemeine Gleichung zwischen dem Halbmesser dieses Kreises, dem Abstand seines Mittelpunctes von dem Anfange der Abscissen (v) und den Coordinaten der Curve mit der besondern Gleichung für diese, und suche denjenigen Werth von v, für welchen zwey Durchschnittspuncte zusammenfallen. Durch diesen Werth wird der Kreis ein berührender, und der Halbmesser in dem Berührungspuncte die Normale an demselben. Descartes bestimmt durch die Methode der Indeterminirten die Form der Coefficienten, wodurch die Gleichung für v zwey gleiche Wurzeln erhält. Einen bequemern Weg, die berührende zu ziehen, worauf er durch Fermats Methode geleitet war, zeigt er an einem Beyspiele in einem seiner Briefe (Epist. T. III. p. 175.). Aus der Gleichung für eine Curve leitet er eine Gleichung zwischen dem Abstande zweyer Ordinaten und der zu einer derselben gehörigen Subsecante her, und setzt in dieser den Abstand der Ordinate Null, so verwandelt sich die Subsecante in die Subtangente. — In Wolfs Analysis Finit. §. 410, 440, 491. sind Beyspiele der erstern Methode an den drey Kegelschnitten anzutreffen.

47. Die eben erwähnte Methode von Fermat ist sinnreich, und dadurch merkwürdig, daß sie die erste Anwendung der Methode der Gränzen ist. Fermat hatte diese schon zur Bestimmung der größten oder kleinsten Werthe einer Function gebraucht, und zeigte an der Para-

bel, wie sie auch die berührende zu finden diene. Er hat nie eine Erklarung, noch einen allgemeinen Beweis dieser Methode mitgetheilt, sondern begnügte sich sie in besondern Anwendungen zu zeigen. Dies verleitete Descartes zu einem Mißverständnisse, daß er glaubte, eine berührende sollte die größte unter allen Linien seyn, die von einem Puncte an die convexe Seite einer Curve gezogen werden können. Als er nach dieser Voraussetzung die berührende an einen Kreis aus einem gegebenen Puncte ziehen wollte, mußte er etwas widersprechendes finden. Auch übereilte er sich sehr, wie er das Verfahren, welches Fermat bey der Parabel gebraucht hatte, auf andere Linien anwenden wollte. Aus Eifersucht gegen Fermat suchte er dessen Methoden fehlerhaft zu finden, und begieng dadurch selbst Mißgriffe. Von dem Streite, der hierüber zwischen Descartes und Fermats Verehrern entstand, sehe man die Briefe des erstern, 47 bis 54, in der latein. Ausgabe; die Preißschrift von Genty über Fermat, und die Geschichte der Mathematik von Montucla, Th. 2. S. 138 ff. der 2ten Ausg Der letztere hat aber den Geist der Fermatschen Methode nicht recht gefaßt. Die Methode der Tangenten hängt nach Fermat gar nicht von der Methode zur Bestimmung der Größten und Kleinsten ab, sondern beide sind Anwendungen eines allgemeinen Verfahrens, die Gränze eines Verhältnisses zur Bestimmung der Relation gewisser Größen zu gebrauchen.

48. Fermats Methode berührende zu ziehen verdient, wegen der Verwandtschaft mit der Methode durch die Differentialrechnung, hier gezeigt zu werden. Es soll dies aber an einem Beyspiele geschehen, welches etwas schwerer ist als das von Fermat genommene, und wobey Descartes selbst den Sinn der Methode verfehlte. In Fermats Werken, die nach seinem Tode herausgegeben sind, ist sein Verfahren für berührende nirgends bestimmt erklärt, und auch nicht bewiesen.

Es sey AMR (Fig. 13. Tab. III.) eine krumme Linie, welche in M von der geraden TMR berührt werde.

Die Abscissenlinie sey AX, welche von MT in T geschnitten wird. Zu dem Puncte M gehören die Coordinaten AP, PM, zu einem andern Puncte N die Coordinaten AQ, QN. Die verlängerte QN treffe die berührende TM in R. Man setze $AP = x$; $PM = y$; $AQ = x + e$; $QN = z$; $TP = t$. Nun ist $t : t + e = y : QR$, aber that zu $t + e$ ein kleineres Verhältniß als y zu z, oder $\frac{t}{t+e} < \frac{y}{z}$. Diese Formel der Ungleichheit nähert sich immer mehr und ohne Ende einer Formel der Gleichheit, da QR und QN sich einander immer näher kommen, je kleiner der Abstand PQ zwischen den beiden Ordinaten wird, und, indem QN in MQ fällt, das Verhältniß beider das der Gleichheit wird. Ist nun y oder eine Potenz derselben eine gesonderte Function von x, damit z durch x und e ausgedruckt werden könne, so geht die Ungleichheit in Gleichheit über, wenn $e = o$ genommen wird, ohne daß darum die Gleichung identisch würde. Dieses wird ein Beyspiel deutlich machen.

Die krumme Linie sey eine Ellipse, für welche die Gleichung ist: $aayy = bb\,(2ax - xx)$. Für die Coordinaten $x + e$ und z ist sie: $aazz = bb\,(2a(x+e) - (x+e)^2)$. Daher ist

$$\frac{t^2}{(t+e)^2} < \frac{2ax - xx}{2a(x+e) - (x+e)^2}.$$

Mylkiplicirt man auf beiden Seiten mit dem Product der beiden Nenner, so ist nach gehöriger Reduction, durch Aufhebung der gleichen Glieder, und Division durch e,

$$t^2\,(2a - 2x - e) < (2t + e)\,(2ax - xx).$$

Wenn e verschwindet, so bleibt

$$t^2\,(a - x) = t\,(2ax - xx),$$

so daß $t = \frac{2ax - xx}{a - x}$.

49. Hudde erleichterte die erste Methode des Descartes durch die Regel, welche er fand, um einer Glei-

dung zwey oder mehr gleiche Wurzeln zu geben. S Huddenii epist. I. de reductione aequationum, in accession. ad Cartelii Geom. p. 436.

50. Hugens ward durch die von Fermat nur angedeutete Regel veranlaßt, ihr eine bequemere Form zu geben. Diese ist vollkommen diejenige, welche durch die Differentialrechnung gefunden wird. Statt der Bezeichnungen dx und dy hat er e und $\frac{ey}{z}$, wo z die Subtangente bedeutet. In der Gleichung zwischen x und y setzt er $x + e$ für x, und $y + \frac{ey}{z}$ für y, und läßt das Quadrat nebst den höhern Potenzen der Differenzen weg. Er erweiset seine Regel an einem Beyspiele, so daß man die Allgemeinheit derselben daraus einsieht. Seine Regel ist folgendergestalt ausgedruckt: Nachdem alle Termini der vorgegebenen Gleichung auf eine Seite gebracht sind, multiplicire man alle diejenigen, welche y enthalten, durch die Anzahl der Dimensionen von y, und dieses giebt den Dividendus. Darauf multiplicire man alle Terminos, die x enthalten, ebenfalls mit der Anzahl der Dimensionen von x in jedem, und dividire jeden derselben durch x selbst; dieses ist der Divisor zu jenem Dividendus. Der Quotient ist die Linie z, wodurch er die Subtangente bezeichnet. Hugenii Opera varia Vol. 1. pag. 495. Der Aufsatz ist zuerst in den Divers ouvrages de Mathem. et de Phys. par Mrs. de l' Acad. R. 1693 erschienen. Hugens sagt, daß Hudde und de Slüse ihm eine mit der seinigen übereinstimmende Regel mitgetheilt hätten; er wisse aber nicht, auf welchem Wege sie von ihnen gefunden sey. Die Regel, wie de Slüse sie vorgetragen hat, steht in den Philosoph. Transactionen vom J. 1672 und 1673. Hugens wird die Regel vor dieser Zeit schon gefunden haben, ob er gleich den Beweis viel später erst bekannt gemacht hat.

51. Barrow beschäftigt sich viel mit der Bestimmung der berührenden, in seinen Lection. geom. VIII.

IX. X. Seine wirklich künſtlichen Methoden ſind ganz in Vergeſſenheit gerathen, ſo daß auch Montucla davon nichts weiter anführt als die Regel, welche Barrow zuletzt giebt. Barrow zeigt, wie man aus der berührenden an einer Curve die berührende an einer andern Curve, die aus jener auf gewiſſe Art beſtimmt wird, finden könne, theils in einem Durchſchnittspuncte mit jener, theils in andern Puncten; nicht allein bey parallelen Ordinaten, ſondern auch bey ſolchen, die aus einem Puncte gezogen ſind. Nun mag man für die erſtere Curve einen Kreis nehmen, oder für ſie eine gerade ſetzen. Will man alſo an eine gegebene Curve berührende ziehen, ſo muß man zuerſt eine Relation derſelben zu einer geraden Linie, zum Kreiſe oder einer Curve, deren berührende ſich ziehen laſſen, ſuchen, und zwar eine ſolche, dergleichen Barrow zum Grunde gelegt hat. Das Verfahren erfordert, wie in der ältern Geometrie gewöhnlich iſt, in jedem Falle beſondere Veranſtaltungen. Am Ende (pag. 80.) giebt Barrow eine allgemeine Regel, bey parallelen Ordinaten eine berührende in jedem Puncte zu ziehen. Sie iſt ganz die in (13*) vorgetragene. Er leitet ſie aus dem Verhältniſſe Mm : Nm in dem als unendlich klein betrachteten Dreyeck Mm N (Fig. 34. Tab. II.) her. Er bezeichnet die beyden Glieder des Verhältniſſes durch e und a. Die Größen P, Q in der Formel $Pdx = Qdy$ (13*.) beſtimmt er eben ſo wie es durch die Differentialrechnung geſchieht, und vertauſcht e und a (d. i. dx und dy) mit t und y.

52. Die Methoden dieſer Geometer finden bey irrationalen Größen in der Gleichung für eine Curve Schwierigkeit, noch mehr, wenn die Relation der Coordinaten Bogen oder Flächenräume einer andern krummen Linie in ſich ſchließt, wiewohl doch Barrow ſchon gewiſſe Fälle dieſer Art aufgelöſet hat. Newton aber war durch ſeine Fluxionen-Rechnung im Stande, bey allen Arten von Gleichungen für krumme Linien berührende zu ziehen. Dieſes zeigt er in dem Tractat: Methodus Fluxionum et ſerierum infinitarum, in neun verſchiedenen Fällen, und fügt noch

geben hieher gehörige Aufgaben, aber ohne Auflösung, hinzu, z. B. den Punct zu finden, wo die berührende einen gegebenen Winkel mit der Abscissenlinie macht; wo sie gegen diese am meisten oder am wenigsten geneigt ist; eine krumme Linie nach einem gewissen Gesetze zu beschreiben, die eine andere der Lage nach gegebene in einem gegebenen Puncte berührt. Wenn man diese Untersuchungen in Newtons Schrift durchgeht, so vergleiche man damit die von Barrow gegebenen Auflösungen, wo transscendente Functionen vorkommen.

Newton hat schon im J. 1665 seine neue Rechnungs-Methode auf die Aufgabe von den berührenden angewandt. Da er die krummen Linien durch Zusammensetzung von Bewegungen entstehen ließ, so gab die Richtung des beschreibenden Punctes ihm die berührende in jedem Puncte des Weges. Z. B. wenn in Fig. 34. der Punct M der Ordinate PM auf derselben in der Richtung PM sich bewegt, indem zugleich die Ordinate sich parallel von P nach Q fortrückt, und der Punct auf der Ordinate den Weg mN beschrieben hat, nachdem PM in QN gerückt ist, so würde die gerade MN die Richtung der zusammengesetzten Bewegung seyn, wenn beyde Bewegungen nach mN und PQ gleichförmig wären. Sind sie dieses nicht, so ist der Weg des beschreibenden Punctes eine krumme Linie; das Verhältniß der Geschwindigkeiten nach PQ und PM in dem Puncte M ist das Gränzverhältniß der Linien Mm, mN, und die Richtung ist die Linie TM in dem Dreyecke TPM, worin TP : PM jenes Gränzverhältniß ist.

53. Früher schon hat Roberval die Lage der berührenden aus der Zusammensetzung zweyer Bewegungen hergeleitet. Er bemerkte, daß die berührende nichts anders als die Richtung des sie beschreibenden beweglichen Punctes ist, wiewohl er hievon keinen deutlichen und einleuchtenden Beweis giebt. Er konnte seinen Grundsatz aber nur in besondern Fällen anwenden. Denn dazu ist es nöthig, das Verhältniß der Geschwindigkeiten für die par-

tiellen oder relativen Bewegungen zu entwickeln. Wo eine krumme Linie keine Eigenschaft zeigte, woraus dieses Verhältniß unmittelbar hergeleitet werden konnte, war die Methode in seinen Händen unzulänglich. Der leichteste Fall ist bey den Kegelschnitten. Auf der Ellipse hat der beschreibende Punct zwey gleiche relative Geschwindigkeiten, wodurch er sich dem einen Brennpuncte nähert und von dem andern sich entfernt. Die berührende halbirt also den Winkel beyder Richtungen. Auf der Hyperbel sind die relativen Geschwindigkeiten in Absicht auf die Brennpuncte gleich, und beyde entfernend oder nähernd. Daher halbirt die berührende ebenfalls den Winkel der beyden Richtungen, und geht zwischen den Brennpunkten durch.

54. Als Leibnitz seine Differentialrechnung in den Actis Erud. 1684 bekannt machte, zeigte er die vortheilhafte Anwendung derselben zur Bestimmung der berührenden in ein paar Beyspielen, die für die bis dahin bekannten Methoden zu schwer gewesen wären. Es sind darin irrationale Ausdrücke und Bruchgrößen gehäuft. Er bemerkt, daß seine Methode sich auch auf transscendente Linien erstreckt. An den ältern Methoden tadelt er, daß sie nur die Differenz einer einzigen veränderlichen Größe, und nicht zugleich die Differenzen der damit verbundenen Grössen gebrauchen, daher es nach denselben nöthig ist, Brüche und Irrationalgrößen wegzuschaffen.

Leibniz möchte immer die Methode berührende zu ziehen von Barrow gelernt haben, und es bliebe doch seine Erweiterung derselben durch die von ihm erfundene Differentialrechnung eine wichtige Verbesserung, worauf so große Geometer, wie Barrow und Hungens nicht gekommen sind, da sie sich ganz an geometrische Methoden hielten. Allein Leibnitz hat hier alles oder das meiste aus sich selbst genommen. In dem Aufsatze de Geometria recondita, cet. A. E. 1686. erzählt er, wie er schon in den ersten Zeiten seines mathematischen Studium auf die Betrachtung des von ihm sehr treffend genannten charakteristischen Dreyecks gekommen sey, das ist, des Dreyecks von den

verschwindenden Differenzen der Coordinaten und des Bogens einer krummen Linie, woraus er sehr viele Lehrsätze hergeleitet, die er hernach bey den beiden Gregory's und Barrow gefunden habe. Da die Anwendung der algebraischen Rechnung ihn nicht befriedigt habe, sey er auf seine Analysis Indivisibilium et infinitorum gerathen. Jakob Bernoulli äußerte in seinem Aufsatze, specimen calc. diff. in dimensione Parabolae helicoidis, A. Er 1691. daß wer die Barrowische Rechnung gefaßt hätte, die von Leibnitz gefundene nicht verfehlen könnte, als welche auf jene ganz gegründet sey, und etwa nur in der Notation der Differentiale, und einigen Abkürzungen der Rechnung sich unterscheide. In einem folgenden Aufsatze, specimen alterum calculi differentialis, ib. 1691 lenkte er aber ein, und erklärte sich dahin, daß die Uebereinstimmung beider Methoden nicht weiter gehe, als daß, wenn man die eine begriffen habe, die andere desto leichter verstanden werden könne. Auch leiste die Leibnizische Rechnung vieles, was die Barrowische nicht im Stande sey, und es habe eine seltene Kraft des Geistes erfordert, die Rechnung so kurz und einfach zu machen, als Leibnitz sie geliefert hat.

Berührungspunct ist der Punct, wo eine krumme Linie von einer geraden, oder von einer andern krummen Linie berührt wird.

Berührungswinkel (Angulus contactus, seu contingentiae) ist die Lage, die ein Bogen einer krummen Linie gegen die sie berührende an dem Berührungspuncte hat.

Der Winkel einer krummen Linie mit einer geraden sie schneidenden ist der Winkel, welchen die berührende an jener in dem Durchschnittspuncte mit dieser macht. Denn bey diesem Winkel kommt es bloß auf die Richtung der krummen Linie in dem Durchschnittspuncte an, nicht auf die benachbarten Theile des Bogens. Der Winkel einer

krummen Linie mit der sie berührenden selbst ist also vollkommen Null. Sieht man aber auf die Ablenkung der krummen Linie von der berührenden geraden, so kann diese als ein gemischtlinichter Winkel angulus mixtilineus) des Bogens der krummen Linie und der berührenden an dem einen Endpuncte betrachtet werden, nach der Analogie des Winkels zweyer geraden Linien. Man kann einen solchen Winkel aber nicht mit geradlinichten, auch nicht mit solchen unendlich kleinen, sondern nur mit andern seiner Art vergleichen. Der Kreis giebt ein Mittel zu dieser Vergleichung.

Es sey A E (Fig. 44. Tab. III.) ein Bogen eines Kreises, dessen Mittelpunct C ist. In A sey die berührende A D. Euklides zeigt (III. 16.), daß zwischen der auf A C senkrechten (oder berührenden) A D und dem Kreise keine gerade Linie gezogen werden kann, daher der Winkel des Kreises und der berührenden A D kleiner ist als jeder spitzige geradlinichte Winkel.

Ob nun gleich jede gerade Linie A F, die durch A innerhalb des W. C A D gezogen wird, den Kreisbogen A E B schneidet, so lassen sich doch unendlich viele Kreise ziehen, die zwischen dem Bogen A E und der gemeinschaftlichen berührenden durchgehen, nämlich alle, die aus einem Mittelpuncte auf der Linie durch A und C, mit einem Halbmesser, größer als A C, beschrieben werden. (Kästners Anfangsgründe der Geom. S. 20. Zus. 6.) Die stetige Ablenkung ist an den größern Kreisen geringer als an den kleinern, bey gleicher Länge der Bogen.

Die Ablenkung des Kreisbogens A E in E von der berührenden A D, in Absicht auf die Richtung, ist der Winkel der in E berührenden mit A D, das ist der Winkel A C E. Auf dem mit A G beschriebenen Kreise sey der Bogen A e = A E, so ist die Ablenkung des Bogens A e in e der Winkel A G e. Nimmt man die Bogen A E, A e gleich groß, so verhalten sich die Ablenkungen in E und e wie A G : A C, weil bey gleichen Bogen die Win-

kel ſich umgekehrt wie die Halbmeſſer verhalten. Statt der Ablenkungen gleich großer Bogen in den Endpuncten mag man auch kurz die Ablenkungen der ganzen unbeſtimmten Bogen ſetzen. Dieſes ſind die gemiſchtlinichten Winkel DAE, DAe, welche zwar nicht mit geradlinichten Winkeln verglichen werden können, aber doch ein beſtimmbares Verhältniß unter ſich haben, nämlich das umgekehrte Verhältniß ihrer Halbmeſſer. Mit einem geradlinichten Winkel kann der gemiſchtlinichte nicht verglichen werden, weil auf den Schenkeln jenes die Theile immer dieſelbe Lage gegen einander behalten, auf dieſem nicht.

Nun ſey MAm (Fig. 45.) ein Bogen einer krummen Linie, an welcher in A die berührende gerade DAd gezogen iſt, und BAb ein Kreisbogen, der aus einem Mittelpuncte C auf der durch A normalen AC beſchrieben iſt, ſo daß zwiſchen demſelben und dem Bogen der Curve MAm kein anderer Kreisbogen durchgehen könne, ſondern jeder andere, aus einem Mittelpuncte auf der Normale beſchriebene Kreis entweder zwiſchen DAd und MAm durchgehe, oder innerhalb des Kreisbogens BAb falle, das iſt, es ſey AC der Halbmeſſer des Krümmungskreiſes. Solchergeſtalt iſt der Berührungswinkel in A an der krummen Linie MAm und an dem Kreiſe BAb derſelbe. In jedem andern Puncte der krummen Linie, wie M, iſt der Berührungswinkel daſelbſt und an dem zugehörigen Krümmungskreiſe auch gleich groß. Daher verhalten ſich die Berührungswinkel in A und M umgekehrt wie die Halbmeſſer der Krümmung in A und M.

Die Halbmeſſer der Krümmung verhalten ſich umgekehrt wie die Krümmungswinkel; alſo verhalten ſich die Berührungswinkel wie die Krümmungswinkel, d. i. die Winkel zweyer aneinander ſtoßenden Bogen einer Curve.

Über den Berührungswinkel iſt im 16ten Jahrhundert ein lebhafter Streit zwiſchen Peletarius (Pelle-

tier) und Clavius entſtanden. Der erſte behauptete, der Berührungswinkel ſey kein wahrer Winkel, überhaupt keine Größe, ſondern die gerade berührende am Kreiſe falle mit dem Umfange zuſammen, und ſey nicht gegen ſie geneigt; der Winkel des Halbkreiſes mit dem Durchmeſſer ſey allerdings einem geradlinichten Rechten gleich.

Clavius behauptete dagegen, der Berührungswinkel im Kreiſe ſey wirklich ein Winkel, und zwar eine Größe, die ſich ins Unendliche theilen laſſe, zwar nicht durch eine gerade Linie, aber wol durch den Umfang eines größern Kreiſes; doch ſey er kleiner als jeder mögliche geradlinichte; der Winkel des Halbkreiſes ſey kleiner als ein geradlinichter Rechter, doch aber größer als jeder geradlinichte ſpitze Winkel. Auch ſeyn der Berührungswinkel und ein geradlinichter ungleichartige Größen, und könnten daher nicht verglichen werden. Dieſes zur Erwiederung auf einen Grund, den P. für ſeine Behauptung anführte. Clavius hat ſeines Gegners Gründe und ſeine eigenen in ſeinem Commentar über Euklides Elemente (III. 28) angeführt.

Die Geſchichte des Streites und die Unterſuchung der Frage hat Wallis in einer Abhandlung 1656 vorgetragen, welcher er eine Vertheidigung noch 1685 folgen ließ. Beide Abhandlungen ſtehen in dem zweyten Theile ſeiner Werke, p. 605 — 664. Die zweyte Abhandlung ward dadurch veranlaßt, daß ein Jeſuit, Leotaud, in ſeiner Cyclomathia, 1662, die Vertheidigung des Clavius übernommen hatte. Wallis erklärt ſich für die Meinung des Peletarius.

Man kann ſagen, daß beide Recht haben, weil ſie den Winkel einer krummen Linie mit einer geraden ſich verſchiedentlich gedenken. Tacquet ſagt in ſeiner Ausgabe des Euklides, daß beide ſich irrige Vorſtellungen von der Natur der Winkel machten. Dieſe ſeyn keine Größen, ſondern Beſchaffenheiten (modi) einer Größe, und könnten nur in Abſicht auf Congruenz oder Nicht-Congruenz verglichen werden.

Ein Berührungswinkel kann unendlich klein, oder unendlich groß, in Vergleichung mit Berührungswinkeln an Kreisen seyn. Wenn zwischen der krummen Linie MAm und der in A berührenden geraden DAd kein Kreisbogen durch A, aus einem Mittelpuncte auf der Normale AC, gezogen werden kann, so groß auch der Halbmesser genommen werden mag, so ist der Krümmungswinkel MAD unendlich klein, und die Krümmung von MAm in A unendlich gering. Umgekehrt, wenn jeder Kreis, der aus einem Mittelpuncte auf der Normale durch A beschrieben wird, zwischen der berührenden DAd und der krummen Linie durchgeht, der Halbmesser mag noch so klein genommen werden, so ist der Krümmungswinkel der krummen Linie in A unendlich groß, und die Krümmung daselbst unendlich stark.

Exempel. Die krumme Linie AMN (Fig. 46.) sey eine höhere Parabel, deren Gleichung ist $y^3 = a^2x$. Die Axe sey AX; auf dieser die Abscisse $AP = x$, die senkrechte Ordinate $PM = y$. Man ziehe AM, und auf diese die senkrechte MQ, welche AX in Q schneidet, und setze $AQ = 2u$. Da $AP : AM = AM : AQ$ ist, so ist $2ux = x^2 + y^2$, und $2u = x + \frac{y^2}{x}$. Für unsere krumme Linie ist $2u = x + \frac{a^2}{y}$. Dieses ist der Durchmesser AQ eines Kreises, der durch M geht. Je näher M an A genommen wird, desto größer wird dieser Durchmesser. Nimmt man also einen Punct m auf dem Bogen AM zwischen A und M, so geht der durch die Puncte A, m auf gleiche Art beschriebene Kreis zwischen dem durch die Puncte A, M beschriebenen und der in A beide berührenden AD hindurch. Nimmt man zwischen A und m wieder einen Punct, und beschreibt durch diesen und A aus einem Mittelpuncte auf AX einen Kreis, so nähert sich dieser der berührenden noch mehr als der durch A, m, beschriebene. Die Gränze aller dieser Kreise ist

ein Kreis mit einem unendlich großen Durchmesser; das ist, die Ablenkung der krummen Linie in A von der berührenden ist unendlich gering, oder die Krümmung unendlich klein.

Die krumme Linie sey eine andere Art von höherer Parabel, deren Gleichung ist $y^3 = ax^2$. Nun ist $2u = x + \sqrt{ay}$. Ein Kreis durch A und m beschrieben, aus einem Mittelpuncte auf AX, fällt innerhalb des durch A, M auf gleiche Art beschriebenen Kreises; die Ablenkung der krummen Linie von der berührenden AD wird immer größer, und in A unendlich stark, wo der Durchmesser des Kreises unendlich klein ist.

Wenn die Gleichung ist $y^4 = a^3x$, so ist $2u = x + \frac{a^3}{y^2}$, und die Ablenkung von der berührenden in A ist unendlich geringer als an der krummen Linie, deren Gleichung ist $y^5 = a^2x$. Läßt man die Exponenten von y nach der Folge der natürlichen Zahlen zunehmen, so entsteht eine Folge von Berührungswinkeln, deren jeder unendlich klein gegen den vorhergehenden ist. Für die erste in dieser Reihe von krummen Linien, die apollonische Parabel, deren Gleichung $y^2 = ax$, ist der Berührungswinkel in A gleich dem an einem Kreise mit dem Durchmesser a.

An der krummen Linie, deren Gleichung ist $y^4 = ax^3$, ist $2u = x + \sqrt[3]{ay^2}$. Unterscheidet man dieses u durch ein Strichlein von dem u für die Linie mit der Gleichung $y^5 = ax^2$, so ist die Gränze für $u : u' = \sqrt{y} : \sqrt[3]{y^2} = 1 : \sqrt[6]{y}$; da in dem Werthe des Durchmessers der Theil x gegen den zweyten Theil zuletzt unendlich klein wird. An der krummen Linie mit der Gleichung $y^4 = ax^3$ ist also der Berührungswinkel bey A unendlich größer als an der andern, mit der Gleichung $y^5 = ax^2$.

Zu vergleichen: Newtoni Methodus fluxionum et serierum infin. p. 114. edit. Castillion.

Beſtändige Größe (Conſtans) iſt diejenige, die nach der Integration einer Differentialgleichung dem Integral beygefügt wird, weil bey der Differentiation einer Gleichung dasjenige Glied, was bloß eine unveränderliche Größe enthält, weggelaſſen wird, und alſo bey jeder Integration ein ſolches Glied als vorhanden anzunehmen iſt. Was es für einen Werth habe, muß aus den Bedingungen der Verbindung der Größen beſtimmt werden. In manchen Fällen iſt es Null. In allgemeinen Unterſuchungen bleibt es unbeſtimmt, und wird durch Conſt. oder C bezeichnet.

Beſtimmt iſt, wobey nichts willkührliches Statt hat. Eine beſtimmte Aufgabe iſt, die nur auf eine Art aufgelöſet werden kann, oder zu welcher die mögliche Anzahl der verſchiedenen Auflöſungen gegeben wird. Eine beſtimmte Gleichung iſt, worin nur eine einzige unbekannte Größe vorkommt. Eine beſtimmte Zahl iſt, deren Verhältniß zur Einheit gegeben wird, wie 8 ; $\frac{3}{4}$; $\frac{10}{3}$. Dahin gehören aber auch alle Irrationalzahlen, wenn gleich der Exponens ihres Verhältniſſes zu der Einheit oder zu einer rationalen Zahl nicht vollſtändig angegeben werden kann.

Beſtimmter Schnitt (Sectio determinata; διωρισμενη τομη) iſt die Benennung einer geometriſchen Aufgabe, worüber Apollonius, der große Geometer des Alterthums, eine Abhandlung in zwey Büchern oder Abtheilungen geſchrieben hat, die verloren ſind. Pappus hat in ſeinen mathematiſchen Sammlungen in der Vorrede zu dem 7ten Buche eine kurze Nachricht von dem Inhalte dieſer Schrift gegeben, und in dieſem Buche 51 Sätze, die zu den Aufgaben von dem beſtimmten Schnitte nöthig ſind (Lemmata) mit den Beweiſen vorgetragen. Nach Anleitung jener Nachricht hat Snellius ein ähnliches Werk zu liefern unternommen, in dem Apollonius Batavus, Lugd. 1608. pagg. 37. 4. Es iſt aber noch ſehr unvollſtändig, wie man aus dem bloßen Anblick

erkennen mag. Die Hülfssätze bey Pappus sind nicht benutzt. Daher ist Robert Simson mit dieser Bearbeitung der Aufgabe sehr unzufrieden. Um dieselbe Zeit mit Snellius beschäftigte sich Marinus Ghetaldus aus Ragusa mit dieser Aufgabe. Seine Constructionen sind aber nach Montucla's Urtheil oft zu schwerfällig. Ein Italiener, Giannini, ist diesem Schriftsteller zufolge besser in die Methode des alten Geometers eingegangen. Inzwischen ist die Schrift des Snellius vor nicht langer Zeit von einem Engländer Lawson ins Englische übersetzt, London 1772, und mit einer neuen Restauration von Wales begleitet. Eine Wiederherstellung des Apollonischen Werkes, die von dem Original kaum verschieden seyn mag, hat Robert Simson geliefert. Er hat eben so viele Hauptaufgaben und so viele besondere Fälle (epitagmata), als nach Pappus Anzeige in dem griechischen Werke waren, auch eben so viele Bestimmungen eines größten oder kleinsten Verhältnisses, wo ein solches Statt findet. Zu den zwey Büchern des Apollonius hat er noch zwey eigene gefügt, die etwas schwerere verwandte Aufgaben enthalten. In der Sammlung, Rob. Simson Opera reliqua, Glasguae, 1776. 4. sind die wiederhergestellten Bücher des Apollonius von S. 59 — 193; die beiden zugefügten von S. 198 — 313 enthalten. Dieses Werk ist dienlich sich eine Übung in der geometrischen Analysis und Synthesis zu verschaffen, wozu ein Theil desselben auch schon hinreichend seyn möchte.

Die Aufgabe fordert, auf einer geraden Linie einige Puncte so anzugeben, daß die Rechtecke oder Quadrate von den Theilen ein gegebenes Verhältniß haben, bey einer bestimmten gegenseitigen Lage der Puncte. Daher die Benennung der Aufgabe.

I. Auf einer geraden Linie sind zwey Puncte, A, B, gegeben,

und neben bey eine gerade Linie von gegebener Länge D, es wird auf jener der Punct P gesucht, so daß $PA^2 : PB^2$, oder auch $PA \times D : PB^2$ einem gegebenen Verhält-

niſſe gleich ſey, der Punct P mag zwiſchen A und B, oder außer beiden, auf dieſer oder jener Seite liegen ſollen.

II. Auf einer geraden Linie ſeyn drey Puncte,

A P B C

A, B, C, gegeben, es wird der Punct P geſucht, ſo daß $PA \times D : PB \times PC$, oder $PA^2 : PB \times PC$ einem gegebenen Verhältniſſe gleich, und die gegenſeitige Lage aller vier Puncte irgend eine beſtimmte ſey. Die beygefügte Anordnung iſt nur eine einzelne.

III. Auf einer geraden Linie ſeyn vier Puncte,

A P B C D

A, B. C, D, gegeben, es wird der Punct P geſucht, ſo daß $PA \times PB : PC \times PD$ einem gegebenen Verhältniſſe gleich, und die gegenſeitige Lage aller fünf Puncte irgend eine beſtimmte ſey.

Die Aufgaben haben, als algebraiſche betrachtet, gar keine Schwierigkeit. Sie führen nur auf Gleichungen vom zweyten Grade Das Künſtliche nach der Methode der Alten beſteht darin, ſie bloß durch Verbindungen von Verhältniſſen, und durch Zuſammenſetzungen von Rechtecken und Quadraten, mittelſt einer geometriſchen Rechnung allein, oder mit Zuziehung einer Conſtruction aufzulöſen, und zwar ſo, daß P die verlangte Lage gegen die gegebenen Puncte erhalte. Apollonius hat die Auflöſungen auf zweyerley Art gegeben, einmahl bloß durch gerade Linien, nach dem Verfahren des Euklides im zweyten Buche der Elemente, dann aber auch auf eine feinere und lehrreichere Art durch Anwendung der an einen Halbkreis gezogenen Linien, die mit den Theilen auf der gegebenen in Verbindung gebracht werden. Die Mannichfaltigkeit der Fälle, welche nach der Methode der Alten alle einzeln vorgenommen werden mußten, und die Beſtimmung des Verhältniſſes, welches zu der Gränze der Möglichkeit und Unmöglichkeit einer Auflöſung gehört, mit der Angabe, ob es größer oder kleiner ſey, als jedes andere, das eine Auf-

Lösung möglich macht, verursachten, daß die Abhandlung weitläufig wurde. Sie hat 51 Lemmata, und 83 Lehrsätze enthalten.

Simson macht das eine Glied des Verhältnisses der Rechtecke und Quadrate um eine gegebene Größe größer oder kleiner, und setzt das Verhältniß dieses veränderten Gliedes zu dem andern Gliede einem gegebenen gleich. Z. B. bey drey gegebenen Puncten in nr. II.

$$AP \times D - D \times E : PB \times PC = m : n,$$

oder auch

$$AP \times PB - D \times E : PC^2 = m : n,$$

wo D und E gegebene Längen, und m : n ein bestimmtes Verhältniß ist.

Unter den Lemmaten, die Pappus vorgetragen hat, sind manche merkwürdige Verhältnisse, die durch Abtheilungen auf einer Linie entstehen. Der folgende Satz (XL. bey Pappus) diene zum Beyspiel.

A C D E B

Es sind auf einer geraden Linie fünf Puncte, A, B, C, D, E, so genommen, daß

$$AC \times CB : AE \times EB = CD^2 : DE^2,$$

so ist

$$AC \times AE : BE \times BC = AD^2 : BD^2.$$

Der Beweis, den Pappus giebt, läßt sich hier nicht mittheilen, weil dazu andere Sätze nöthig sind. Beide Proportionen sind Folge einer dritten, nämlich dieser:

$$AD \times DB : CD \times DE = AD - BD : CD - DE.$$

Denn man setze $AD = a$, $BD = b$; $CD = c$; $DE = d$, so ist die letztere Proportion

$$ab : cd = a - b : c - d,$$

also $ab\,(c - d) = cd\,(a - b)$.

Multiplicirt man auf beiden Seiten mit $c + d$, und subtrahirt darauf beiderseits $cc\,dd$, so erhält man

$$(a + d)(b - d)\,cc = (a - c)(b + c)\,dd,$$

woraus die erste Proportion folgt. Die zweyte erhält man auf ähnliche Art, nachdem man die anfängliche Gleichung mit $a + b$ multiplicirt hat.

Ein verwandter Satz ist folgender (XXXIX. bey Pappus). Wenn

$$AB \times AE : DB \times DE = AC^2 : CD^2,$$

so ist

$$AB \times DB : AE \times DE = CB^2 : CE^2.$$

Bey dem Gebrauche der vorigen Bezeichnungen giebt die erste Proportion die Gleichung,

$$(a + b + d)\, cc + 2bcd = abd.$$

Hieraus

sowohl $(b + c)^2 d = (a + b)\ (bd - cc)$

als $(c + d)^2 b = (a + d)\ (bd - cc)$,

woraus sich die zweyte Proportion ergiebt.

Beugungspunct, s. Wendungspunct.

Bewegung ist im mathematischen Verstande die Vorstellung von der stetigen Veränderung der Lage eines Punctes, einer Linie, einer Fläche oder eines Körpers. Es ist ein dem Verstande ursprünglich angehöriger Begriff, wodurch wir die sinnlichen Erscheinungen bey Veränderung der Lage der Körper gegen einander in Verbindung zu bringen vermögend sind. Die Bewegung, welche in der reinen Mathematik nur gedacht wird, legen wir den Körpern als etwas an ihnen vorhandenes bey. Dem Verstande gehört die Form der Bewegung. Die Form ist nur in ihm vorhanden, da der zurückgelegte Weg eines Körpers nichts wirkliches, und seine Lage nur etwas augenblickliches ist.

Linien werden durch stetige Bewegung eines Punctes erzeugt. Weil allenthalben in ihr Puncte gedenkbar sind, so kann man einen Punct stetig durch sie hinführen. So fährt man beym Abzeichnen einer Figur auf einem durchscheinenden Papier mit einem Stifte über ihren Gränzen hin.

Flächen werden durch die Bewegung einer Linie erzeugt. Eine gerade Linie bleibe in derselben Ebene, sich gleich und parallel, so entsteht ein Parallelogramm. Verändert sie sich, so kann jede ebene Figur dadurch entstehen. Man mag sie auch um einen festen Punct in derselben Ebene, sich drehen lassen. Bleibt sie sich gleich, so beschreibt sie eine Kreisfläche, ihr Endpunct die Kreislinie. Verändert sie sich, so kann jede krummlinichte Figur dadurch beschrieben werden. Das Gesetz der Veränderung bestimmt die Natur der krummen Linie. So werden in der Astronomie Ellipsen durch einen veränderlichen radius vector beschrieben, der sich um den einen Brennpunct dreht. Bleibt die beschreibende gerade Linie nicht in derselben Ebene, geht aber doch sich parallel durch eine in sich zurücklaufende krumme Linie, als einen Kreis, eine Ellipse, so beschreibt sie die Oberfläche eines Cylinders oder cylinderförmigen Körpers. Geht sie durch einen fixen Punct, indem sie sich längs jener krummen Linie bewegt, so beschreibt sie die Oberfläche eines Kegels oder kegelförmigen Körpers.

Körper werden durch Beweaung einer ebenen Fläche erzeugt. So ein Parallelepipedum durch die sich parallele Bewegung eines Parallelogramms. Verändert die ebene Figur ihre Größe, bleibt sich aber ähnlich, so entsteht, bey Beobachtung eines gewissen Gesetzes, ein Kegel oder kegelförmiger Körper. Jeder Körper kann durch eine nach einem gewissen Gesetze sich verändernde Figur, bey paralleler Bewegung hervorgebracht werden. Die erzeugende Ebene mag sich auch um eine in ihr gezogene gerade Linie drehen. So kann sie cylinderförmige und kegelförmige Körper beschreiben. Bey jenen ist die Ebene ein Parallelogramm, dessen Grundlinie aber veränderlich seyn mag; bey diesen ist die Ebene ein geradlinichtes Dreyeck, dessen Grundlinie dieselbe oder veränderlich ist. Durch Umdrehung einer krummlinichten Figur, um eine Axe, die sie in gleiche und ähnliche Hälften theilt, entstehen Körper, die zum Theil zu dem Kegelgeschlechte gerechnet werden.

Die alten Geometer haben die Vorstellung einer Bewegung in die Geometrie aufgenommen. Euklides läßt die Kugel, den senkrechten Kegel und Cylinder durch Umdrehung einer ebenen Figur entstehen. Apollonius, der in seiner Erklärung des Kegels den schiefen mit begreift, läßt die Kegelfläche durch eine gerade Linie beschrieben werden, welche durch einen fixen Punct gelegt ist, und längs dem Umfange eines Kreises, in welchem aber jener Punct nicht liegt, herumgeführt wird. Archimedes führte eine gedoppelte Bewegung in die Geometrie ein, nämlich bey seiner Spirale. Diese wird beschrieben, indem eine unbestimmte gerade Linie sich um einen fixen Punct gleichförmig in derselben Ebene bewegt, und ein Punct auf derselben gleichförmig fortrückt. Er bringt hier auch den Begriff von Geschwindigkeit in eine geometrische Untersuchung. Er zeigt, daß bey der gleichförmigen oder gleich geschwinden Bewegung eines Punctes die Wege sich wie die Zeiten verhalten, auch, daß bey zwey Puncten, deren jeder eine gleichförmige Bewegung hat, die in gleichen Zeiten beschriebenen Wege ein gegebenes Verhältniß haben.

Die Neuern haben auch ungleichförmige Bewegungen in die Geometrie eingeführt. Neper legt in der Theorie der Logarithmen zwey Bewegungen zum Grunde, eine gleichförmige und eine ungleichförmige, wobey die Geschwindigkeiten in geometrischer Progression abnehmen. Descartes gebrauchte ungleichförmige Geschwindigkeiten bey der Construction der Beauniſchen Curve. Newtons Fluxionen sind Verhältnisse der Geschwindigkeiten der Puncte, Linien und Ebenen, die durch ihre Bewegung Linien, Flächen und Körper erzeugen. Indem die Ordinate einer krummen Linie parallel mit sich selbst auf der Abscissenlinie fortrückt, rücke ein Punct auf ihr in ihrer Richtung fort, entweder nach der Abscisse hin oder sich entfernend. Das Gesetz der Geschwindigkeit dieses Punctes in Beziehung auf die Geschwindigkeit der Ordinatenlinie bestimmt die Curve.

Vergl. Kästners Geschichte der Mathem. Bd. IV. S.

Beweis ist eine Verbindung von Sätzen, welche entweder den Grund enthält, warum einem Subjecte ein Prädicat beygelegt wird, oder welche zeigt, wie aus einem Satze ein anderer Satz hergeleitet wird. In mathematischen Untersuchungen ist das Subject entweder eine Größe mit einer gewissen Form, z. B. die geometrischen, Kreis, Ellipse, Kegel, unter den arithmetischen, eine dekadisch ausgedruckte Zahl, eine Potenz einer eintheiligen Größe mit irgend einem Exponenten; oder das Subject ist eine Verbindung mehrerer Größen, z. B. Aggregat, Product, Bruch, Proportion, Gleichung, Progression. Ein Subject kann oft auch als ein Satz betrachtet werden, z. B. eine Proportion, eine Gleichung enthalten wirklich jede einen gewissen Satz. Das Prädicat ist die Bestimmung einer Gleichheit, bisweilen auch einer Ungleichheit, in geometrischen Sätzen außer dieser Bestimmung in einigen Fällen eine gewisse Lage der Linien und Flächen.

Sehr häufig oder am häufigsten wird ein Satz, manchmahl mehrere, als Bedingung oder Voraussetzung (hypothesis) aufgestellt, und daraus mit Zuziehung schon erwiesener Sätze ein neuer Satz hergeleitet.

Daß sowohl die Sätze, welche in einem Beweise angewandt werden, richtig seyn, als auch, daß in der Art ihrer Verbindung keine Mängel sich finden müssen, oder daß, wie die Logiker sich ausdrücken, Materie und Form der Schlüsse richtig seyn, wird in der Mathematik um so strenger gefordert, da es bey mathematischen Beweisen leicht ist, darauf zu achten, und hier keine der Schwierigkeiten sich findet, die bey philosophischen und physikalischen Untersuchungen häufig eintreten.

Von den Schlußarten, die in der Logik entwickelt werden, gebraucht man in der Mathematik nur die nach der ersten Figur, in welcher man von dem Allgemeinen auf das Untergeordnete schließt. In der reinen Mathematik werden nur allgemein bejahende Sätze aufgenommen. Jene Schlußart kommt nur in der Analysis und analytischen Geometrie vor. Was z. B. von Gleichungen allgemein

erwiesen ist, gilt auch von einer Gleichung irgend eines Grades, und einer individuellen; die Entwickelung einer Größe in die Form einer Reihe wird auf jeden besondern Fall angewandt, so auch die Differentiation und Integration einer Function, die im Allgemeinen gelehrt ist. Die Eigenschaften, welche Linien der zweyten Ordnung zukommen, werden jeder der drey Gattungen dieser Ordnung beygelegt. — In der Geometrie, nach Art der Alten behandelt, wird nie vom Allgemeinen auf das Untergeordnete geschlossen, sondern die Eigenschaften des Untergeordneten werden besonders erwiesen. Z. B. an dem Kreise wird gezeigt, daß das Quadrat der halben Chorde, die senkrecht auf einem Durchmesser steht, dem Rechtecke von den Abschnitten des Durchmessers gleich ist, obgleich dieser Satz schon in einem andern von den Segmenten zweyer, auf irgend eine Art sich schneidenden Linien enthalten ist.

Die Schlußarten, welche in der Mathematik am häufigsten gebraucht werden, sind folgende.

I. Wenn A, B, C, D, E, etc, irgend welche Größen, auch zusammengesetzte, bedeuten, und es von diesen erwiesen ist, daß $A = B$, und $B = C$ ist, so folgt, daß $A = C$ ist. Ist $C = D$, so folgt, daß $A = D$ ist; wenn ferner $D = E$ ist, so ist $A = E$, u. s. f. so lang auch die Reihe seyn mag.

II. Ist erwiesen oder bedungen, daß $A = B$ und $C = D$ ist, so ist $A + C = B + D$, und auch $A - C = B - D$; ferner $A + C = B + C$ und $A - C = B - C$.

III. Ist erwiesen oder bedungen, daß $A = B$ ist, so ist $mA = mB$, und $\frac{A}{m} = \frac{B}{m}$. Auch sind die gleichnamigen Potenzen und Wurzeln von A und B gleich. Die Differentiale dergleichen Functionen A, B, sind gleich. Die Integrale der gleichen Differentialfunctionen A, B, mit zwey veränderlichen Größen sind gleich, oder nur um eine beständige Größe verschieden.

IV. Sind A und B ungleich, so sind auch $A + C$ und $B + C$ ungleich; so wie $A - C$ und $B - C$. Ist A

Beweis ist eine Verbindung von Sätzen, welche entweder den Grund enthält, warum einem Subjecte ein Prädicat beygelegt wird, oder welche zeigt, wie aus einem Satze ein anderer Satz hergeleitet wird. In mathematischen Untersuchungen ist das Subject entweder eine Größe mit einer gewissen Form, z. B. die geometrischen, Kreis, Ellipse, Kegel, unter den arithmetischen, eine dekadisch ausgedruckte Zahl, eine Potenz einer eintheiligen Größe mit irgend einem Exponenten; oder das Subject ist eine Verbindung mehrerer Größen, z. B. Aggregat, Product, Bruch, Proportion, Gleichung, Progression. Ein Subject kann oft auch als ein Satz betrachtet werden, z. B. eine Proportion, eine Gleichung enthalten wirklich jede einen gewissen Satz. Das Prädicat ist die Bestimmung einer Gleichheit, bisweilen auch einer Ungleichheit, in geometrischen Sätzen außer dieser Bestimmung in einigen Fällen eine gewisse Lage der Linien und Flächen.

Sehr häufig oder am häufigsten wird ein Satz, manchmahl mehrere, als Bedingung oder Voraussetzung (hypothesis) aufgestellt, und daraus mit Zuziehung schon erwiesener Sätze ein neuer Satz hergeleitet.

Daß sowohl die Sätze, welche in einem Beweise angewandt werden, richtig seyn, als auch, daß in der Art ihrer Verbindung keine Mängel sich finden müssen, oder daß, wie die Logiker sich ausdrücken, Materie und Form der Schlüsse richtig seyn, wird in der Mathematik um so strenger gefordert, da es bey mathematischen Beweisen leicht ist, darauf zu achten, und hier keine der Schwierigkeiten sich findet, die bey philosophischen und physikalischen Untersuchungen häufig eintreten.

Von den Schlußarten, die in der Logik entwickelt werden, gebraucht man in der Mathematik nur die nach der ersten Figur, in welcher man von dem Allgemeinen auf das Untergeordnete schließt. In der reinen Mathematik werden nur allgemein bejahende Sätze aufgenommen. Jene Schlußart kommt nur in der Analysis und analytischen Geometrie vor. Was z. B. von Gleichungen allgemein

erwiesen ist, gilt auch von einer Gleichung irgend eines Grades, und einer individuellen; die Entwickelung einer Größe in die Form einer Reihe wird auf jeden besondern Fall angewandt, so auch die Differentiation und Integration einer Function, die im Allgemeinen gelehrt ist. Die Eigenschaften, welche Linien der zweyten Ordnung zukommen, werden jeder der drey Gattungen dieser Ordnung beygelegt. — In der Geometrie, nach Art der Alten behandelt, wird nie vom Allgemeinen auf das Untergeordnete geschlossen, sondern die Eigenschaften des Untergeordneten werden besonders erwiesen. Z. B. an dem Kreise wird gezeigt, daß das Quadrat der halben Chorde, die senkrecht auf einem Durchmesser steht, dem Rechtecke von den Abschnitten des Durchmessers gleich ist, obgleich dieser Satz schon in einem andern von den Segmenten zweyer, auf irgend eine Art sich schneidenden Linien enthalten ist.

Die Schlußarten, welche in der Mathematik am häufigsten gebraucht werden, sind folgende.

I. Wenn A, B, C, D, E, etc, irgend welche Größen, auch zusammengesetzte, bedeuten, und es von diesen erwiesen ist, daß $A = B$, und $B = C$ ist, so folgt, daß $A = C$ ist. Ist $C = D$, so folgt, daß $A = D$ ist; wenn ferner $D = E$ ist, so ist $A = E$, u. s. f. so lang auch die Reihe seyn mag.

II. Ist erwiesen oder bedungen, daß $A = B$ und $C = D$ ist, so ist $A + C = B + D$, und auch $A - C = B - D$; ferner $A + C = B + C$ und $A - C = B - C$.

III. Ist erwiesen oder bedungen, daß $A = B$ ist, so ist $mA = mB$, und $\frac{A}{m} = \frac{B}{m}$. Auch sind die gleichnamigen Potenzen und Wurzeln von A und B gleich. Die Differentiale dergleichen Functionen A, B, sind gleich. Die Integrale der gleichen Differentialfunctionen A, B, mit zwey veränderlichen Größen sind gleich, oder nur um eine beständige Größe verschieden.

IV. Sind A und B ungleich, so sind auch $A + C$ und $B + C$ ungleich; so wie $A - C$ und $B - C$. Ist A

größer als B, und B größer als C, so ist A größer als C. Ist A kleiner als B, und B kleiner als C, so ist A kleiner als C.

V. Es bedeuten $A=o$, $B=o$, $C=o$, $D=o$ etc. Gleichungen zwischen gegebenen und unbekannten Größen, oder Gleichungen zwischen unveränderlichen und veränderlichen Größen; diese mögen theils angenommene theils vorher erwiesene seyn. Aus der Verbindung von $A=o$ und $B=o$ durch solche Verwandlungen, wie II. und III. enthalten, entstehe eine Gleichung $P=o$; durch die Verbindung der Gleichung $D=o$ (oder $B=o$; oder der neuen $P=o$) und $C=o$, entstehe eine Gleichung $Q=o$. Aus der Verbindung einer dieser Gleichungen mit der Gleichung $D=o$ entstehe wieder eine, $R=o$. So fährt man fort, bis daß man auf eine Gleichung kommt, welche die Relation zwischen den Größen darstellt, die mit einander verknüpft werden sollen, die übrigen ausgesondert. Dieser Gang der Beweise ist der gewöhnlichste in der Analysis. Da Proportionen in der That Gleichungen, nämlich zwischen zwey Verhältnissen, sind, so ist derselbe Gang auch in geometrischen Beweisen, nach Art der Alten, häufig anzutreffen, hier aber öfterer mit den andern Schlußarten, besonders I. verbunden, als es in der Analysis geschieht.

Alle Mittelsätze, die bey einem Beweise angewandt werden, müssen vorher erwiesen seyn, wenn sie nicht eine bedungene Relation der Größen enthalten. In dem Beweise selbst muß bloß ihre Combination vorgenommen werden. Es ist ein Fehler gegen die gute Methode, Beweise in Beweise einzuschalten. Wo man dergleichen Parentheſen antrifft, und sie zu überschlagen nicht im Stande ist, muß man sie heraus heben, und als einen besondern Satz voran gehen lassen. Es ist auch sehr gut, bey der Schlußart V. alle Gleichungen, die gebraucht werden, vorher aufzustellen, wodurch die Übersicht des Beweises erleichtert wird, oder dieses als Leser für sich zu thun, wenn der Verfasser des Beweises es nicht für nöthig gehalten hat. Man sieht gleich Anfangs, worauf es bey dem Beweise ankommt.

Eine von den alten Geometern oft gebrauchte Beweisart, die Gleichheit zweyer Größen A und B zu zeigen, ist, daß bewiesen wird, A könne nicht größer, und auch nicht kleiner als B seyn.

In der Analysis des Unendlichen nach Art der Alten behandelt, kommt folgende Schlußart vor. Wenn A eine Größe ist, die zwischen zwey andern P, Q so enthalten ist, daß A immer größer als P und kleiner als Q ist, so nahe auch P und Q durch Veränderung in der Anzahl und Quantität ihrer Theile einander kommen, und wenn die gemeinschaftliche Gränze, welcher P und Q sich ohne einen bestimmbaren Unterschied nähern, G heißt, so ist A = G.

Von dieser und der vorhergehenden Schlußart s. Exhaustions-Methode.

In einigen Fällen ist folgende Schlußart brauchbar. Wenn zwey Größen zwischen zwey veränderlichen Größen, deren Unterschied kleiner als jede angebbare Größe gemacht werden kann, enthalten sind, so sind sie einander gleich. s. Proportion.

Beweise durch Induction, das ist, eine allgemeine Behauptung aus Bemerkungen des Zutreffenden in besondern Fällen, finden in der Geometrie gar nicht Statt; in der Arithmetik und Analysis müssen sie bisweilen die Stelle der strengen und allgemeinen Beweise vertreten. Die Formen der Zahlen haben zuweilen Eigenschaften, die sich nicht leicht erweisen lassen, ob sie gleich in allen einzelnen Fällen die Probe halten. Z. B. der Satz, daß jede ganze Zahl sich in vier oder wenigere Quadrate zerlegen läßt. Die Summen der Potenzen von Zahlen, die in arithmetischer Progression sind, bis zu der sechsten Potenz, fand Wallis durch eine mühsame Induction (Arithm. Infin. Prop. 19. 39. seq.). Das Gesetz der Binomial-Coefficienten ist zuerst durch Induction, anfangs nur, von Briggs, für ganze Exponenten, hernach von Newton für gebrochne, durch wirkliche Ausziehung einer Wurzel, gefunden. Die Induction wird vornemlich bey den Coefficienten einer Reihe, oder auch bey den gleich-

stelligen Coefficienten mehrerer Reihen, angewandt, ihr Gesetz zu finden. Inzwischen muß man, wenn es nur möglich ist, immer allgemeine Beweise suchen.

Ein bequemer Weg dazu ist oft folgender. Man zeige, daß das aus der Induction gefundene Gesetz für jeden folgenden Coefficienten gilt, wenn es für die vorhergehenden gültig ist, oder daß es für den $(m+1)$ten Coefficienten gilt, wenn es für den mten angenommen wird. Kästner hat diese Beweisart oft gebraucht. Jakob Bernoulli mag sie zuerst angewandt haben. Acta Erud. 1686, pag. 360. Opp. T. I. nr. 24. Ars conjectandi, p. 93.

Ein analogischer Beweis ist, wenn eine Formel, die bey einer gewissen Beschaffenheit der Größen richtig erwiesen ist, auch auf andere Fälle, wo diese Beschaffenheit nicht ist, ausgedehnt wird. Z. B. wenn der binomische Lehrsatz, nachdem er für ganze, positive Exponenten erwiesen ist, auch bey gebrochnen, und bey negativen Exponenten angewandt wird. Es war ein analogischer Beweis, wodurch Newton aus der Quadratur solcher krummen Linien, deren Gleichung ist $y = (1 - x^2)^m$, wenn m eine ganze positive Zahl ist, die Quadratur eines circularen und hyperbolischen Segments, aus der Gleichung $y = (1 \pm x^2)^{\frac{1}{2}}$, mittelst einer Interpolation herleitete. (Newtoni Opusc. T. I. nr. XI. s. Binom. Lehrsatz.)

Die Beweise vermittelst des Gebrauchs entgegengesetzter Größen kommen bey den Alten nicht vor. Jeder Fall wurde unabhängig von dem andern erwiesen. Wir leiten aus den Resultaten der Rechnung für einen ausgewählten Fall, in welchem alle Größen absolut (positiv, in Beziehung auf die negativen) genommen werden, die Resultate für diejenigen Fälle, in welchen eine oder mehrere negativ, in Beziehung auf die ihnen gleichnamigen in dem Normalfalle, gesetzt werden, bloß durch gehörige Verwandlung der Vorzeichen her. Dieses ist ein wichtiges Abkürzungsmittel des Vortrages.

Die Beweise der Elementarsätze in der Arithmetik mag man an bestimmten Zahlen führen, nur so, daß

daraus die Allgemeinheit des Satzes oder des Verfahrens daraus erhelle, indem die individuellen Zahlen nur die Stelle allgemeiner Zeichen vertreten.

Man theilt die Beweise ein in *synthetische* und *analytische*. Jene gehen von den Eigenschaften des Subjectes oder den bedungenen Sätzen aus, und verbinden damit die schicklichen, sonst erwiesenen Sätze, um zu dem Prädicate oder der Folgerung in dem aufgestellten Satze zu gelangen. Die analytischen Beweise gehen von der Folgerung aus, und zeigen, daß man dadurch auf einen zugestandenen Satz kommt. Die letztern kommen selten vor. Wenn aber ein Schriftsteller einen Satz behauptet, ohne ihn zu beweisen, so ist ein analytischer Beweis ein guter Weg sich von der Richtigkeit zu versichern, in dem Falle, daß man den directen Weg dazu nicht finden kann. S. Analysis als Methode.

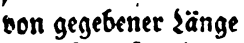
Die Beweise sind noch entweder *directe*, oder *indirecte*, die man auch *apagogische* nennt. Die directen zeigen, wie ein Satz aus den Prämissen folgt; die *indirecten* zeigen, daß das Gegentheil unmöglich ist, der Satz also wahr, weil ein drittes nicht Statt findet. Die letztern werden am meisten gebraucht darzuthun, daß ein Satz auch umgekehrt richtig ist. Im ersten und dritten Buche des Euklides kommen viele Beyspiele vor.

Bezeichnung (notatio) ist die Darstellung der Größen, ihrer Formen und Verbindungen durch gewisse willkührliche Zeichen (Symbole, Charaktere) und deren Zusammensetzungen. Dadurch wird die Theorie der Sache auf die Theorie der Zeichen reducirt. Die alten Geometer bedienten sich keiner andern Zeichen als der Buchstaben, wodurch die Linien angedeutet wurden. Diophantus nahm erst einige Zeichen für die unbekannte Größe und die Potenzen an. Die Bezeichnungen in der Algebra und Analysis sind allmählich eingeführt, so wie die Rechnungen mehr zusammengesetzt wurden. Die zunehmenden

erkennen mag. Die Hülfssätze bey Pappus sind nicht benutzt. Daher ist Robert Simson mit dieser Bearbeitung der Aufgabe sehr unzufrieden. Um dieselbe Zeit mit Snellius beschäftigte sich Marinus Ghetaldus aus Ragusa mit dieser Aufgabe. Seine Constructionen sind aber nach Montucla's Urtheil oft zu schwerfällig. Ein Italiener, Giannini, ist diesem Schriftsteller zufolge besser in die Methode des alten Geometers eingegangen. Inzwischen ist die Schrift des Snellius vor nicht langer Zeit von einem Engländer Lawson ins Englische übersetzt, London 1772, und mit einer neuen Restauration von Wales begleitet. Eine Wiederherstellung des Apollonischen Werkes, die von dem Original kaum verschieden seyn mag, hat Robert Simson geliefert. Er hat eben so viele Hauptaufgaben und so viele besondere Fälle (epitagmata), als nach Pappus Anzeige in dem griechischen Werke waren, auch eben so viele Bestimmungen eines größten oder kleinsten Verhältnisses, wo ein solches Statt findet. Zu den zwey Büchern des Apollonius hat er noch zwey eigene gefügt, die etwas schwerere verwandte Aufgaben enthalten. In der Sammlung, Rob. Simson Opera reliqua, Glasguae, 1776. 4. sind die wiederhergestellten Bücher des Apollonius von S. 59 — 193; die beiden zugefügten von S. 198 — 313 enthalten. Dieses Werk ist dienlich sich eine Übung in der geometrischen Analysis und Synthesis zu verschaffen, wozu ein Theil desselben auch schon hinreichend seyn möchte.

Die Aufgabe fordert, auf einer geraden Linie einige Puncte so anzugeben, daß die Rechtecke oder Quadrate von den Theilen ein gegebenes Verhältniß haben, bey einer bestimmten gegenseitigen Lage der Puncte. Daher die Benennung der Aufgabe.

I. Auf einer geraden Linie sind zwey Puncte, A, B, gegeben,



und neben bey eine gerade Linie von gegebener Länge D, es wird auf jener der Punct P gesucht, so daß $PA^2 : PB^2$, oder auch $PA \times D : PB^2$ einem gegebenen Verhält-

niſſe gleich ſey, der Punct P mag zwiſchen A und B, oder außer beiden, auf dieſer oder jener Seite liegen ſollen.

II. Auf einer geraden Linie ſeyn drey Puncte,

A P B C

A, B, C, gegeben, es wird der Punct P geſucht, ſo daß $PA \times D : PB \times PC$, oder $PA^2 : PB \times PC$ einem gegebenen Verhältniſſe gleich, und die gegenſeitige Lage aller vier Puncte irgend eine beſtimmte ſey. Die beygefügte Anordnung iſt nur eine einzelne.

III. Auf einer geraden Linie ſeyn vier Puncte,

A P B C D

A, B. C, D, gegeben, es wird der Punct P geſucht, ſo daß $PA \times PB : PC \times PD$ einem gegebenen Verhältniſſe gleich, und die gegenſeitige Lage aller fünf Puncte irgend eine beſtimmte ſey.

Die Aufgaben haben, als algebraiſche betrachtet, gar keine Schwierigkeit. Sie führen nur auf Gleichungen vom zweyten Grade Das Künſtliche nach der Methode der Alten beſteht darin, ſie bloß durch Verbindungen von Verhältniſſen, und durch Zuſammenſetzungen von Rechtecken und Quadraten, mittelſt einer geometriſchen Rechnung allein, oder mit Zuziehung einer Conſtruction aufzulöſen, und zwar ſo, daß P die verlangte Lage gegen die gegebenen Puncte erhalte. Apollonius hat die Auflöſungen auf zweyerley Art gegeben, einmahl bloß durch gerade Linien, nach dem Verfahren des Euklides im zweyten Buche der Elemente, dann aber auch auf eine feinere und lehrreichere Art durch Anwendung der an einen Halbkreis gezogenen Linien, die mit den Theilen auf der gegebenen in Verbindung gebracht werden. Die Mannichfaltigkeit der Fälle, welche nach der Methode der Alten alle einzeln vorgenommen werden mußten, und die Beſtimmung des Verhältniſſes, welches zu der Gränze der Möglichkeit und Unmöglichkeit einer Auflöſung gehört, mit der Angabe, ob es größer oder kleiner ſey, als jedes andere, das eine Auf-

Tafel der Binomial-Coefficienten bis zur XII. Potenz.

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
I.	1	1										
II.	1	2	1									
III.	1	3	3	1								
IV.	1	4	6	4	1							
V.	1	5	10	10	5	1						
VI.	1	6	15	20	15	6	1					
VII.	1	7	21	35	35	21	7	1				
VIII.	1	8	28	56	70	56	28	8	1			
IX.	1	9	36	84	126	126	84	36	9	1		
X.	1	10	45	120	210	252	210	120	45	10	1	
XI.	1	11	55	165	330	462	462	330	165	55	11	1
XII.	1	12	66	220	495	792	924	792	495	220	66	12

Jede Querreihe oder horizontale Reihe entsteht aus d nächst obern, wenn zu jeder Zahl in dieser die nächstvorhe gehende addirt wird. Dieses rührt daher, daß jede näch höhere Potenz aus der vorhergehenden durch die Multip cation mit a + b entsteht.

5. Dieses folgt auch aus der Form der Coefficiente Es ist $^{n}\mathfrak{M} = \frac{n.n-1\ldots n-m+1.}{1.2\ldots m.}$, und $^{n}\mathfrak{M}^{+1}$ $= \frac{n.n-1\ldots n-m.}{1.2\ldots m+1.}$. Die Summe die beiden nächsten Coefficienten in der nten Potenz $= \frac{n+1.n.n-1\ldots n-m+1.}{1.2.3\ldots m+1.}$. Dieses ist d (m + 1)te Coefficient der (n + 1)ten Potenz, od $^{n+1}\mathfrak{M}$. Es ist daher $^{n}\mathfrak{M} + ^{n}\mathfrak{M}^{+1} = ^{n+1}\mathfrak{M}$ auch, wenn n irgend eine Zahl, eine ganze oder gebroch positive oder negative Zahl ist.

6. Die Summe der Coefficienten in der mten Ste bis zu dem aus der nten Potenz ist der (m + 1)te Co

ficient aus der (n+1)ten Potenz. Z. B. wenn m=4, und n=9, so ist 1+5+15+35+70+126 =252, dem fünften Coefficienten der 10ten Potenz.

Es ist nämlich allgemein:

$= {}^{n+1}\mathfrak{M} = {}^{n}\mathfrak{M} + {}^{n}\overset{+1}{\mathfrak{M}}$

$= {}^{n}\mathfrak{M} + {}^{n-1}\mathfrak{M} + {}^{n-1}\overset{+1}{\mathfrak{M}}$

$= {}^{n}\mathfrak{M} + {}^{n-1}\mathfrak{M} + {}^{n-2}\mathfrak{M} + {}^{n-2}\overset{+1}{\mathfrak{M}}$

$= {}^{n}\mathfrak{M} + {}^{n-1}\mathfrak{M} + {}^{n-2}\mathfrak{M} + {}^{n-3}\mathfrak{M} + {}^{n-3}\overset{+1}{\mathfrak{M}}$

u. s. f.

Ist n eine ganze Zahl, so bricht die Reihe mit dem (n—m+1)ten Gliede ab. Denn die Reihe der Coefficienten in der mten Stelle fängt an, wenn n=m ist, und enthält also bis zur nten Potenz n—m+1 Glieder.

7. Ist n aber eine positive gebrochne Zahl oder eine negative, so bricht die Reihe nicht ab mit einem Coefficienten aus der mten Stelle, sondern es muß eine Ergänzung, ${}^{n-p}\overset{+1}{\mathfrak{M}}$, hinzugefügt werden, wo p+1 die Stellenzahl des Gliedes ist, mit welchem die Reihe abgebrochen wird. Z. B. es sey $n=\frac{1}{2}$, und m=3, also $\mathfrak{M}=\mathfrak{C}$, und $\overset{+1}{\mathfrak{M}}=\mathfrak{D}$. Nun ist

$$^{\frac{1}{2}}\mathfrak{D} = +\frac{1.1.3}{2.4.6} - \frac{1.3.5}{2.4.6} - \frac{3.5.7}{2.4.6} - \frac{5.7.9}{2.4.6} - \frac{7.9.11}{2.4.6} + \frac{7.9.11.13}{2.4.6.8}.$$

Oder

$$^{\frac{1}{2}}\mathfrak{D} = +\frac{1.1.3}{2.4.6} - \frac{1.3.5}{2.4.6} - \frac{3.5.7}{2.4.6} - \frac{5.7.9}{2.4.6} - \frac{7.9.11}{2.4.6} - \frac{9.11.13}{2.4.6} + \frac{9.11.13.15}{2.4.6.8}.$$

Auf diese Art kann man der Reihe so viele Glieder geben als man will.

Es sey $n = \frac{1}{3}$; $m = 3$, so ist

$$\frac{4}{3}\mathfrak{D} = \frac{1.2.5}{3.6.9} - \frac{2.5.8}{3.6.9} - \frac{5.8.11}{3.6.9} - \frac{8.11.14}{3.6.9} + \frac{8.11.14.17}{3.6.9.12},$$

und auf ähnliche Art mit mehrern Gliedern.

8. Es ist m. ${}^{n}\mathfrak{M} = (n - m + 1).{}^{n}\mathfrak{M}^{-1}$; für jeden Werth von n.

Denn es ist ${}^{n}\mathfrak{M} = \frac{n.n-1....n-m+2.n-m+1.}{1.2...m-1.{}^{1}m}$,

und ${}^{n}\mathfrak{M}^{-1} = \frac{n.n-1...n-m+2.}{1.2...m-1}$.

9. Für jeden Werth von n ist aus (1.)

$(n+1)\,1 = 1.{}^{n+1}\mathfrak{A}$; $(n+1).{}^{n}\mathfrak{C} = 4.{}^{n+1}\mathfrak{D}$;

$(n+1).{}^{n}\mathfrak{A} = 2.{}^{n+1}\mathfrak{B}$; $(n+1).{}^{n}\mathfrak{D} = 5.{}^{n+1}\mathfrak{E}$;

$(n+1).{}^{n}\mathfrak{B} = 3.{}^{n+1}\mathfrak{C}$; etc.

10. Da $1 + {}^{n}\mathfrak{A} + {}^{n}\mathfrak{B} + {}^{n}\mathfrak{C} + \text{etc.} = (1+1)^{n} = 2^{n}$; so ist $(n+1)2^{n} = 1.{}^{n+1}\mathfrak{A} + 2.{}^{n+1}\mathfrak{B} + 3.{}^{n+1}\mathfrak{C} + 4.{}^{n+1}\mathfrak{D}$; etc.

11. Es ist ${}^{n}\mathfrak{N} = 1$, und ${}^{n}\mathfrak{N}^{+1} = 0$, wenn n eine ganze Zahl ist, zufolge (2.), wenn $m = n$ gesetzt wird, für die erste Formel, und, $m = n + 1$ gesetzt, für die zweyte.

Daher ist ${}^{n-1}\mathfrak{N} = 0$.

Werth des mittelsten Coefficienten in $(a+b)^{2n}$.

12. Es ist das Product $2n.2n-1...n+2.n+1. = .2n-1.2n-3...3.1.\times 2^{n}$, wenn n eine ganze Zahl ist.

Denn man nehme die Gleichung als richtig an, so ist, wenn beide Theile mit $2(2n+1)$ multiplicirt werden,

$$.2n+2.2n+1.2n....n+2. =$$
$$.2n+1.2n-1.2n-3....3.1.\times 2^{n+2}.$$

Dieses ist eine vollkommen ähnliche Gleichung mit der angenommenen, und entsteht aus derselben, wenn $n+1$ statt n gesetzt wird. Ist nun jene Gleichung für einen Werth von n, als ganze Zahl richtig, so ist sie es auch für die nächstfolgende ganze Zahl. Sie ist aber richtig für $n=1$, oder $n=2$: oder $n=3$; also auch für $n=4$; daher für $n=5$, u. s. f. für alle ganze Zahlen.

13. Folglich ist der nte Coefficient in der 2nten Potenz, das ist,

$$^{2n}\mathfrak{N} = \frac{1.3.5....2n-1.}{2.4.6....2n} \times 2^{2n}.$$

Denn es ist $^{2n}\mathfrak{N} = \frac{2n.2n-1.....n+1.}{1.2....n}$,

woraus für ein ganzes n, vermittelst (12.) sogleich jener Werth erhalten wird.

Für ein ganzes n ist dieser Coefficient der größte in der Potenz, $(a+b)^{2n}$, und der mittelste, wenn der Coefficient von a^{2n} mitgezählt wird.

14. Da $2^{2n} = (1+1)^{2n}$, so ist 2^{2n} gleich der Summe aller Coefficienten in der Potenz $(a+b)^{2n}$, den Coefficienten von a^{2n} mitgezählt. Es verhält sich also der nte Coefficient in der 2nten Potenz zu der Summe aller, wie das Product der ungeraden Zahlen, $1.3.5..2n-1$ zu dem Producte der geraden, $2.4.6...2n$.

15. Es sey π der halbe Umfang eines Kreises, dessen Halbmesser die Einheit ist, so ist $\frac{\pi}{2} =$

$$\frac{2.2.4.4.6.6.8.8.10.10.\text{etc.}}{1.3.3.5.5.7.7.9.9.11.\text{etc.}}$$ (Cyklometrie, 29.).

Bricht man im Zähler mit einem ganzen Paare Factoren ab, so ist $\sqrt{\frac{(2n+1)\pi}{2}} > \frac{2.4.6...2n}{1.3.5...2n-1}$.

Bricht man aber im Nenner mit einem ganzen Paar Factoren ab, so ist $V\frac{2n\pi}{2} < \frac{2.4.6....2n}{1.3.5...2n-1.}$.

16. Daher ist ${}^{2n}\mathfrak{N} > 2^{2n}.V\frac{2}{(2n+1)\pi}$,

und ${}^{2n}\mathfrak{N} < 2^{2n}.V\frac{2}{2n\pi}$.

In einer ungeraden Potenz sind die Coefficienten der beiden mittelsten Glieder einander gleich, und jeder halb so groß als der Coefficient des mittelsten in der nächstfolgenden geraden Potenz.

Diese Formeln dienen zur Berechnung des mittelsten Coefficienten, wenn der Exponens sehr groß ist, welches in der Wahrscheinlichkeits-Rechnung vorkommt.

17. Die Formeln (16.) hat Stirling durch Interpolation gewisser Reihen gefunden, zugleich mit zweyerley Ergänzungsreihen, in der Schrift, Methodus differentialis, p. 119. Londini 1730. Moivre hat Stirlings Formeln vorläufig bekannt gemacht, in den Miscellaneis analyticis, p. 170. Eine andere Annäherungsformel hat Moivre in diesen Miscellaneen p. 102. mitgetheilt, und in einer allgemeinern Gestalt in der Doctrine of Chances, 2d edit. p. 236.

Summirung der Producte je zweyer Binomial-Coefficienten aus verschiedenen Potenzen oder aus derselben Potenz.

18. Die Reihe der Binomial-Coefficienten für die Exponenten α und β sey, nach der eingeführten Bezeichnung,

$$1, {}^{\alpha}\mathfrak{A}, {}^{\alpha}\mathfrak{B}, {}^{\alpha}\mathfrak{C} \ldots {}^{\alpha}\mathfrak{M}^{-1}, {}^{\alpha}\mathfrak{M}, {}^{\alpha}\mathfrak{M}^{+1} \ldots$$

$$1, {}^{\beta}\mathfrak{A}, {}^{\beta}\mathfrak{B}, {}^{\beta}\mathfrak{C} \ldots {}^{\beta}\mathfrak{M}^{-1}, {}^{\beta}\mathfrak{M}, {}^{\beta}\mathfrak{M}^{+1} \ldots$$

Man multiplicire die Coefficienten der einen Reihe folgweise durch die der andern, entweder in der Ordnung,

wie sie hier folgen, den ersten mit dem ersten, den zweyten mit dem zweyten, u. s. w. oder in entgegengesetzter Ordnung, als 1 in der ersten Reihe mit dem mten in der zweyten, den zweyten in jener mit dem (m—1)ten in dieser, u. s. f. die Aufgabe ist, die Summe dieser Producte zu finden.

19. Zuerst die Producte nach der Folge der Glieder.

I. Es ist nach (5)

$$^{\alpha}\mathfrak{M} = {}^{\alpha-1}\overline{\mathfrak{M}}^{1} + {}^{\alpha-1}\mathfrak{M}^{1},$$

$$^{\beta}\mathfrak{M} = {}^{\beta-1}\overline{\mathfrak{M}}^{1} + {}^{\beta-1}\mathfrak{M}.$$

und nach (8.)

$$m.\,{}^{\alpha}\mathfrak{M} = (\alpha - m + 1).\,{}^{\alpha}\overline{\mathfrak{M}}^{1},$$

$$m.\,{}^{\beta}\mathfrak{M} = (\beta - m + 1).\,{}^{\beta}\overline{\mathfrak{M}}^{1}.$$

II. Hieraus entstehen folgende Werthe der Producte zweyer Binomial-Coefficienten in derselben Stelle:

$$m.\,{}^{\alpha}\mathfrak{M}.\,{}^{\beta}\mathfrak{M} = (\alpha - m + 1).\,{}^{\alpha}\overline{\mathfrak{M}}.\,{}^{\beta-1}\overline{\mathfrak{M}} + m.\,{}^{\alpha}\mathfrak{M}.\,{}^{\beta-1}\mathfrak{M}.$$

$$m.\,{}^{\alpha}\mathfrak{M}.\,{}^{\beta}\mathfrak{M} = (\beta - m + 1).\,{}^{\alpha-1}\overline{\mathfrak{M}}.\,{}^{\beta}\overline{\mathfrak{M}} + m.\,{}^{\alpha-1}\mathfrak{M}.\,{}^{\beta}\mathfrak{M}.$$

III. Man setze für m folgweise 1, 2, 3, etc. so ist, nach der ersten Formel,

$$1.\,{}^{\alpha}\mathfrak{A}.\,{}^{\beta}\mathfrak{A} = \alpha.1.1 + 1.\,{}^{\alpha}\mathfrak{A}.\,{}^{\beta-1}\mathfrak{A}$$

$$2.\,{}^{\alpha}\mathfrak{B}.\,{}^{\beta}\mathfrak{B} = (\alpha-1).\,{}^{\alpha}\mathfrak{A}.\,{}^{\beta-1}\mathfrak{A} + 2.\,{}^{\alpha}\mathfrak{B}.\,{}^{\beta-1}\mathfrak{B}$$

$$3.\,{}^{\alpha}\mathfrak{C}.\,{}^{\beta}\mathfrak{C} = (\alpha-2).\,{}^{\alpha}\mathfrak{B}.\,{}^{\beta-1}\mathfrak{B} + 3.\,{}^{\alpha}\mathfrak{C}.\,{}^{\beta-1}\mathfrak{C}$$

$$4.\,{}^{\alpha}\mathfrak{D}.\,{}^{\beta}\mathfrak{D} = (\alpha-3).\,{}^{\alpha}\mathfrak{C}.\,{}^{\beta-}\mathfrak{C} + 4.\,{}^{\alpha}\mathfrak{D}.\,{}^{\beta-1}\mathfrak{D}$$

. . .
. . .
. . .

$$(m-1).\ {}^{\alpha}\overline{\mathfrak{M}}^{-1}.\ {}^{\beta}\overline{\mathfrak{M}}^{-1} = (\alpha-m+2).\ {}^{\alpha}\overline{\mathfrak{M}}^{-2}.\ {}^{\beta-1}\overline{\mathfrak{M}}^{-2} + (m-1).\ {}^{\alpha}\overline{\mathfrak{M}}^{-1}.\ {}^{\beta-1}\overline{\mathfrak{M}}^{-1}.$$

$$m.\ {}^{\alpha}\mathfrak{M}.\ {}^{\beta}\mathfrak{M} = (\alpha-m+1).\ {}^{\alpha}\overline{\mathfrak{M}}^{-1}.\ {}^{\beta-1}\overline{\mathfrak{M}}^{-1} + m.\ {}^{\alpha}\mathfrak{M}.\ {}^{\beta-1}\mathfrak{M}.$$

IV. Die Summe der Theile linker Hand bezeichne man durch S, so ist, wenn rechter Hand der erste Theil jedes Gliedes mit dem zweyten des vorhergehenden zusammen genommen wird,

$$S = \alpha(1.1 + {}^{\alpha}\mathfrak{A}.{}^{\beta-1}\mathfrak{A} + {}^{\alpha}\mathfrak{B}.{}^{\beta-1}\mathfrak{B} + {}^{\alpha}\mathfrak{C}.{}^{\beta-1}\mathfrak{C} \ldots\ldots + {}^{\alpha}\overline{\mathfrak{M}}^{-1}.{}^{\beta-1}\overline{\mathfrak{M}}^{-1}) + m.\ {}^{\alpha}\mathfrak{M}.\ {}^{\beta-1}\mathfrak{M}.$$

V. Aus der zweyten Formel in II. welche aus der ersten durch Vertauschung von α und β entsteht, ist auf dieselbe Art.

$$S = \beta(1.1 + {}^{\alpha-1}\mathfrak{A}.{}^{\beta}\mathfrak{A} + {}^{\alpha-1}\mathfrak{B}.{}^{\beta}\mathfrak{B} + {}^{\alpha-1}\mathfrak{C}.{}^{\beta}\mathfrak{C} \ldots\ldots + {}^{\alpha-1}\overline{\mathfrak{M}}^{-1}.{}^{\beta}\overline{\mathfrak{M}}^{-1}) + m.\ {}^{\alpha-1}\mathfrak{M}.{}^{\beta}\mathfrak{M}.$$

VI. Man nehme α und β für ganze positive Zahlen, damit die Reihe der Coefficienten irgendwo abbreche, lasse β die größere Zahl bedeuten, und setze $m = \alpha$. Es ist alsdann ${}^{\alpha}\mathfrak{M} = 1$, und ${}^{\alpha-1}\mathfrak{M} = 0$ (II.). Nun geben die beiden gleichen Werthe von S die Gleichung,

$$1.1 + {}^{\alpha}\mathfrak{A}.{}^{\beta-1}\mathfrak{A} + {}^{\alpha}\mathfrak{B}.{}^{\beta-1}\mathfrak{B} + {}^{\alpha}\mathfrak{C}.{}^{\beta-1}\mathfrak{C} \ldots\ldots + {}^{\alpha}\overline{\mathfrak{M}}^{-1}.{}^{\beta-1}\overline{\mathfrak{M}}^{-1} + {}^{\alpha}\mathfrak{M}.{}^{\beta-1}\mathfrak{M} = \frac{\beta}{\alpha}(1.1 + {}^{\alpha-1}\mathfrak{A}.{}^{\beta}\mathfrak{A} + {}^{\alpha-1}\mathfrak{B}.{}^{\beta}\mathfrak{B} + {}^{\alpha-1}\mathfrak{C}.{}^{\beta}\mathfrak{C} \ldots\ldots + {}^{\alpha-1}\overline{\mathfrak{M}}^{-1}.{}^{\beta}\overline{\mathfrak{M}}^{-1}).$$

VII. Die Reihe in dem zweyten Theile der Gleichung enthält ein Glied weniger als die Reihe in dem ersten Theile. Nun kann man statt der Reihe in dem zweyten Theile eine Reihe setzen, die noch einen Theil weniger enthält, und so fortfahren, bis daß man auf eine eintheilige

Größe kommt, und dadurch die Summe der Reihe in dem ersten Theile erhält. Es ist nämlich, wenn $\alpha - 1$ statt α, und β statt $\beta - 1$ gesetzt wird,

$$1.1 + {}^{\alpha-1}\mathfrak{A}.\,{}^{\beta}\mathfrak{A} \ldots + {}^{\alpha-1}\overset{-1}{\mathfrak{M}}.\,{}^{\beta}\overset{-1}{\mathfrak{M}}$$
$$= \frac{\beta+1}{\alpha-1}\,(1.1 + {}^{\alpha-2}\mathfrak{A}.\,{}^{\beta+1}\mathfrak{A} \ldots,$$
$$\ldots + {}^{\alpha-2}\overset{-2}{\mathfrak{M}}.\,{}^{\beta+1}\overset{-2}{\mathfrak{M}});$$

und auf ähnliche Art

$$1.1 + {}^{\alpha-2}\mathfrak{A}.\,{}^{\beta+1}\mathfrak{A} \ldots + {}^{\alpha-2}\overset{-2}{\mathfrak{M}}.\,{}^{\beta+1}\overset{-2}{\mathfrak{M}}$$
$$= \frac{\beta+2}{\alpha-2}\,(1.1 + {}^{\alpha-2}\mathfrak{A}.\,{}^{\beta+2}\mathfrak{A} \ldots,$$
$$\ldots + {}^{\alpha-3}\overset{-3}{\mathfrak{M}}.\,{}^{\beta+2}\overset{-3}{\mathfrak{M}}).\ \text{u. s. f.}$$

wobey zu bemerken ist, daß ${}^{\alpha-r}\overset{-r}{\mathfrak{M}} = 1$, und ${}^{\alpha-r}\overset{-r+1}{\mathfrak{M}} = 0$ ist, weil jenes der $(m-r)$te, das ist, nach der Annahme in VI. $(\alpha-r)$te Coefficient in der Potenz mit dem Exponenten $\alpha - r$, folglich $= 1$, und der folgende, der $(m-r+1)$te $= 0$ ist.

VIII. Folglich ist

$$1.1 + {}^{\alpha}\mathfrak{A}.\,{}^{\beta-1}\mathfrak{A} \ldots + {}^{\alpha}\mathfrak{M}.\,{}^{\beta-1}\mathfrak{M}$$
$$= \frac{\beta}{\alpha}\cdot\frac{\beta+1}{\alpha-1}\cdot\frac{\beta+2}{\alpha-2}\cdots\frac{\beta+r-1}{\alpha-r+1}$$
$$(1.1 + {}^{\alpha-r}\mathfrak{A}.\,{}^{\beta+r-1}\mathfrak{A} \ldots + {}^{\alpha-r}\overset{-r}{\mathfrak{M}}.\,{}^{\beta+r-1}\overset{-r}{\mathfrak{M}})$$

IX. Wenn $r = \alpha$, so wird der vieltheilige Factor $= 1.1$, da ${}^{\circ}\mathfrak{A} = 0$ ist, und es ist die Summe der Reihe

$$1.1 + {}^{\alpha}\mathfrak{A}.\,{}^{\beta-1}\mathfrak{A} + {}^{\alpha}\mathfrak{B}.\,{}^{\beta-1}\mathfrak{B} + {}^{\alpha}\mathfrak{C}.\,{}^{\beta-1}\mathfrak{C} \ldots.$$
$$\ldots + {}^{\alpha}\overset{-1}{\mathfrak{M}}.\,{}^{\beta-1}\overset{-1}{\mathfrak{M}} + {}^{\alpha}\mathfrak{M}.\,{}^{\beta-1}\mathfrak{M}$$
$$= \frac{\beta.\beta+1.\beta+2\ldots\beta+\alpha-1}{\alpha.\alpha-1.\alpha-2\ldots 1} = {}^{\alpha+\beta-1}\overset{\alpha-1}{\mathfrak{A}},$$

Es ist nämlich der Coefficient in der Stelle α der $(\alpha-1)$te nach dem ersten, $\mathfrak{A}$.

X. Setzt man β statt $\beta-1$, so ist

$$1.1 + {}^{\alpha}\mathfrak{A}.{}^{\beta}\mathfrak{A} + {}^{\alpha}\mathfrak{B}.{}^{\beta}\mathfrak{B} + {}^{\alpha}\mathfrak{C}.{}^{\beta}\mathfrak{C} \ldots .$$

$$\ldots + {}^{\alpha}\mathfrak{M}.{}^{\beta}\mathfrak{M}^{-1} + {}^{\alpha}\mathfrak{M}.{}^{\beta}\mathfrak{M}^{-1} = {}^{\alpha}+{}^{\beta}\mathfrak{A}^{-1},$$

dem Coefficienten in der $(\alpha+\beta)$ten Potenz, dessen Stellenzahl α ist.

17. Es sey $\alpha=\beta$, so ist

$$1^2 + ({}^{\alpha}\mathfrak{A})^2 + ({}^{\alpha}\mathfrak{B})^2 + ({}^{\alpha}\mathfrak{C})^2 \ldots 1^2 = {}^{2\alpha}\mathfrak{A}^{-1},$$

das ist dem mittelsten Coefficienten in der Potenz mit dem Exponenten 2α.

18. Aus dem Werthe des mittelsten Coefficienten in $(a+b)^{2\alpha}$, der in (13.) gefunden ist, wird

$$1^2 + ({}^{\alpha}\mathfrak{A})^2 + ({}^{\alpha}\mathfrak{B})^2 + ({}^{\alpha}\mathfrak{C})^2 \ldots + 1^2$$

$$= \frac{1.3.5\ldots 2\alpha-1}{2.4.6\ldots 2\alpha} \times 2^{2\alpha}.$$

20. Exempel. Es sey $\alpha=6$; $\beta=10$, so ist

$$1.1 + 6.10 + 15.45 + 20.120 + 15.210 + 6.252$$

$$+ 1.210 = 8008 = \frac{16.15.14.13.12.11}{1.2.3.4.5.6}.$$

Ist $\alpha=6$, $\beta=6$, so ist $1.1 + 6.6 + 15.15$

$$+ 20.20 + 15.15 + 6.6 + 1.1 = 924$$

$$= \frac{12.11.10.9.8.7}{1.2.3.4.5.6}.$$

21. Den merkwürdigen Satz (18) von der Summe der Quadrate der Binomial-Coefficienten hat la Grange zufälliger Weise gefunden. Er fand nämlich für eine gewisse Wahrscheinlichkeit zuerst den einen, und für dieselbe Wahrscheinlichkeit auch den andern Ausdruck, woraus er ihre Gleichheit schloß, Mélanges de la Soc. de Turin. T.V.

Euler hat in den Actis Petrop. a. a. 1781 de mirabilibus proprietatibus unciarum binomii einen Beweis gegeben, der von dem meinigen verschieden ist. Doch sagt er wiederholt, daß er keinen directen Weg sähe, den Satz darzuthun. Mich däucht, der hier gegebene Beweis sey ein directer, da er unmittelbar von den Eigenschaften der Binomial-Coefficienten ausgeht. — Man vergleiche noch Buzengeiger von einigen merkwürdigen Eigenschaften der Binomial-Coefficienten. Archiv der Mathemat. 2. Bd. S. 161. Auch Arbogast Calcul des dérivations. nr. 434.

22. Zweytens multiplicire man je zwey Coefficienten aus den beiden Reihen (18.), in entgegengesetzter Folge genommen, in einander. Es sey der eine $= {}^{\alpha}\mathfrak{M}$; der andere ${}^{\beta}\mathfrak{N}$, so daß die Summe ihrer Stellenzahlen $= m + n = \text{const.}$ sey. Die Stelle von ${}^{\alpha}\mathfrak{A}$ und von ${}^{\beta}\mathfrak{A}$ ist die erste, so daß o die Stellenzahl für 1 in beiden Reihen bezeichnet.

I. Da $m.\ {}^{\alpha}\mathfrak{M} = (\alpha - m + 1).\ {}^{\alpha}\mathfrak{M}^{-1}$ und $n.,\ {}^{\beta}\mathfrak{N} = (\beta - n + 1).\ {}^{\beta}\mathfrak{N}^{-1}$ ist (8.), so ist $(m+n).\ {}^{\alpha}\mathfrak{M}.\ {}^{\beta}\mathfrak{N} = (\alpha - m + 1).\ {}^{\alpha}\mathfrak{M}.\ {}^{\beta}\mathfrak{N}^{-1} + (\beta - n + 1).\ {}^{\alpha}\mathfrak{M}.\ {}^{\beta}\mathfrak{N}^{-1}$.

II. Man setze folgweise für m die Werthe $0, 1, 2, 3 \ldots n-1, n$; und für n folgweise $n, n-1, n-2, n-3 \ldots 1, 0$, so ist

$n.\ 1.\ {}^{\beta}\mathfrak{N} = \quad + (\beta - n + 1).\ 1.\ {}^{\beta}\mathfrak{N}^{-1}$

$n.\ {}^{\alpha}\mathfrak{A}.\ {}^{\beta}\mathfrak{N}^{-1} = \alpha.\ 1.\ {}^{\beta}\mathfrak{N}^{-1} + (\beta - n + 2).\ {}^{\alpha}\mathfrak{A}.\ {}^{\beta}\mathfrak{N}^{-2}$

$n.\ {}^{\alpha}\mathfrak{B}.\ {}^{\beta}\mathfrak{N}^{-2} = (\alpha - 1).\ {}^{\alpha}\mathfrak{A}.\ {}^{\beta}\mathfrak{N}^{-2} + (\beta - n + 3).\ {}^{\alpha}\mathfrak{B}.\ {}^{\beta}\mathfrak{N}^{-3}$

$n.\ {}^{\alpha}\mathfrak{C}.\ {}^{\beta}\mathfrak{N}^{-3} = (\alpha - 2).\ {}^{\alpha}\mathfrak{B}.\ {}^{\beta}\mathfrak{N}^{-3} + (\beta - n + 4).\ {}^{\alpha}\mathfrak{C}.\ {}^{\beta}\mathfrak{N}^{-4}$

$$n.\ {}^{\alpha}\mathfrak{N}.\ {}^{\beta}\mathfrak{N}^{-n+1} = (\alpha - n + 2).\ {}^{\alpha}\mathfrak{N}.\ {}^{\beta}\mathfrak{N}^{-n+1} + \beta.\ {}^{\alpha}\mathfrak{N}.\ {}^{\beta}\mathfrak{N}^{-1}$$

$$n.\ {}^{\alpha}\mathfrak{N}.\ {}^{\beta}\mathfrak{N}^{-n} = (\alpha - n + 1).\ {}^{\alpha}\mathfrak{N}.\ {}^{\beta}\mathfrak{N}^{-n}\ {}^{\beta}\mathfrak{N}^{-1}$$

III. Da ${}^{\beta}\mathfrak{N}^{-n}$ das nte Glied vor dem nten ist, ist dieser Ausdruck $= 1$. Daher ist ${}^{\beta}\mathfrak{N}^{-n+1} =$, ${}^{\beta}\mathfrak{A}$. das $(n-1)$te Glied vor dem nten. Ferner ${}^{\beta}\mathfrak{N}^{-n+1} =$ ${}^{\beta}$ u. s. f.

IV. Addirt man nun aus allen Gleichungen (II.) die Theile linker Hand, und ebenfalls die Th rechter Hand, so entstehen daraus folgende beide gleich Reihen:

$$1.\ {}^{\beta}\mathfrak{N} + {}^{\alpha}\mathfrak{A}.\ {}^{\beta}\mathfrak{N}^{-1} + {}^{\alpha}\mathfrak{B}.\ {}^{\beta}\mathfrak{N}^{-2} + {}^{\alpha}\mathfrak{C}.\ {}^{\beta}\mathfrak{N}^{-3} \ldots$$

$$\ldots\ldots + {}^{\alpha}\mathfrak{N}.\ {}^{\beta}\mathfrak{A}^{-1} + {}^{\alpha}\mathfrak{N}.\ 1 =$$

$$\frac{\alpha + \beta - n + 1}{n}\ (1.\ {}^{\beta}\mathfrak{N}^{-1} + {}^{\alpha}\mathfrak{A}.\ {}^{\beta}\mathfrak{N}^{-2} + {}^{\alpha}\mathfrak{B}.\ {}^{\beta}$$

$$+ {}^{\alpha}\mathfrak{C}.\ {}^{\beta}\mathfrak{N}^{-4} \ldots\ldots + {}^{\alpha}\mathfrak{N}.\ {}^{\beta}\mathfrak{A}^{-2} + {}^{\alpha}\mathfrak{N}.\ 1)$$

V. Die Reihe in dem zweyten Theile der Gleichu läßt sich in eine Reihe verwandeln, die ein Glied weni als jene hat, so wie dieselbe ein Glied weniger enth als die Reihe in dem ersten Theile. Es ist nämlich, we $n-1$ statt n gesetzt wird,

$$1.\ {}^{\beta}\mathfrak{N}^{-1} + {}^{\alpha}\mathfrak{A}.\ {}^{\beta}\mathfrak{N}^{-2} \ldots + {}^{\alpha}\mathfrak{N}.\ {}^{\beta}\mathfrak{A}^{-2} + {}^{\alpha}\mathfrak{N}.\ {}^{\beta}\mathfrak{N}^{-1}.$$

$$= \frac{\alpha + \beta - n + 2}{n - 1}\ (1.\ {}^{\beta}\mathfrak{N}^{-2} + {}^{\alpha}\mathfrak{A}.\ {}^{\beta}\mathfrak{N}^{-3} \ldots + {}^{\alpha}\mathfrak{N}.\ 1$$

Ferner, wenn $n-2$ statt n gesetzt wird,

$$1.\ {}^{\beta}\mathfrak{N}^{-2} + {}^{\alpha}\mathfrak{A}.\ {}^{\beta}\mathfrak{N}^{-3} \ldots\ldots + {}^{\alpha}\mathfrak{N}.\ {}^{\beta}\mathfrak{A}^{-3} + {}^{\alpha}\mathfrak{N}.\ {}^{\beta}\mathfrak{N}^{-2}.$$

$$= \frac{\alpha + \beta - n + 3}{n - 2}\ (1.\ {}^{\beta}\mathfrak{N}^{-3} + {}^{\alpha}\mathfrak{A}.\ {}^{\beta}\mathfrak{N}^{-4} \ldots + {}^{\alpha}\mathfrak{N}.\ {}^{\beta}\mathfrak{N}^{-3}.$$

u. s. f.

VI. Demnach ist

$$1 \cdot {}^{\beta}\mathfrak{N} + {}^{\alpha}\mathfrak{A} \cdot {}^{\beta}\mathfrak{N}^{-1} \ldots + {}^{\alpha}\mathfrak{N}^{-1} \cdot {}^{\beta}\mathfrak{A} + {}^{\alpha}\mathfrak{N} \cdot 1$$
$$= \frac{\alpha+\beta-n+1}{n} \cdot \frac{\alpha+\beta-n+2}{n-1} \cdot \frac{\alpha+\beta-n+3}{n-2} \ldots$$
$$\ldots \times \frac{\alpha+\beta-n+r}{n-r+1} (1 \cdot {}^{\beta}\mathfrak{N}^{-r} + {}^{\alpha}\mathfrak{A} \cdot {}^{\beta}\mathfrak{N}^{-r-1} \ldots + {}^{\alpha}\mathfrak{N}^{-r} \cdot 1).$$

VII. Es sey $r = n$, so ist ${}^{\beta}\mathfrak{N}^{-r} = 1$, und ${}^{\beta}\mathfrak{N}^{-r-1} = 0$, also

$$1 \cdot {}^{\beta}\mathfrak{N} + {}^{\alpha}\mathfrak{A} \cdot {}^{\beta}\mathfrak{N}^{-1} + {}^{\alpha}\mathfrak{B} \cdot {}^{\beta}\mathfrak{N}^{-2} + {}^{\alpha}\mathfrak{C} \cdot {}^{\beta}\mathfrak{N}^{-3}$$
$$\ldots\ldots + {}^{\alpha}\mathfrak{N}^{-1} \cdot {}^{\beta}\mathfrak{A} + {}^{\alpha}\mathfrak{N} \cdot 1 =$$
$$\frac{\alpha+\beta-n+1}{n} \cdot \frac{\alpha+\beta-n+2}{n-1} \cdot \frac{\alpha+\beta-n+3}{n-2} \ldots$$
$$\ldots \times \frac{\alpha+\beta}{1}.$$

$= {}^{\alpha+\beta}\mathfrak{N}$, dem nten Coefficienten in $(a+b)^{\alpha+\beta}$.

23. Exempel. Es sey $\alpha = 10$; $\beta = 8$; $n = 6$, so ist $1.28 + 10.56 + 45.70 + 120.56 + 210.28 + 252.8 + 210.1 = 18564$

$$= \frac{18.17.16.15.14.13}{1.2.3.4.5.6}.$$

24. Der Satz ist sehr wichtig, weil darauf der kürzeste und einleuchtendste Beweis des binomischen Lehrsatzes in seiner Allgemeinheit gegründet wird. Es darf hier unter α und β jede Art von Zahl verstanden werden, ganze oder gebrochne, positive oder negative, weil die Formeln, woraus der Satz hergeleitet ist, für alle Arten von Zahlen gelten.

25. Man setze für n folgweise die Zahlen 1, 2, 3, etc so erhält man folgende Gleichungen:

$$1.\ {}^{\beta}\mathfrak{A} + {}^{\alpha}\mathfrak{A}.\ 1 = {}^{\alpha+\beta}\mathfrak{A}$$
$$1.\ {}^{\beta}\mathfrak{B} + {}^{\alpha}\mathfrak{A}.\ {}^{\beta}\mathfrak{A} + {}^{\alpha}\mathfrak{B}.\ 1 = {}^{\alpha+\beta}\mathfrak{B}.$$
$$1.\ {}^{\beta}\mathfrak{C} + {}^{\alpha}\mathfrak{A}.\ {}^{\beta}\mathfrak{B} + {}^{\alpha}\mathfrak{B}.\ {}^{\beta}\mathfrak{A} + {}^{\alpha}\mathfrak{C}.\ 1 = {}^{\alpha+\beta}\mathfrak{C}$$
$$1.\ {}^{\beta}\mathfrak{D} + {}^{\alpha}\mathfrak{A}.\ {}^{\beta}\mathfrak{C} + {}^{\alpha}\mathfrak{B}.\ {}^{\beta}\mathfrak{B} + {}^{\alpha}\mathfrak{C}.\ {}^{\beta}\mathfrak{A} + {}^{\alpha}\mathfrak{D}.\ 1 = {}^{\alpha+\beta}\mathfrak{D}$$ u. s. f.

Product zweyer Reihen, die aus den Binomialcoefficienten mit Potenzen einer unbestimmten Größe z verbunden, zusammengesetzt sind.

26. Es werden die beiden Reihen:

$$1 + {}^{\alpha}\mathfrak{A}z + {}^{\alpha}\mathfrak{B}z^2 + {}^{\alpha}\mathfrak{C}z^3 + {}^{\alpha}\mathfrak{D}z^4 + \text{etc.} = M$$

und

$$1 + {}^{\beta}\mathfrak{A}z + {}^{\beta}\mathfrak{B}z^2 + {}^{\beta}\mathfrak{C}z^3 + {}^{\beta}\mathfrak{D}z^4 + \text{etc.} = N$$

in einander multiplicirt. Ihr Product werde durch P bezeichnet, und es sey

$$M \times N = P = 1 + az + bz^2 + cz^3 + dz^4 + ez^5 + \text{etc.}$$

Hier ist zufolge der Formeln (25.)

$$a = {}^{\alpha+\beta}\mathfrak{A}\ ;\ b = {}^{\alpha+\beta}\mathfrak{B}\ ;\ c = {}^{\alpha+\beta}\mathfrak{C},$$

u. s. f. so daß

$$M \times N = 1 + {}^{\alpha+\beta}\mathfrak{A}z + {}^{\alpha+\beta}\mathfrak{B}z^2 + {}^{\alpha+\beta}\mathfrak{C}z^3 + {}^{\alpha+\beta}\mathfrak{D}z^4 + {}^{\alpha+\beta}\mathfrak{E}z^5 + \text{etc.}$$

Das Product der beiden Reihen M, N, hat dieselbe Form, welche die Reihen haben, das ist, die Coefficienten zu den Potenzen von z werden aus $\alpha + \beta$ auf dieselbe Art zusammen gesetzt, wie die Coefficienten in der Reihe M aus α, und in der Reihe N aus β, die Zahlen α und β mögen ganze oder gebrochne, positive oder negative seyn.

27. Man bezeichne die Reihen,

$$1 + {}^{\alpha}\mathfrak{A}z + {}^{\alpha}\mathfrak{B}z^2 + {}^{\alpha}\mathfrak{C}z^3 + \text{etc. durch } {}^{\alpha}S$$
$$1 + {}^{\beta}\mathfrak{A}z + {}^{\beta}\mathfrak{B}z^2 + {}^{\beta}\mathfrak{C}z^3 + \text{etc.} \ldots {}^{\beta}S$$
$$1 + {}^{\gamma}\mathfrak{A}z + {}^{\gamma}\mathfrak{B}z^2 + {}^{\gamma}\mathfrak{C}z^3 + \text{etc.} \ldots {}^{\gamma}S$$
$$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$$
$$1 + {}^{\mu}\mathfrak{A}z + {}^{\mu}\mathfrak{B}z^2 + {}^{\mu}\mathfrak{C}z^3 + \text{etc.} \ldots {}^{\mu}S.$$

so hat das Product aller dieser Reihen dieselbe Form, welche die einzelnen Reihen haben. Ist $\alpha + \beta + \gamma \ldots + \mu = n$, so ist

$${}^{\alpha}S \cdot {}^{\beta}S \cdot {}^{\gamma}S \ldots {}^{\mu}S = {}^{n}S.$$

28. Es sey $\alpha = \beta = \gamma \ldots = \mu$, und $n = m\alpha$, so ist $({}^{\alpha}S)^m = {}^{m\alpha}S$.

29. Daher ist ${}^{\alpha}S = ({}^{n}S)^{\frac{1}{m}}$, wenn $\alpha = \frac{n}{m}$ ist, es mag α eine gebrochne oder ganze Zahl seyn, weil der Satz (26.) auch für gebrochne gilt. Oder es ist

$$({}^{n}S)^{\frac{1}{m}} = 1 + {}^{\frac{n}{m}}\mathfrak{A}z + {}^{\frac{n}{m}}\mathfrak{B}z^2 + {}^{\frac{n}{m}}\mathfrak{C}z^3 + \text{etc.}$$

woraus erhellt, daß ein gebrochner Exponent $\frac{n}{m}$ in den Coefficienten die Ausziehung der mten Wurzel aus der Reihe $1 + {}^{n}\mathfrak{A}z + {}^{n}\mathfrak{B}z^2 + {}^{n}\mathfrak{C}z^3 + \text{etc.}$ anzeigt.

30. Ein negativer Exponent der Reihe ${}^{-n}S$ zeigt die Division von 1 durch ${}^{+n}S$ an. Denn es sey m eine größere Zahl als n, so ist ${}^{m}S = {}^{n}S \cdot {}^{m-n}S$, also $\frac{{}^{m}S}{{}^{n}S} = {}^{m-n}S$. Die Form des Quotienten bleibt dieselbe, wenn m kleiner als n ist, also ist sie für einen negativen Exponenten noch diejenige, welche die Reihen ${}^{m}S$ und ${}^{n}S$ haben, wie in dem Falle da m größer als n ist. Ist $m = 0$, so ist ${}^{0}S = 1$, und $\frac{1}{{}^{n}S} = {}^{-n}S$,

das ist

$$\frac{1}{{}^{n}S} = 1 + {}^{-n}\mathfrak{A}z + {}^{-n}\mathfrak{B}z^2 + {}^{-n}\mathfrak{C}z^3 + \text{etc.}$$

wo die Coefficienten ihre Werthe aus (1.) erhalten, wenn n mit — n vertauscht wird.

31. Den wichtigen Satz (26.) hat zuerst Euler in den Comment. novis Petrop. T. XIX. a. a. 1774. (Demonstratio Theorematis Newtoniani §. 7.) vorgetragen, aber den Beweis nur darauf gegründet, weil der Satz für ganze Zahlen α, β, gilt. Es ist nämlich, bey dieser Voraussetzung,

$$(1+z)^{\alpha} = 1 + {}^{\alpha}\mathfrak{A}z + {}^{\alpha}\mathfrak{B}z^2 + {}^{\alpha}\mathfrak{C}z^3 + \text{etc.}$$
$$(1+z)^{\beta} = 1 + {}^{\beta}\mathfrak{A}z + {}^{\beta}\mathfrak{B}z^2 + {}^{\beta}\mathfrak{C}z^3 + \text{etc.}$$

und auch

$$(1+z)^{\alpha+\beta} = 1 + {}^{\alpha+\beta}\mathfrak{A}z + {}^{\alpha+\beta}\mathfrak{B}z^2 + \text{etc.}$$

Da nun $(1+z)^{\alpha} \times (1+z)^{\beta} = (1+z)^{\alpha+\beta}$ ist, so hat das Product dieselbe Form, welche die beiden Factoren haben. Da bey der Multiplication die Form des Products von der Größe unabhängig ist, so schließt Euler, daß die Zusammensetzung des Products dieselbe bleibe, von welcher Art auch die Zahlen α und β seyn mögen, und nennt diese Beweisart ein ratiocinium non vulgare.

Bald darauf hat Segner in den Mem. de Berlin a. 1777 den Satz durch wirkliche Multiplication dargethan, aber nur für die Coefficienten der sechs ersten Potenzen von z.

L'Huilier in Genf hat auf demselben Wege aber schärfer den Beweis geführt, die Coefficienten der fünf ersten Potenzen wirklich entwickelt, und darauf gezeigt, daß wenn das bey diesen Coefficienten bemerkte Gesetz für den mten gilt, es auch für den (m + 1)ten gelte, daher allgemein sey. Principiorum calculi differentialis et integr. expositio. Tubingae 1795. pag. V.

Die beschwerliche Rechnung bey diesem Verfahren hat Rothe durch den Gebrauch der auch hier angewandten Bezeichnungen der Binomial-Coefficienten und der Distanz-Exponenten vermieden. Theorema binomiale ex simplicissimis Anal. finit. fontibus universaliter demonstratum. Lipsiae 1796. Diesen Beweis habe ich hier mit einigen Veränderungen vorgetragen.

Früher schon hat Busse auf eine elementarische Art mit weniger Rechnung durch eine geschickte Schlußweise den Satz, daß das Product ${}^{m}S.{}^{n}S$ gleich und ähnlich ist der Reihe ${}^{m+n}S$, erwiesen in seinen kleinen Beyträgen zur Mathematik und Physik, Dessau 1785. St. 2. Die bequeme Bezeichnung, ${}^{m}S$, scheint von ihm zuerst gebraucht zu seyn.

Einen andern Beweis des Eulerischen Satzes von der Ähnlichkeit des Products mit den Factoren, $1 + {}^{\alpha}Az + \text{etc.}$ und $1 + {}^{\beta}Az + \text{etc.}$ hat Pfaff in einem Programm: Peculiaris differentialia investigandi ratio ex theoria functionum deducta. Helmstadii 1788. §. XII. angedeutet. Um die Kraft des Beweises völlig zu fassen, muß man die Coefficienten von x^{μ} und $x^{\mu+1}$ ausführlich entwickeln.

Binomischer Lehrsatz (Theorema binomiale) ist die analytische Formel, welche die Zusammensetzung einer Potenz des Binomium oder der zweytheiligen Größe, $a+b$, aus den beiden Theilen, a, b und dem Exponenten der Potenz darstellt.

1. Es sey der Exponent der Potenz $= n$, so ist

$$(a+b)^n = a^n + na^{n-1}b + \frac{n.n-1}{1.2}a^{n-2}b^2$$

$$+\frac{n.n-1\ n-2.}{1.2.\ 3}a^{n-3}b^3 + \frac{n.n-1.n-2.n-3.}{1.2.\ 3.\ 4}a^{n-4}b^4$$

$$\ldots\ldots + \frac{n.n-1\ldots\ldots n-r+1.}{1.2.\ldots r}a^{n-r}b^r + \text{etc.}$$

Das rte unbestimmte Glied zeigt die allgemeine Form der Glieder an. Wenn b subtractiv ist, so ändern die ungeraden Potenzen von b ihr Vorzeichen.

2. Die Formel ist allgemein, es mag der Exponens n eine ganze oder gebrochne, eine positive oder negative Zahl seyn. Sie ist eine der wichtigsten und schönsten in der Analysis, und muß gleich in ihrem ganzen Umfange, für alle Arten von Exponenten, erwiesen werden, da sie in der Allgemeinheit erst ihre wichtigste Anwendung hat. Doch ist es nützlich, den Satz zuerst für ganze Exponenten zu erweisen, da der Beweis aus der Lehre von der Multiplication und von den Combinationen leicht geführt werden kann, und die deutliche Einsicht dieses Falles die Formel in ihrer Allgemeinheit begreiflicher macht.

3. Das Product aus den zweytheiligen verschiedenen Factoren $a+b$; $c+d$; $e+f$; $g+h$; etc. besteht aus den Partialproducten je eines Theils aus jedem Factor. Ist die Anzahl der Factoren $= n$, so besteht jedes Partialproduct aus n eintheiligen verschiedenen Factoren, und ist nur ein einziges mahl vorhanden. Sind aber die Factoren einander gleich, so daß $a = c = e = g =$ etc., und $b = d = f = h =$ etc., so bestehen die Partialproducte entweder aus n gleichen eintheiligen Factoren, a oder b; oder aus einer Anzahl gleicher, a, und einer Anzahl gleicher, b, zusammen aus n Factoren. Die Partialproducte in dem letztern Falle kommen mehrmahls vor, weil sie in die Stelle, mehrerer Partialproducte für ungleiche Factoren treten; die beiden Partialproducte a^n, b^n kommen aber jedes nur einmahl vor, da sie aus den einzigen Producten der ersten oder der zweyten Theile, aceg... oder bdfh..., entstehen.

4. Die verschiedenen Arten der Partialproducte sind demnach a^n; $a^{n-1}b$; $a^{n-2}b^2$; $a^{n-3}b^3$ ..., $a^{n-r}b^r$, etc. wo auch b mit a vertauscht werden kann.

5. Man unterscheide die a der verschiedenen Factoren durch beygesetzte Ziffern, wie $a1$; $a2$, $a3$, etc. eben so die b durch $b1$, $b2$, $b3$, etc. Die Producte a^n und

b^n kommen jedes nur einmahl vor, wie ſchon bemerkt iſt, und wie es auch die Multiplication unmittelbar zeigt.

6. Das Product $a^{n-1}b$ kommt ſo oft vor, als oft es möglich iſt, $n-1$ Factoren aus den n Factoren $a1$, $a2$, $a3$, ... an, und einen Factor aus $b1$, $b2$, $b3$, ... bn zu nehmen. Zufolge der Lehre von den Combinationen (ſ. Combination, I.) iſt jene Anzahl $= \frac{n.n-1 \ldots 2}{1.2..n-1} = n$. und dieſe $= \frac{n}{1}$. Beide ſind gleich, weil aus n Dingen $n-1$ ſo oft genommen werden können als eines.

Das Product $a^{n-2}b^2$ kommt ſo oft vor, als es möglich iſt, $n-2$ Factoren aus der Reihe $a1, a2..an$. und 2 Factoren aus der Reihe $b1, b2..bn$ zu nehmen, das iſt $\frac{n.n-1.}{1.2}$ mahl.

Das Product $a^{n-3}b^3$ kommt ſo oft vor, als ſich $n-3$ Factoren aus der Reihe $a1, a2...an$, und 3 Factoren aus $b1, b2...bn$ nehmen laſſen, alſo $\frac{n.n-1.n-2.}{1 \quad 2. \quad 3}$ mahl.

7. Allgemein: das Product $a^{n-r}b^r$ kommt ſo oft vor, als ſich $n-r$ Faktoren aus der Reihe $a1, a2..an$, und r Factoren aus der Reihe $b1, b2. bn$ nehmen laſſen, das iſt $\frac{n.n-1....n-r+1.}{1. \quad 2. \ldots \quad r}$ mahl.

Folglich iſt, wenn n eine ganze Zahl bedeutet, die Formel für $(a+b)^n$ erwieſen. Die Reihe bricht ab, wenn $r=n$ iſt, oder mit dem $(r+1)$ten Gliede, welches iſt $= \frac{n.n-1 \ldots n-n+1}{1. \quad 2. \ldots \quad n} a^{n-n}b^n = b^n$.

Eine Tafel der Werthe dieſer Coefficienten für $n = 1$ bis 12 iſt in dem Artikel: Binomial-Coefficienten (4.) anzutreffen.

8. Daß die für ganze Exponenten der Potenz, $(a+b)^n$, gefundene entwickelte Form auch für gebrochne poſitive, und für negative, ſeyn ſie ganze oder gebrochne, gelte, mag man ohne Rechnung folgendergeſtalt erweiſen.

I. Der Ausdruck, $(a+b)^{\frac{n}{m}}$, mit einem poſitiven Exponenten, bedeutet ein in der geometriſchen Reihe, $1 : (a+b)^1 ; (a+b)^2 : (a+b)^3 :$ etc. irgendwo eingeſchaltetes Glied. Es ſey $n = mp + q$, wo p eine ganze Zahl oder Null, und q eine ganze Zahl, kleiner als m bedeutet, ſo daß $\frac{n}{m} = p + \frac{q}{m}$ iſt. Alsdann iſt $(a+b)^{\frac{n}{m}}$ ein zwiſchen $(a+b)^p$ und $(a+b)^{p+1}$ eingeſchaltetes Glied, und von $m-1$ Gliedern, die unter ſich und mit jenen beiden in geometriſcher Fortſchreitung ſtehen, dasjenige, deſſen Stelle nach $(a+b)^p$ durch q angegeben wird. Die interpolirte Reihe iſt

$$1 : (a+b)^{\frac{1}{m}} : (a+b)^{\frac{2}{m}} : (a+b)^{\frac{3}{m}} : \text{etc.}$$

deren Glieder nach demſelben Geſetze, wie die Glieder der urſprünglichen Reihe gebildet werden. In den entwickelten Werthen der ganzen Potenzen ſchalte man nun ebenfalls zwiſchen je zweyen ſolchen Werthen $m-1$ Glieder ein. Dieſes heißt, die eingeſchalteten Glieder nach demſelben Geſetze wie jene bilden. Das Geſetz betrifft theils die Producte aus den Factoren a und b, theils die Coefficienten derſelben. Da $(a+b)^n = a^n \left(1 + \frac{b}{a}\right)^n$, ſo iſt auch $(a+b)^{\frac{n}{m}} = a^{\frac{n}{m}} \left(1 + \frac{b}{a}\right)^{\frac{n}{m}}$, und die Entwickelung der gebrochenen Potenz enthält eben

ſo den Factor $a^{\frac{n}{m}}$, wie der von $(a+b)^n$ den Factor a^n. Folglich hat man für den Factor $a^{n-r}b^r$, das iſt, $a^n \cdot \frac{b^r}{a^r}$, nur zu ſetzen $a^{\frac{n}{m}} \cdot \frac{b^r}{a^r}$, oder $a^{\frac{n}{m}-r}b^r$, weil der zweyte Factor dieſes Products von der Stelle des eingeſchalteten Gliedes nicht abhängt. Die Coefficienten werden theils durch ihre Stelle r in der entwickelten Reihe, theils durch die Stelle n des Gliedes $(a+b)^n$ in der geometriſchen Reihe beſtimmt. Setzt man auch hier für n die Stelle des eingeſchalteten Gliedes, ſo wird die entwickelte Reihe für das eingeſchaltete Glied nach demſelben Geſetze wie für ein Glied der urſprünglichen Reihe gebildet, und jene Reihe gilt für jenes Glied, das iſt, für $(a+b)^{\frac{n}{m}}$, eben ſo wie dieſe Reihe für ein Glied mit einem ganzen Exponenten.

II. Die Potenzen von $(a+b)$ mit negativen ganzen Exponenten, $(a+b)^{-n}\left(=\frac{1}{(a+b)^n}\right)$, werden in der rückwärts fortgeſetzten geometriſchen Reihe, nach demſelben Geſetze, wie die Potenzen $(a+b)^n$ mit bejahten Exponenten gebildet. Da $(a+b)^{-n} = a^{-n}\left(1+\frac{b}{a}\right)^{-n}$, ſo hat man in der entwickelten Reihe erſtlich für $a^{n-r}b^r$ oder $a^n \cdot \frac{b^r}{a^r}$ zu ſetzen $a^{-n} \cdot \frac{b^r}{a^r}$ oder $a^{-n-r} \cdot b^r$. Setzt man in dem Coefficienten $-n$ ſtatt n, ſo entſtehen dadurch Größen, die ſich auf die durch $-n$ bezeichneten Stellen eben ſo beziehen, wie jene auf die poſitiven Stellen. Die Vertauſchung von $+n$ mit $-n$ in dem Werthe von $(a+b)^n$ giebt daher eben das Glied, welches durch $(a+b)^{-n}$ bedeutet wird.

III. Der Ausdruck, $(a+b)^{-\frac{n}{m}}$ bedeutet ein in der Reihe $1:(a+b)^{-1}:(a+b)^{-2}$ etc. eingeschaltetes Glied, dessen Stelle durch $-\frac{n}{m}$ bezeichnet wird, wie die Stelle von $(a+b)^{\frac{n}{m}}$ durch $+\frac{n}{m}$. So wie nun der Werth des letztern erhalten wird dadurch, daß in dem Werthe von $(a+b)^n$ für n gesetzt wird $\frac{n}{m}$, so wird auch der Werth von $(a+b)^{-\frac{n}{m}}$ aus dem von $(a+b)^{-n}$ erhalten, wenn $-n$ mit $-\frac{n}{m}$ vertauscht wird, also aus dem von $(a+b)^n$ durch Vertauschung von n mit $-\frac{n}{m}$.

9. Es ist aber auch der Mühe werth, die Allgemeinheit des binomischen Lehrsatzes durch eine analytische Rechnung darzuthun, um einzusehen, wie er aus der Natur der Binomial-Coefficienten folget. Hiebey wollen wir die Form $(a+b)^n$ mit der $(1+z)^n$ der Bequemlichkeit wegen vertauschen. Es ist $(a+b)^n = a^n\left(1+\frac{b}{a}\right)^n$. Setzt man $\frac{b}{a}=z$, so ist $(a+b)^n = a^n(1+z)^n$, und es ist nur nöthig in der Entwickelung von $(1+z)$ für z zu setzen $\frac{b}{a}$, und die Reihe mit a^n zu multipliciren, um die Entwickelung von $(a+b)^n$ zu erhalten.

10. Satz. Es ist, wenn n, m ganze positive Zahlen bedeuten, $(1+z)^{\frac{n}{m}} =$

$$1 + \frac{n}{m} z + \frac{n.n-m.}{m.\ 2m} z^2 + \frac{n.n-m.n-2m.}{m.\ 2m\ 3m} z^3$$
$$+ \frac{n \ldots n-3m}{m \ldots 4m} z^4 \ldots\ldots + \frac{n(n-m)\ldots\ldots(n-r-1)m}{m.\ 2m \ldots\ldots rm} z^r$$
$$+ \text{ etc.}$$

Bew. Es seyn $\overset{n}{\underset{m}{\mathfrak{A}}}$, $\overset{n}{\underset{m}{\mathfrak{B}}}$, $\overset{n}{\underset{m}{\mathfrak{C}}}$, etc. Größen von der Form, wie die in dem Artikel: Binomial-Coefficienten, (1.) auf diese Weise bezeichneten, indem anstatt des einfachen Symbols n hier ein zusammengesetztes $\frac{n}{m}$ genommen wird. Auch sey ${}^nS = 1 + {}^n\mathfrak{A}z^2 + {}^n\mathfrak{B}z^2 + {}^n\mathfrak{C}z^3 + \text{etc.}$ Es ist a.a.O. (29.) erwiesen, daß $({}^nS)^{\frac{1}{m}} = 1 + \overset{n}{\underset{m}{\mathfrak{A}}}z + \overset{n}{\underset{m}{\mathfrak{B}}}z^2 + \overset{n}{\underset{m}{\mathfrak{C}}}z^3 + \text{etc.}$ Nun ist ${}^nS = (1+z)^n$. Folglich ist

$$(1+z)^{\frac{n}{m}} = 1 + \overset{n}{\underset{m}{\mathfrak{A}}}z + \overset{n}{\underset{m}{\mathfrak{B}}}z^2 + \overset{n}{\underset{m}{\mathfrak{C}}}z^3 + \text{etc.}$$

Multiplicirt man nun in den Werthen der Coefficienten von z jeden Factor des Zählers und Nenners durch m, so wird die in dem Satze aufgestellte Formel erhalten.

11. Satz. Es ist $(1+z)^{-n}$ oder $\frac{1}{(1+z)^n} =$

$$1 - nz + \frac{n.n+1.}{1.\ z} z^2 - \frac{n.n+1.n+2.}{1.\ 2.\ 3} z^3$$
$$+ \frac{n \ldots n+3.}{1 \ldots 4} z^4 \ldots \pm \frac{n.n+1 \ldots n+r-1.}{1.\ 2 \ldots r} z^r \mp \text{etc.}$$

Bew. Es sey ${}^nS = 1 + {}^n\mathfrak{A}z + {}^n\mathfrak{B}z^2 + {}^n\mathfrak{C}z^3 + \text{etc}$ und $-{}^nS = 1 + {}^{-n}\mathfrak{A}z + {}^{-n}\mathfrak{B}z^2 + {}^{-n}\mathfrak{C}z^5 + \text{etc.}$ so ist $\frac{1}{{}^nS} = -{}^nS$, wie in dem Artikel, Binomial-Coefficienten, 30. erwiesen ist. Es ist aber ${}^nS = (1+z)^n$, und daher $\frac{1}{(1+z)^n}$ oder $(1+z)^{-n} = -{}^nS$. Setzt man nun für die Coefficienten in der

durch $-^{n}S$ bezeichneten Reihe ihre Werthe, so entsteht daraus die Formel des Satzes.

12. Satz. Es ist $(1+z)^{\frac{n}{m}} =$

$$1 - \frac{n}{m}z + \frac{n.\,n+m.}{m.\,2m}z^2 - \frac{n.\,n+m.\,n+2m.}{m.\,2m.\,3.m}.z^3$$

$$+ \frac{n\ldots n+3m.}{m\ldots 4m}z^4 \ldots \pm \frac{n.n+m\ldots.(n+(r-1)m)}{m.\,2m\ldots rm}z^r$$

$$\mp \text{ etc.}$$

Der Beweis ist dem in (11.) geführten ganz ähnlich. Denn für die Reihen $+^{n}S$ und $-^{n}S$ darf n auch eine gebrochne Zahl seyn, und es bleibt $\frac{1}{{}^{n}S} = -^{n}S$. Es ist aber auch ${}^{n}S = (1+z)^{n}$, wenn n eine gebrochne Zahl ist. Setzt man $\frac{n}{m}$ für n, so ist $(1+z)^{-\frac{n}{m}}$

$$= {}^{-\frac{n}{m}}S = 1 + {}^{-\frac{n}{m}}\mathfrak{A}z + {}^{-\frac{n}{m}}\mathfrak{B}z^2 + {}^{-\frac{n}{m}}\mathfrak{C}z^3$$

$+$ etc. woraus der Satz folgt.

13. Exempel I. $(1+z)^{\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2}z - \frac{1.1}{2.4}z^2$

$$+ \frac{1.1.3}{2.4.6}z^3 - \frac{1.1.3.5}{2.4.6.8}z^4 + \frac{1.1.3.5.7}{2.4.6.8.10}z^5 - \text{etc.}$$

II. $(1+z)^{\frac{1}{3}} = 1 + \frac{1}{3}z - \frac{1.2}{3.6}z^2 + \frac{1.2.5}{3.6.9}z^3$

$$- \frac{1.2.5.8}{3.6,9.12}z^4 + \frac{1.2.5.8.11}{3.6.9.12.15}z^5 - \text{etc.}$$

III. $(1+z)^{\frac{2}{3}} = 1 + \frac{2}{3}z - \frac{2.1}{3.6}z^2 + \frac{2.1.4}{3.6.9}z^3$

$$- \frac{2.1.4.7}{3.6.9.12}z^4 + \frac{2.1.4.7.10}{3.6.9.12.15}z^5 - \text{etc.}$$

IV. $(1+z)^{-\frac{1}{2}} = 1 - \frac{1}{2}z + \frac{1.3}{2.4}z^2 - \frac{1.3.5}{2.4.6}z^3$

$+ \frac{1.3.5.7}{2.4.6.8}z^4 - \frac{1.3.5.7.9}{2.4.6.8.10}z^5 + \text{etc.}$

V. $(1+z)^{-\frac{1}{3}} = 1 - \frac{1}{3}z + \frac{1.4}{3.6}z^2 - \frac{1.4.7}{3.6.9}z^3$

$+ \frac{1.4.7.10}{3.6.9.12}z^4 - \frac{1.4.7.10.13}{3.6.9.12.15}z^5 + \text{etc.}$

14. Die Logarithmen der zehn erſten Coefficienten für die Exponenten, $\frac{1}{2}$, $-\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $-\frac{1}{3}$ ſind folgende.

	$\frac{n}{m} = \frac{1}{2}$	$n = -\frac{1}{2}$
log A	9, 6989700	9, 6989700
l. B	9, 0969100	9, 5740313
l. C	8, 7958800	9, 4948500
l. D	8, 5917601	9, 4368581
l. E	8, 4368581	9, 3911005
l. F	8, 3119193	9, 3533120
l. G	8, 2071840	9, 3211272
l. H	8, 1170073	9, 2930986
l. J	8, 0378261	9, 2682751
l. K	7, 9672450	9, 2459985

$\frac{n}{m} = \frac{1}{3}$ $\frac{n}{m} = -\frac{1}{3}$

log	A	9, 5228787	9, 5228787
l.	B	9, 0457575	9, 3467875
l.	C	8, 7904849	9, 2376431
l.	D	8, 6143936	9, 1584617
l.	E	8, 4796952	9, 0963138
l.	F	8, 3705506	9, 0451616
l.	G	8, 2787804	9, 0016957
l.	H	8, 1995990	8, 9639071
l.	J	8, 1299632	8, 9304834
l.	K	8, 0678152	8, 9005202

Diese Logarithmen sind nicht aus den Logarithmen Factoren in den Coefficienten zusammengesetzt, sond aus ihren numerischen hinlänglich genau berechneten W then gefunden.

15. Um aus einer ganzen Zahl N die mte Wurzel ziehen, zerlege man sie in zwey ganze Theile, deren erste sey $= a^m$, der zweyte $= b$, so daß a^m der Zahl möglichst nahe komme, und $N = a^m + b$, oder a $N = a^m - b$ sey. Man setze $\frac{b}{a^m} = z$, so ist N $a^m(1+z)$, wenn b additiv ist, und $N^{\frac{1}{m}} = a\,(1+z$ $= a\left(1 + \frac{1}{m}z - \frac{1.m-1.}{m.\,2m}z^2 + \frac{1.m-1.2m-1.}{m.\,2m.\,3m}\right.$ $\left. - \frac{1.m-1.2m-1.3m-1.}{m.\,2m.\,3m.\,4m}z^4 + \text{etc.}\right)$, wenn (10.) der Zahler $n =$ gesetzt wird. Um z kleiner machen, suche man zu der Zahl N einen Factor f^m,

daß das Product $f^m . N = A^m + B$ einen kleinern Werth für $\frac{B}{A^m}$ gebe, als $\frac{b}{a^m}$ hat. Die aus diesem Producte gezogene Wurzel $f . N^{\frac{1}{m}}$ mit f dividirt, giebt die gesuchte mte Wurzel aus N.

16. Exempel I. Die Quadratwurzel aus 2 bis auf die zehnte Decimalstelle zu finden.

Weil die Reihe sich dem völligen Werthe sehr langsam nähern würde, wenn man 2 in die Theile $1 + 1$ zerlegte, so multiplicire man 2 mit einem schicklichen Factor, der ein Quadrat ist. Dieser sey 25, so ist $2 \times 25 = 50 = 49 + 1$, und $\sqrt{50} = \sqrt{(49+1)} = 7\sqrt{(1+\frac{1}{49})}$ $= 7\,(1 + \frac{1}{49})^{\frac{1}{2}}$. Man multiplicire nun die Potenzen von $\frac{1}{49}$ nach ihrer Folge in die zugehörigen Binomialcoefficienten (13. I.), so wird erhalten

$\sqrt{(1+\frac{1}{49})}$	= 1,	000000	00000 0
	+ 0,	01020	40816 3
	—	5	20616 4
	+		53124
	—		678
	+		9
	= 1,	01015	25445 4
$\sqrt{50}$	= 7,	07106	78118
$\sqrt{2}$	= 1,	41421	35623

Exempel II. Die Quadratwurzel aus 12 zu finden. Sie wird in einer der Formeln zur Rectification des Kreises gebraucht. (Cyklotechnie.). Es ist $4 \times 12 = 48 = 49 - 1$, also $\sqrt{48} = 7\sqrt{(1-\frac{1}{49})}$. Die Glieder sind eben dieselben wie vorher, aber alle nach dem ersten folgenden subtractiv.

Alſo iſt $\sqrt{(1-\frac{1}{49})} = 0,9897433186 2..$

und $\sqrt{48} = 6,9282032303 4..$

$\sqrt{12} = 3,4641016151...$

Exempel III. Die Cubikwurzel aus 2 zu finden. Dieſe wird zu der arithmetiſchen Verdoppelung eines Würfels gebraucht. Zur mehrern Convergenz der Reihe für die Wurzel multiplicire man 2 mit 16 als dem Cubus von 4, ſo iſt $2 \times 64 = 125 + 3$. Es iſt $\sqrt[3]{128} = 5\sqrt[3]{\left(1+\frac{3}{125}\right)}$, wo $\frac{3}{125} = 0,024$ iſt.

Die Potenzen dieſes Bruchs werden folgweiſe in die Binomialcoefficienten für den Exponenten $\frac{1}{3}$ (13. II.) multiplicirt. Es iſt

$\sqrt[3]{(1+0,024)}$	=	1,00000	00000	00
	+	0,008		
	−	6	4	
	+		8533	33
	−		136	53
	+		2	40
	−			5
	=	1,00793	68399	15
$\sqrt[3]{128}$	=	5,03968	41995	75
$\sqrt[3]{2}$	=	1,25992	10498	9

17. Satz. Es iſt $(a+b)^n = a^n\left[1 + n.\frac{b}{a+b} + \frac{n.n+1.}{1.2.}.\frac{b^2}{(a+b)^2} + \frac{n.n+1.n+2.}{1.2.3}.\frac{b^3}{(a+b)^3} + \frac{n.n+1.n+2.n+3.}{1.2.3.4}.\frac{b^4}{(a+b)^4} + \text{etc.}\right]$.

Denn es ſey $\frac{b}{a+b} = u$, ſo iſt $b = \frac{au}{1-u}$, und $a+b = \frac{a}{1-u}$, alſo $(a+b)^n = a^n(1-u)^{-n}$. Nun iſt $(1-u)^{-n} = 1+nu+\frac{n.n+1.}{1.2}u^2+$ etc. aus (11.), wenn daſelbſt z mit $-u$ vertauſcht wird. Für u der Werth $\frac{b}{a+b}$ geſetzt, wird die Formel erhalten.

In dieſer Reihe nehmen die Potenzen von $\frac{b}{a+b}$ ſtärker ab als die von $\frac{b}{a}$, welche in der Reihe (1.) in die Potenz a^n multiplicirt ſind. Dagegen ſind für ein poſitives n die Coefficienten größer.

18. Satz. Es iſt $(a+b)^{-n} = \frac{1}{a^n}\left[1-n.\frac{b}{a+b}+\frac{n.n-1.}{1.2}.\frac{b^2}{(a+b)^2}-\frac{n.n-1.n-2.}{1.2.3}.\frac{b}{(a+b)^3}+\frac{n\ldots n-3}{1\ldots 4}.\frac{b^4}{(a+b)^4}-\text{etc.}\right]$.

Die Reihe bricht ab, wenn n eine ganze Zahl iſt. Die ins Unendliche fortlaufende Reihe für $(a+b)^{-n}$ oder $a^{-n}\left(1+\frac{b}{a}\right)^{-n}$, wenn ſie nach den Potenzen von $\frac{b}{a}$ geordnet wird, iſt hier in einige ſummatoriſche Theile zuſammen gezogen. Die Reihe folgt aus der in (17.), wenn n mit $-n$ vertauſcht wird.

19. Exempel I. Die Quadratwurzel aus 2 zu finden. Man ſetze in (17.) den Exponenten $n = \frac{1}{2}$, und ſuche, wie in (16. I.) die Quadratwurzel aus 50, das iſt, aus

$49+1$. Hier ist $a = 49$; $b = 1$, also $\frac{b}{a+b} =$
$= \frac{2}{100}$, wovon die Potenzen sehr leicht berechnet
Es ist nämlich

$$\begin{array}{rcl}
\frac{1}{2}\sqrt{50} & = & 1,000000\ 000000 \\
& + & 0,010000\ 000000 \\
& + & 150\ 000000 \\
& + & 2\ 500000 \\
& + & 43750 \\
& \pm & 787 \\
& + & 14 \\
\hline
& = & 1,0101\,52\ 544551 \\
\sqrt{50} & = & 7,0710\,67\ 811857 \\
\sqrt{2} & = & 1,4142\,13\ 56237
\end{array}$$

Exempel II. Die Quadratwurzel aus 12 findet mittelst eben dieser Zahlen, nur daß sie abwechselnd tiv und subtractiv sind. Es ist $\sqrt{12} = \frac{1}{2}$ $= \frac{1}{2}\sqrt{(49-1)}$.

Geschichte des binomischen Lehrsatzes.

20. Die Binomial-Coefficienten kommen zuer Stifels Arithmetica integra L. I. c. 5. vor, n 1544 gedruckt ist. Früher als bey Stifel hat K die Binomial-Coefficienten und ihr Gesetz nicht gefu (Gesch. d. Mathem. 1. Bd. 49. S.). Stifel sie numeros, qui peculiariter pertinent ad suas cies extractionum, und liefert sie bis zur 17ten P nur mit Weglassung der zweyten Hälfte in jeder P weil diese der erstern rückwärts genommen gleich ist. zeigt auch, wie sie nach einander durch Addition je z gefunden werden, erklärt aber nicht den Grund, diese Addition in einer Potenz die Coefficienten i nächstfolgenden giebt. Er weiß auch nicht, wi Coefficienten in jeder Potenz unabhängig von denen i niedrigern Potenzen gefunden werden.

21. Briggs war der erſte, welcher zeigte, wie die Coefficienten in jeder Potenz eines Binomium unabhängig von einander gefunden werden, nur daß er die Regel noch in Worten ausdruckt, ohne eine analytiſche Formel für ſie zu geben. Er blieb noch bey Potenzen mit ganzen Exponenten ſtehen. Dieſes nach Huttons Anzeige. Joh. Bernoulli ſchreibt die Erfindung des binomiſchen Lehrſatzes dem Paſcal zu. Von deſſen arithmetiſchen Dreyeck ſ. dieſen Artikel.

22. Newton war es, der entdeckte, daß die Form des binomiſchen Lehrſatzes, welche man für ganze Exponenten gefunden hatte, für alle Arten von Exponenten gültig iſt. Dieſe Entdeckung iſt, als eine der ſchönſten von dieſem großen Manne, auf ſeinem Grabmahle in der Weſtmünſter Abtey eingegraben. Wie er darauf gekommen iſt, erzählt er in einem Schreiben an Oldenburg, welches dieſer Leibnitzen mittheilen ſollte, vom 24. Oct. 1676. Es ſteht in dem Commercio epiſtolico Joh. Collins et aliorum de Analyſi promota, Lond. 1712, und daraus in Newtoni Opuſc. T. I. p. 328 ſeqq. Es war auf einem Umwege, daß er die Allgemeinheit des Satzes wahrnahm. Wallis hatte gefunden, daß alle krumme Linien, deren Gleichung iſt $y = (1 - xx)^n$, wenn n eine ganze Zahl bedeutet, ſich mittelſt eines endlichen Ausdrucks quadriren laſſen. Hieraus machte er den Schluß, daß, ſo wie der Exponent von $(1 - xx)^{\frac{1}{2}}$ das arithmetiſche Mittel zwiſchen o und 1 iſt, auch der Werth der Fläche für die krumme Linie mit der Gleichung $y = (1 - xx)^{\frac{1}{2}}$, das iſt, den Kreis, zwiſchen die Flächenräume an den Linien mit der Gleichung $y = (1 - xx)^0$ (das iſt $y = 1$), und mit der Gleichung $y = (1 - xx)^1$ fallen müſſe, er konnte aber dieſen mittlern Werth nicht finden. Newton entdeckte die Form aller interpolirten Flächenräume, und bemerkte dabey, daß die Potenzen $(1 - xx)^0$; $(1 - xx)^1$; $(1 - xx)^2$; $(1 - xx)^3$, etc. auf dieſelbe Art müßten interpolirt werden können. Zur Beſtätigung der gefundenen Formen

multiplicirte er den daraus hergeleiteten Werth von $(1-xx)^{\frac{1}{2}}$ mit eben demselben, und fand das Product gleich $1-xx$, wie es seyn muß. Er versuchte nun auch die Ausziehung der Quadratwurzel mit Literalgrößen nach der Art, wie sie bey Zahlen bewerkstelligt wird, und fand den Ausdruck der Wurzel dem auf gebrochne Exponenten erweiterten Lehrsatze gemäß. Nun setzte er die Interpolation der Reihen ganz bey Seite, und wandte die arithmetischen Operationen, als das zuverlässigere Verfahren, allein an. Wie er höhere Wurzeln durch Ausziehung gefunden hat, zeigt er nicht an. Für negative ganze Exponenten war die Rechnung leichter. Newton sagt auch: nec latuit reductio per divisionem, res utique facilior.

Newtons Beweis der erweiterten Binomial-Potenz war in der That nur Induction. Er hat die sehr brauchbare Vorstellung von Interpolation bey dieser Untersuchung zu bald aufgegeben.

23. Colson trägt in einem Commentar über Newtons Fluxionenrechnung im J. 1736 einen Beweis des binomischen Lehrsatzes für alle Arten von Exponenten durch die Differentialrechnung vor. Denselben Beweis giebt Horsley in seiner Ausgabe von Newtons Werken, T. I. p. 286, und führt dabey an, daß Raphson in seiner History of Fluxions diesen Beweis einem Heynes zuschreibt. Schärfer hat Kästner den Beweis in einem Programm 1758 abgefaßt, und hernach in der Analysis unendlicher Größen.

Gegen diese Beweisart ist in Rücksicht der Methode zu erinnern, daß das Binomial-Theorem der Analysis endlicher Größen angehört, und der Lehre von den letzten Verhältnissen der Veränderungen von Größen nicht bedürfen müsse. Übrigens ist das Verfahren sehr kurz und einleuchtend.

24. Äpinus gab einen allgemeinen Beweis des Newtonischen Lehrsatzes von der Potenz eines Binomium

in den Novis Comment. Petrop. T. VIII. a. a. 1760, 1761, woran nur das auszuſetzen ſeyn möchte, daß dabey zu viel auf Induction ankömmt.

25. Der Beweis, den Euler in den Novis Comm. Petrop. T. XIX. a. a. 1774. p. 103 geführt hat, iſt im Weſentlichen derſelbe mit dem in dieſem Artikel (10 — 13) vorgetragenen, nur daß die dabey nöthige Rechnung nicht ausgeführt, ſondern ihr Reſultat aus einer allgemeinen Beſchaffenheit des Products zweyer oder mehrerer Factoren geführt wird, ſ. Binomial-Coefficienten, 37.

26. Die Beweiſe, welche von Segner, Buſſe, l'Huilier und Rothe gegeben haben, ſind der Euleriſche mit der noch nöthigen Ergänzung. Die Schriften, worin ſie vorkommen, ſind an dem a. O. angezeigt.

27. Euler hat noch im J. 1787 einen neuen Beweis des Lehrſatzes aufgeſtellt: Nova demonſtratio, quod evolutio poteſtatum binomii Newtoniana etiam pro exponentibus fractis valeat. Nova Acta Petrop. T. V. Die Grundlage dazu iſt folgende. Erſtlich muß ſeyn $(1+x)^n = 1+Ax+Bx^2+Cx^3 \ldots + Mx^m + Nx^{m+1} +$ etc. und ſo auch $(1+x)^{n+1} = 1+A'x+B'x^2+C'x^3 \ldots + M'x^m + N'x^{m+1} +$ etc. Die Coefficienten ſind ſo beſchaffen, daß $A' = A+1$; $B' = B+A$, $C' = C+B$, und $M+N = N'$. Es kommt alſo darauf an, wie, nachdem der Werth von M gefunden iſt, der Werth des folgenden Buchſtabens N zu beſtimmen ſey, ſo daß, wenn darin $n+1$ für n geſetzt wird, und der dadurch hervorgehende Werth N' heißt, $N - N' = M$ werde.

28. La Grange trägt in ſeiner Théorie des fonctions analytiques, nr. 18. einen ſehr kurzen Beweis unſers Lehrſatzes vor, der aber weſentlich mit dem aus der Differentialrechnung genommenen übereinſtimmt.

29. In den engliſchen Tranſactionen ſind mehrere Aufſätze über Newtons Theorem enthalten: in dem 42ſten

Bande von Castillion; in dem 47sten für 1751. 52. von Th. Simpson; in dem Jahrgange für 1795 von Robertson; in dem für 1796 von Sewell. Der von dem letztern gegebene Beweis ist eine künstliche Verpflanzung der auf die Differentialrechnung gegründeten Methode in die Analysis des Endlichen.

30. In der Übersetzung der Zusätze, die la Grange zu der französischen Ausgabe von Eulers Algebra gemacht hat, ist von dem Übersetzer, Hofrath Kaußler, ein guter aber etwas umständlicher Beweis des binomischen Lehrsatzes für ganze, positive und negative, Exponenten gegeben. Er beruht auf der Summirung der gleichstelligen Coefficienten in der Folge der Potenzen.

Binomium ist eine zweytheilige Größe, wie $a+b$ oder $a+\sqrt{b}$, oder $\sqrt{a}+\sqrt{b}$, u. d. gl.

Euklides versteht unter Binomium eine zweytheilige Größe von der Form $a+\sqrt{b}$ oder $\sqrt{a}+\sqrt{b}$, wo a und b rationale Zahlen sind. (Elemente X. 37.). Es unterscheidet sich von einer Apotome nur dadurch, daß der eine Theil zu dem andern addirt wird. Euklides macht sechs Binomien oder Binomialen, so wie er sechs Apotomen unterscheidet. Das erste Binomium ist $a+\sqrt{b}$, wenn $\sqrt{(aa-b)} : a = m : n$, dem Verhältnisse zweyer rationalen Zahlen. Das zweyte ist $a+\sqrt{b}$, wenn $\sqrt{(b-aa)} : \sqrt{b} = m : n$ ist. Das dritte ist $\sqrt{a}+\sqrt{b}$, wenn $\sqrt{(a-b)} : \sqrt{a} = m : n$ ist. Das vierte ist $a+\sqrt{b}$, wenn $\sqrt{(aa-b)} : a$ ein irrationales Verhältniß ist. Das fünfte ist $a+\sqrt{b}$, wenn $\sqrt{(b-aa)} : \sqrt{b}$ ein irrationales Verhältniß ist. Das sechste Binomium ist $\sqrt{a}+\sqrt{b}$, wenn $\sqrt{(a-b)} : \sqrt{a}$ ein solches Verhältniß ist.

Biquadrat, die vierte Potenz einer Größe, wie 81 von 3. Es wird allgemein bezeichnet durch aaaa oder a^4.

Biquadratisch, was mit einem Biquadrat in Verbindung steht.

Biquadratiſche Gleichung, worin die höchſte Potenz der unbekannten Größe oder der Wurzel die vierte iſt. S. Gleichung IV.

Biquadratiſche Parabel, diejenige, deren Gleichung iſt $y = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$. S. Parabel.

Biquadratiſche Wurzel, einer von den vier gleichen Factoren einer Zahl. S. Wurzel.

Blindrechnung. S. Regula coeci.

Bogen, iſt ein Theil einer krummen Linie.

Ein Bogen iſt immer größer als ſeine Chorde oder die gerade Linie zwiſchen ſeinen Endpuncten. Dieſes pflegt als ein Grundſatz angenommen zu werden. Man ſetze ſtatt deſſelben folgenden. Zwey Linien, es ſeyn beide krumme oder eine derſelben aus geraden Linien zuſammengeſetzt, die zwiſchen denſelben Endpuncten liegen, ſind deſto weniger an Länge verſchieden, je mehr Puncte ſie mit einander gemein haben. Es ſey nun ADB (Fig. 47. Tab. III.) ein Bogen einer krummen Linie und die gerade AB die Chorde. Man nehme auf dem Bogen irgend eine Anzahl Puncte, wie C, D, E, und ziehe die Chorden zwiſchen je zwey nächſten, ſo iſt die Summe aller Chorden nothwendig größer als AB, da die Chorde AD größer als AC+CD; AE größer als AD+DE, u. ſ. f. iſt. Je größer die Anzahl der Theile auf dem Bogen iſt, deſto weniger iſt derſelbe von der Summe der Chorden ſeiner Theile verſchieden, alſo iſt der Bogen größer als ſeine Chorde.

Da das Gränzverhältniß zwiſchen einem Bogen und der Summe der Chorden ſeiner Theile das Verhältniß der Gleichheit iſt, ſo iſt auch das Gränzverhältniß zwiſchen der Zunahme eines Bogens und der Chorde dieſer Zunahme das Verhältniß der Gleichheit.

Bogen ſind **gleich** oder um eine gegebene Größe verſchieden, wenn jenes Gränzverhältniß für ſie bey jeder Größe derſelben daſſelbe iſt.

Zwey Bogen AB, ab (Fig. 48. a. b.) sind ähnlich, wenn die Winkel C, c der an den Endpuncten A, B; a, b, gezogenen Berührungslinien sich gleich, und eben so an den Puncten D, d, für welche das Verhältniß der Bogen AD : ad = AB : ab ist, die Winkel E, e der berührenden DE, de mit AE, ae sich gleich sind. Ihre Ablenkung bey gleichmäßiger Länge ist alsdann dieselbe. Darum nennt man zwey Kreisbogen AB, ab ähnlich, wenn die zugehörigen Winkel am Mittelpuncte F, f sich gleich sind. Das zur Ähnlichkeit erforderte trifft bey diesen ein.

Die Formen des Differentials eines Bogens s. in dem Artikel, Rectification.

Bomiscus, in der Geometrie der Alten eine vierseitige geradlinichte Figur, welche folgendergestalt bestimmt wird. Es sey ABC (Fig. 49. Tab. III.) ein Dreyeck, in welchem DE parallel mit BC ist. Auf der verlängerten CA nehme man einen Punct F, ziehe BF, und mit dieser die parallele EG bis an die verlängerte BA; verbinde die Puncte F, G und G, C, so ist das Viereck CBFG ein Bomiscus. Die Seite CG ist parallel der Linie DF.

Der Satz steht in den mathematischen Sammlungen des Pappus, B. VII. Satz 134. Der Beweis ist leicht, und beruht auf den Sätzen I. 37. 39. Elem. Eukl.

Das griechische Wort bedeutet einen kleinen Altar.

Brennlinie (Caustica) ist eine Linie, auf welcher die Durchschnittspuncte je zweyer nächsten, nach Art der Lichtstrahlen, von einer gegebenen Linie zurückgeworfenen, oder durch sie gebrochenen Linien liegen, wenn diese, wie die zugehörigen auffallenden Linien in stetiger Folge genommen werden. Oder auch, sie ist die Linie, welche von allen auf die gedachte Art zurückgeworfenen oder gebrochenen Linien berührt wird. Die Veranlassung zu der Untersuchung dieser Linien hat zwar die Optik gegeben; sie gehören aber ganz der Geometrie zu, wenn die Lichtstrahlen

als gerade Linien, und ihre Zurückwerfung oder Brechung als geometrische Constructionen nach einem angenommenen Gesetze, ohne Rücksicht auf sinnliche Erscheinungen, betrachtet werden.

1. Die Brennlinien durch zurückgeworfene Strahlen heißen Catacausticae; die Brennlinien durch gebrochene Strahlen heißen Diacausticae. Die allgemeinen Formeln für die Länge des zurückgeworfenen und gebrochenen Strahls bis zu dem Berührungspuncte an der Brennlinie sind in den Artikeln, Catacaustica und Diacaustica, mit den Beweisen und einigen Beyspielen, zu finden. Hier soll das leicht verständliche mit Hülfe der Elementar-Geometrie vorgetragen, und dadurch die analytische Behandlung in jenen Artikeln vorbereitet werden.

Zuerst von den Brennlinien durch Zurückwerfung.

2. Es sey ACB (Fig. 50. Tab. III.) der Quadrant eines Kreises. Mit AC seyn die Linien PM, in endlichen Abständen von einander, parallel. Die zurückgeworfenen Linien machen mit dem Halbmesser durch den Einfallspunct M denselben Winkel auf der Seite nach A hin, wie PM auf der Seite nach B. Die Durchschnitte je zweyer auf einander folgenden, von AC angefangen, sind a, b, c, d, e. Diese sind nicht Puncte der Brennlinie, weil die zurückgeworfenen Strahlen hier nicht eine stetige Folge ausmachen. Wird die Menge der auffallenden Strahlen vergrößert, so rücken die Durchschnittspuncte einer zurückgeworfenen (wie Med) mit der auf jeder Seite zunächst liegenden (wie Me, Md) immer näher zusammen. Bey einer stetigen Folge von zurückgeworfenen Linien kommen d und e sich näher als um jeden endlichen Zwischenraum, und werden Puncte der Brennlinie. Da sie auch auf der geraden Med liegen, so ist diese die berührende in d oder e. Eine berührende nämlich hat einerley Richtung mit einer krummen Linie in dem Berührungspuncte, und hat daher zwey unendlich nahe liegende Puncte mit der Curve gemein.

3. Die Brennlinie für den Halbkreis BAD bey Parallelstrahlen hat die in Fig. 51. gezeichnete Gestalt BEFeD. Man kann sie als eine glänzende Linie darstellen, wenn man in eine zinnerne polirte Schale mit einer cylindrischen Rand-Einfassung, oder in ein Glas Milch gießt, und diese den Strahlen der Sonne, oder auch einer Kerze aussetzt, nur daß bey dem Lichte der letztern die Gestalt etwas verändert wird, weil die auffallenden Strahlen nicht parallel sind. Man erblickt sie auch in dem Rauche, den man vor einem der Sonne entgegen gehaltenen Brennspiegel aufsteigen läßt. Sie wird folgendergestalt gezeichnet. Mit dem Halbmesser AC ziehe man irgend eine parallele PM, nehme den Bogen MAN = 2 Bog. BM, ziehe MN, und nehme darauf ME = $\frac{1}{4}$MN = $\frac{1}{2}$MP, so ist E der Punct der Brennlinie, wo die zurückgeworfene ME sie berührt.

4. Diese Construction gründet sich auf einige Eigenschaften des Kreises.

I. Es sey (Fig. 52.) AMBmA ein Kreis, dessen Mittelpunct C ist; PM, QN seyn mit ACB parallel. Man nehme den Bogen Mm = MP (nach entgegengesetzten Seiten von M aus), so ist die gerade Mm der zu MP gehörige zurückgeworfene Strahl. Denn CM, welche auf den Kreis in M senkrecht ist, halbirt den Winkel PMm. Ferner sey der Bogen Nn = NQ, so ist die gerade Nn der zurückgeworfene Strahl zu NQ. Nun ist Bog. Mm — Nn (= MP — NQ) = 2MN, daher Bog. Nm — Nn = 3MN, das ist, Bog. nm = 3MN.

II. Man ziehe die Chorden MN, mn, so ist, (wegen der ähnlichen Dreyecke MNR, nmR) ch. MN : ch. mn = MR : Rn. Weil die Chorden der Kreisbogen weniger zunehmen als nach dem Verhältnisse ihrer Bogen, so ist ch. mn < 3 ch. MN, Folglich ist auch Rn < 3MR, oder MR > $\frac{1}{3}$Rn. Je näher die Puncte M, N einander genommen werden, desto näher kommt das Verhältniß der Chorden MN, mn dem 1 : 3, da-

ser auch MR : Rn eben demselben, und zugleich das Verhältniß Rn : Rm dem der Gleichheit. Nun wird das Verhältniß MR : Rm zusammengesetzt aus den Verhältnissen MR : Rn und Rn : Rm. Da die Gränzen dieser Verhältnisse sind 1 : 3 und 1 : 1, so ist die Gränze des daraus zusammengesetzten, oder des MR : Rm = 1 : 3, so daß in einer stetigen Folge von auffallenden und zurückgeworfenen Strahlen MR = ¼ Rm, also MR = ¼ Mm wird. Es sey MD = ¼ Mm, so ist D ein Punct der Brennlinie, und MDm die berührende an diesem Puncte.

V. Darum ist in der Construction (3. Fig. 51.) die berührende an der Brennlinie von dem Kreise bis an den Berührungspunct, ME = ¼ MN genommen. Der Bogen, dessen Chorde der auffallende Strahl ist, ist = 2BM, der Bogen MN über dem zurückgeworfenen ist = 2MB, und die Chorde MN = 2MP.

5. Da die Unterschiede des Durchmessers AB, und der mit denselben parallelen Chorden (Fig. 52.) in Vergleichung mit dem Bogen AM wenig zunehmen, und da zugleich die Winkel der zurückgeworfenen Strahlen mit den auffallenden für kleine Bogen AM klein sind, so liegen die Durchschnitte der in der Nähe von A zurückgeworfenen, auf einander folgenden, Strahlen nahe bey dem Puncte F, wenn AF = ½ AB ist, selbst noch, wenn AM ein nicht mehr kleiner Theil des Umfanges ist. Daher haben die sphärischen Brennspiegel ihren Brennpunct in F, und können daselbst eine große Hitze hervorbringen. Dieses zeigen auch die für die Durchschnitte zurückgeworfenen, von einander abstehenden Strahlen (Fig. 50.). Je weiter aber die einfallenden Strahlen von AB liegen, desto mehr liegen die Durchschnitte der zurückgeworfenen aus einander.

6. Die Brennlinie des Kreises für parallele Strahlen (Fig. 51.), welche zuerst untersucht ist, hat einige merkwürdige Eigenschaften.

1). Sie ist eine Epicykloide, die durch die Wälzung eines Kreises, dessen Durchmesser $BH = \frac{1}{2}$ (B ist, über dem Halbkreise HFG mit dem Durchmesser $GH = CB$ von dem Puncte B beschrieben wird.

2). Der Bogen der Brennlinie BE ist gleich der Summe $PM + ME$, des auffallenden Strahls von P an, und des zurückgeworfenen bis an den Berührungspunct, oder der Bogen $BE = \frac{3}{2} PM$. Also der Bogen $BEF = \frac{3}{2} AC$.

3). Man nehme in dem Kreise über dem Durchmesser BH die Chorde $BK = ME$, dem zurückgeworfenen Strahle bis an die Brennlinie, so ist der Raum zwischen dem Bogen BE der Brennlinie, dem Kreisbogen BM, und dem Strahle ME gleich dem doppelten des Kreisabschnittes BkK, und daher der Raum BFAB so groß als der ganze Kreis über BH.

7. Die Strahlen fallen (Fig. 53.) von einem Puncte E auf die concave Seite eines Kreises AMBA. Zwey derselben seyn EM, EN, deren jene den Kreis in M, P, diese in N, Q schneidet. Man nehme den Bogen $Mm = MP$, und $Nn = NQ$, so sind die Chorden Mm, Nn die zurückgeworfenen Strahlen. Es ist Bog. $nm = Nm - Nn = MN + MP - NQ = 2MN + PQ$.

Die zurückgeworfenen Strahlen schneiden sich in R, so ist $MR : Rn =$ ch. MN : ch. mn. Man ziehe noch die Chorde PQ, so ist (wegen der ähnlichen Dreyecke NME, PQE, da in dem Vierecke MNQP die gegen über stehenden Winkel zwey Rechte ausmachen, s. Kreis) $EM : EQ =$ ch. MN : ch. PQ. Das Gränzverhältniß der Chorden ist das Verhältniß ihrer Bogen. Das Gränzverhältniß von EM : EQ ist EM : EP; das von MR : Rn oder ch. MN : ch. mn sey MD : Dm, so ist

$EM : EP = MN : PQ$,

$MD : Dm = MN : mn$.

Aus der erstern Proportion ist

$$EM : 2EM+EP = MN : 2MN+PQ.$$

Da $mn = 2MN+PQ$ ist, so ist

$$EM : 2EM+EP = MD : Dm,$$

und daraus

$$EM : 3EM+EP = MD : Mm.$$

Es werde PM in G halbirt, so ist $EM+EP = 2EG$, also $3EM+EP = 2EM+2EG$. Wird auch Mm in H halbirt so ist

$$EM : EM+EG = MD : MH$$

oder $$EM+EG : EM = MH : MD,$$

und D ist der Punct der Brennlinie, wo Mm sie berührt.

8. Wenn der auffallende Strahl EA durch den Mittelpunct des Kreises C geht, so sey der Punct F auf AB die Gränze, welcher sich die Durchschnitte des nach AC selbst zurückgehenden Strahls und eines benachbarten zurückgeworfenen desto mehr nähern, je näher beide Strahlen einander liegen. Für F ist

$$EA+EC : EA = AC : AF.$$

9. Die Strahlen EM, EN (Fig. 54.) fallen von E auf die convexe Seite eines Kreises, und werden nach Mp, Mq zurückgeworfen. Die Verlängerungen der einfallenden treffen den Kreis in P, Q, der zurückgeworfenen in m, n. Die letzteren schneiden sich in R. Die Gränze von MR sey MD, und, wie vorher, $MG = GP$; $MH = Hm$. Es ist auch für diesen Fall

$$EM+EG : EM = MH : MD.$$

Auf dem durch den Mittelpunct gehenden Strahl sey F die Gränze der Durchschnittspuncte mit den zurückgeworfenen, so ist

$$EA+EC : EA = AC : AF.$$

10. Von der Brennlinie durch Brechung ist es hier völlig genügend, nur einen Fall zu untersuchen.

Die brechende Linie ſey ein Kreis (Fig 55. Tab über dem Halbmeſſer AB aus dem Mittelpuncte C be ben. Der leuchtende Punct ſey E. Zwey auffa Strahlen ſind EM, EN, ihre gebrochenen MD, die ſich in D ſchneiden. Jene verlängert treffen den in P, Q, dieſe in m, n. Die Einfallslothe ſind M NCq. Die ſenkrechten auf MP, Mm ſind CG; Das Verhältniß derſelben iſt ein unveränderliches.,

Man ſetze CMP $=\varphi$; CMm $=\omega$; C $=\varphi+\Delta\varphi$; CNn $=\omega+\Delta\omega$. Bezeichnet man di gen des Kreiſes eben ſo wie die zugehörigen Winkel am telpuncte, ſo iſt Pp $=2\varphi$, weil der zu Pp ge Winkel am Mittelpuncte doppelt ſo groß iſt als de Umfange PMp. Eben ſo Q q $=2(\varphi+\Delta\varphi)$, Qq — Pp oder QP + qp $=2\Delta\varphi$, das iſt, P MN $=2\Delta\varphi$. Gleichergeſtalt iſt mp $=2\omega$; q $2(\omega+\Delta\omega)$, alſo pq + mn oder MN + mn $=2$

Für verſchwindende MN und PQ iſt, wie in MN : PQ $=$ EM : EP, und daraus MN + PQ : $=$ EM + EP : EM. Bey eben dieſer Annahm MN : mn $=$ DM : Dm, alſo MN : MN + m DM : DM + Dm. Aus beiden Proportionen e ſich folgende:

$$MN + PQ : MN + mn = (EM + EP) I$$
$$EM (DM + Dm),$$

oder, weil G und H die Chorden MP, Mm hal MN + PQ : MN + mn $=$ EG $\times$ DM : EM $\times$ und die Gränze von $\Delta\varphi$: $\Delta\omega$ iſt EG $\times$ DM : EM $\times$

Da nach dem Geſetze der Brechung das Verhä $\sin\varphi : \sin\omega$ unveränderlich iſt, ſo iſt $\sin(\varphi+\Delta$ $\sin(\omega+\Delta\omega) = \sin\varphi : \sin\omega$, und daher $\sin(\varphi+$ $-\sin\varphi : \sin(\omega+\Delta\omega) - \sin\omega = \sin\varphi : \sin\omega$. $\sin(\varphi+\Delta\varphi) - \sin\varphi = 2\sin\frac{1}{2}\Delta\varphi.\cos\frac{1}{2}(2\varphi+$ und $\sin(\omega+\Delta\omega) - \sin\omega = 2\sin\frac{1}{2}\Delta\omega.\cos\frac{1}{2}(2\omega+$ nach Goniometrie, 28, wie es ſich auch leicht durch

geometrische Construction erweisen läßt. Die Gränze des Verhältnisses $2\sin\frac{1}{2}\Delta\varphi.\cos\frac{1}{2}(2\varphi+\Delta\varphi):2\sin\frac{1}{2}\Delta\omega.\cos\frac{1}{2}(2\omega+\Delta\omega)$ ist $\Delta\varphi.\cos\varphi:\Delta\omega.\cos\omega$. Jenes Verhältniß ist auch das unveränderliche $\sin\varphi:\sin\omega$, und daher ist die Gränze von $\Delta\varphi:\Delta\omega = \frac{\sin\varphi}{\cos\varphi}:\frac{\sin\omega}{\cos\omega}$.

Dieses Verhältniß tritt für verschwindende Veränderungen $\Delta\varphi$, $\Delta\omega$ ein; für endliche $\Delta\varphi$ und $\Delta\omega$ gilt ein anderes, das zugleich von den Veränderungen selbst abhängig ist. Da vorher auch eine Gränze für $\Delta\varphi:\Delta\omega$ gefunden ist, so sind die Werthe beider gleich, und es ist

$$\frac{\sin\varphi}{\cos\varphi}:\frac{\sin\omega}{\cos\omega} = EG\times DM : EM\times DH.$$

Es ist $\sin\varphi:\cos\varphi = CG:MG$, und $\sin\omega:\cos\omega = CH:MH$ also

$$\frac{CG}{MG}:\frac{CH}{MH} = EG\times DM : EM\times DH,$$

und daraus

$$\frac{CG\times EM}{MG}:\frac{CH\times EG}{MH} = DM:DH.$$

Aus dem Verhältnisse $DM:DH$ wird auch das $DM-DH:DM$ oder $MH:MD$ gefunden, wo durch der Punct D bestimmt wird. Dieser ist ein Punct der Brennlinie, den sie mit der berührenden gemein hat.

11. Wenn der auffallende Strahl durch den Mittelpunct C geht, so verwandelt sich das Verhältniß $EM:EG$ in $EA:EC$, das $MG:MH$ in $AC:AC$; das $CG:CH$ bleibt das beständige Brechungsverhältniß, welches durch $I:R$ bezeichnet werde. Beide, CG und CH, sind zwar für diese Lage des Strahls Null, aber ihr Verhältniß bleibt auch im Verschwinden das unveränderliche. Ferner verwandelt sich das Verhältniß $DM:DH$ in $FA:FC$, wenn F die Gränze der Durchschnittspuncte der ge-

brochenen Strahlen mit dem einfallenden ungebrochen gehenden ist. Demnach ist

$$I \times EA : R \times EC = FA : FC$$

daher

$$I \times EA - R \times EC : I \times EA = AC : AF.$$

12. Wenn die auffallenden Strahlen parallel AB sind, so sind EA, EM, EN unendlich groß, das Verhältniß EM:EG wird 1:1. In diesem Fall

$$\frac{CG}{MG} : \frac{CH}{MH} = DM : DH,$$

und $I - R : I = AC : AF$.

13. Die Anwendung der gegebenen Auflösung andere Fälle ist leicht. Nur ist noch zu zeigen, wie Lage des gebrochenen Strahls durch eine Construction funden wird,

Es sey BAD (Fig. 56.) der Einfallswinkel, A das Einfallsloth, AD der einfallende Strahl. Um der willkührlichen AB beschreibe man einen Halbkreis, n cher AD in D schneidet, und ziehe BD. Auf der verl gerten AB nehme man AE:AB gleich dem Brechun verhältnisse, beschreibe über AE einen Kreis, lege in d selben die Chorde EF = BD, und ziehe AF, so ist A der gebrochne Strahl. Denn der Sinus des Einfal winkels ist $\frac{BD}{AB}$, des Brechungswinkels $\frac{EF}{AE}$. Be verhalten sich wie AE : AB, dem Brechungsverhältn gemäß.

14. Die Untersuchung über den Durchschnittspu zweyer unmittelbar nächsten, zurück geworfenen oder brochenen Strahlen hat zuerst Barrow angeste (Lectiones opticae, VI–XIII.) Sein Zweck war, Stelle zu suchen, wo das Bild eines Punctes liegt, w chen ein Auge in einer gegebenen Lage durch zurückgew fene oder gebrochene Strahlen erblickt. Das Bild setzt

als gerade Linien, und ihre Zurückwerfung oder Brechung als geometrische Constructionen nach einem angenommenen Gesetze, ohne Rücksicht auf sinnliche Erscheinungen, betrachtet werden.

1. Die Brennlinien durch zurückgeworfene Strahlen heißen Catacausticae; die Brennlinien durch gebrochene Strahlen heißen Diacausticae. Die allgemeinen Formeln für die Länge des zurückgeworfenen und gebrochenen Strahls bis zu dem Berührungspuncte an der Brennlinie sind in den Artikeln, Catacaustica und Diacaustica, mit den Beweisen und einigen Beyspielen, zu finden. Hier soll das leicht verständliche mit Hülfe der Elementar-Geometrie vorgetragen, und dadurch die analytische Behandlung in jenen Artikeln vorbereitet werden.

Zuerst von den Brennlinien durch Zurückwerfung.

2. Es sey ACB (Fig. 50. Tab. III.) der Quadrant eines Kreises. Mit AC seyn die Linien PM, in endlichen Abständen von einander, parallel. Die zurückgeworfenen Linien machen mit dem Halbmesser durch den Einfallspunct M denselben Winkel auf der Seite nach A hin, wie PM auf der Seite nach B. Die Durchschnitte je zweyer auf einander folgenden, von AC angefangen, sind a, b, c, d, e. Diese sind nicht Puncte der Brennlinie, weil die zurückgeworfenen Strahlen hier nicht eine stetige Folge ausmachen. Wird die Menge der auffallenden Strahlen vergrößert, so rücken die Durchschnittspuncte einer zurückgeworfenen (wie Med) mit der auf jeder Seite zunächst liegenden (wie Me, Md) immer näher zusammen. Bey einer stetigen Folge von zurückgeworfenen Linien kommen d und e sich näher als um jeden endlichen Zwischenraum, und werden Puncte der Brennlinie. Da sie auch auf der geraden Med liegen, so ist diese die berührende in d oder e. Eine berührende nämlich hat einerley Richtung mit einer krummen Linie in dem Berührungspuncte, und hat daher zwey unendlich nahe liegende Puncte mit der Curve gemein.

derſelben. Die zurückgeworfenen Strahlen ſind divergen aus einander fahrend, und zielen rückwärts nach dem a dern Brennpuncte.

G. W. Krafft zeigt in einer Abhandlung, Indag tio focorum in omnibus curvis poſſibilibus, Comm novi Petrop. T. II. daß bloß die gewöhnliche Ellip und Parabel, jene zwey wirkliche Vereinigungs = od Brennpuncte, dieſe einen einzigen, haben.

Briggiſche Logarithmen ſind die gewöhnlichen zur Abkürzung der Rechnung bequemſten, Logarithmen welche Heinrich Briggs (Profeſſor der Mathematik a Gresham-Collegium in London, und hernach zu Orfor geſt. 1630) zum Theil berechnet, und an die Stelle d von Neper zuerſt berechneten natürlichen Logarithme geſetzt hat.

Brounckerſche Reihen ſind unendliche Reihen welche Lord Brouncker für die Quadratur der Hyperb angegeben hat. Es ſind die erſten, durch welche der I halt eines hyperboliſchen Raumes gefunden iſt. Er mach ſie in den Philoſoph. Tranſactions T. III. für das J 1668. nr. 34. bekannt, hatte ſie aber ſchon vor mehre Jahren entdeckt. Der Aufſatz ſteht auch in dem erſt Theile der Sammlung von logarithmiſchen Schriften, d Maſeres in drey ſtarken Quartbänden veranſtaltet ha Die Methode iſt zwar bloß auf die Hyperbel anwendba allein ſie iſt doch ein ſehr gutes Beyſpiel zu zeigen, wie m die beſondern Eigenſchaften einer Curve oder einer Relati von Größen benutzen mag, um Aufgaben dieſelbe betr fend aufzulöſen.

Es ſey AEZ (Fig. 58. Tab. IV.) ein Bogen ei gleichſeitigen Hyperbel von dem Scheitel A an genomme C ihr Mittelpunct; CA die halbe Axe; CX eine Aſymptoten; auf dieſe ſeyn die ſenkrechten AB, ED v den Puncten A, E der Hyperbel gezogen. Da di parallel mit der andern Aſymptote ſind, ſo iſt CD : C = AB : ED. Weil AC den Winkel der Aſymptot

albirt, und dieſer ein Rechter iſt, ſo iſt AB = CB. Es ſoll nun der hyperboliſche Raum ABDEHA durch das Quadrat von AB oder CB mittelſt einer Reihe ausgedruckt werden.

Man ziehe zu dem Ende die parallele EF mit BD, ſo iſt das Parallelogramm BDEF das erſte Glied dieſer Reihe. Nun halbire man BD in G, und ziehe die Ordinate GH, ſo iſt GH durch die Proportion CG : CB = AB : GH gegeben. Durch H ziehe man HK parallel mit BG, ſo iſt das Parm HKFL das zweyte Glied der Reihe. In den beiden hyperboliſchen Dreyecken AKH, HLE ſchneide man auf dieſelbe Art wie in dem AFE ein Parallelogramm ab, indem man durch die Mitte von BG und GD Ordinaten zieht, ſo ſind dieſe beiden Vierecke das dritte und vierte Glied der Reihe. Nun bleiben in dem hyperboliſchen Raume ABDEA vier Dreyecke übrig, in deren jedem wieder ein Parallelogramm abzuſchneiden iſt, wodurch das fünfte bis achte Glied erhalten wird. Auf dieſe Art wird die Reihe unbeſtimmt weit fortgeſetzt. Man ziehe AM parallel mit BD bis an die verlängerte DE, ſo kann man auf dieſelbe Art für den hyperboliſchen Raum AMEHA eine Reihe finden. Auch läßt ſich auf eine ähnliche Art das Segment AHEA berechnen. Denn man ziehe die Chorden der Bogen AH, HE, ſo läßt ſich das geradlinichte Dreyeck AHE durch die gegebenen Größen ausdrucken. Von den beiden Segmenten über AH und EH kann man wiederum auf gleiche Art in jedem ein geradlinichtes Dreyeck abſchneiden. Fährt man ſolchergeſtalt fort, ſo erhält man eine Reihe, deren Glieder immer kleiner werden.

Brouncker hat ſeine Methode nur an einem Beyſpiele gewieſen. Er nimmt AB : ED = 1 : $\frac{1}{2}$ oder CB : CD = 1 : 2, und findet, wenn AB oder CB = 1 geſetzt wird,

$$ABDEHA = \frac{1}{1.2} + \frac{1}{3.4} + \frac{1}{5.6} + \frac{1}{7.8} + \frac{1}{9.10} + e$$

$$AMEHA = \frac{1}{2.3} + \frac{1}{4.5} + \frac{1}{6.7} + \frac{1}{8.9} + \frac{1}{10.11} + e$$

$$AEHA = \frac{1}{2.3.4} + \frac{1}{4.5.6} + \frac{1}{6.7.8} + \frac{1}{8.9.10} + e$$

Montucla hat in ſeiner Geſchichte der Mathem. 2. 3 3. 5. S. irriger Weiſe die zweyte Reihe für den hyperb liſchen Raum AHEF angeſetzt. Seine Nachricht v Brounckers Methode iſt zu unvollſtändig. Man kön nach derſelben glauben, daß ſie auf das Verhältniß 1 : für AB : ED eingeſchränkt ſey, wenn er nicht noch h zufügte, daß Br. nach ſeiner Methode auch den Logari men von 10 berechnet habe.

Zum beſſern Verſtändniſſe der Methode füge ich allgemeinen Formeln für die Rechtecke und Dreyecke bey, n che, jene in den hyperboliſchen Trapezien, dieſe in den S menten, nach der Reihe abzuſchneiden ſind. Broun hat dergleichen nicht gegeben.

Es iſt CF (Fig. 59.) ein Stück der einen Aſympt einer gleichſeitigen Hyperbel, C der Mittelpunct, MN ein Bogen derſelben, CD und DM; CF und FP zu Paare rechtwinklichter Coordinaten. Man halbire I in E, und ziehe die Ordinate EN. Durch P und ſeyn PHG und NK parallel mit DF. Man ſetze CD = DF = n, ſo iſt $MD = \frac{1}{m}$, $PF = \frac{1}{m+n}$,

$NE = \frac{2}{2m+n}$, $NH = \frac{2}{2m+n} - \frac{1}{m+1}$

$= \frac{n}{(m+n)(2m+n)}$, alſo das Pgrm. NHC

$= \frac{nn}{2(m+n)(2m+n)}$.

Man ziehe die Chorde MP, welche von EN in geſchnitten werde. Es iſt $HL = \frac{1}{2}MG = \frac{1}{2}(MD - P$

Aus der erstern Proportion ist

$$EM : 2EM+EP = MN : 2MN+PQ.$$

Da $mn = 2MN+PQ$ ist, so ist

$$EM : 2EM+EP = MD : Dm,$$

und daraus

$$EM : 3EM+EP = MD : Mm.$$

Es werde PM in G halbirt, so ist $EM+EP = 2EG$, also $3EM+EP = 2EM+2EG$. Wird auch Mm in H halbirt so ist

$$EM : EM+EG = MD : MH$$

oder $$EM+EG : EM = MH : MD,$$

und D ist der Punct der Brennlinie, wo Mm sie berührt.

8. Wenn der auffallende Strahl EA durch den Mittelpunct des Kreises C geht, so sey der Punct F auf AB die Gränze, welcher sich die Durchschnitte des nach AC selbst zurückgehenden Strahls und eines benachbarten zurückgeworfenen desto mehr nähern, je näher beide Strahlen einander liegen. Für F ist

$$EA+EC : EA = AC : AF.$$

9. Die Strahlen EM, EN (Fig. 54.) fallen von E auf die convexe Seite eines Kreises, und werden nach Mp, Mq zurückgeworfen. Die Verlängerungen der einfallenden treffen den Kreis in P, Q, der zurückgeworfenen in m, n. Die letzteren schneiden sich in R. Die Gränze von MR sey MD, und, wie vorher, $MG = GP$; $MH = Hm$. Es ist auch für diesen Fall

$$EM+EG : EM = MH : MD.$$

Auf dem durch den Mittelpunct gehenden Strahl sey F die Gränze der Durchschnittspuncte mit den zurückgeworfenen, so ist

$$EA+EC : EA = AC : AF.$$

10. Von der Brennlinie durch Brechung ist es hier völlig genügend, nur einen Fall zu untersuchen.

Für die zwey folgenden Dreyecke in dem Segmente die Werthe, 8 ; 9 ; und die beiden Dreyecke $\frac{1}{16.17.18}$; $\frac{1}{18.19.20}$; Für die folgenden vier ecke hat q die Werthe 16, 17, 18, 19, und di Dreyecke sind $\frac{1}{32.33.34}$; $\frac{1}{34.35.36}$; $\frac{1}{36.37.38.39.40}$; u. s. f.

Brouncker hat noch aus den berechneten Gliede Reihe, welche das hyperbolische Segment ausdruck die übrigen zwey nahe kommende Werthe gefunden, einer größer, der andere kleiner als diese noch übrig Er berechnet daraus den natürlichen Logarithmen und 10 bis auf die sechste Decimalstelle. Es ist n die hyperbolische Area ABDEHA (Fig. 58.) der liche Logarithme von CD, wenn CB zur Einh Längen, und das Quadrat von CB zur Einheit der Fl räume genommen wird. Allein diese Methode Logari zu berechnen ist noch zu mühsam. Mercator g derselben Zeit, als Brouncker seine Quadratur der H bel bekannt machte, seine Logarithmotechnie heraus, er eine leichtere Art die Logarithmen und hyperbo Flächenräume, wie ABDEHA, zu berechnen, Sie erfordert eine Infinitesimalrechnung, die m Integration der Formel $x^n dx$ übereinkommt. M ckers Quadratur ist eigentlich dadurch merkwürdig, keiner Infinitesimalrechnung bedarf.

Bruch, gebrochne Zahl (Fractio), ist die deren Einheit ein Theil der Einheit für die ganzen (der Grund-Einheit) ist. Ein Bruch enthält de zwey Begriffe, erstlich die Bruchseinheit (unité f onnaire), welche durch die Eintheilung der Einh die ganzen Zahlen, sie mögen benannte oder unbe seyn, entsteht, und zweytens die Anzahl dieser Bru

heiten. Z. B. $\frac{3}{4}$ und $\frac{7}{4}$, enthalten beide den 4ten Theil der Grund-Einheit einige mahl, jener Bruch 3 mahl, dieser 7 mahl.

Die Zahl, welche die Menge der in der Grund-Einheit angenommenen Theile anzeigt, heißt der Nenner (denominator); die Zahl, welche die Menge der Bruchs-Einheiten angiebt, heißt der Zähler (numerator). Man schreibt sie über einander, den Zähler über dem absondernden Querstriche, den Nenner darunter, wie $\frac{1}{8} : \frac{13}{8}$. Jenes bedeutet 5mal $\frac{1}{8}$, dieses 13mal $\frac{1}{8}$.

Ein Bruch ist ein Quotient, der aus der Division des Zählers durch den Nenner entsteht. Denn es ist einerley, ob man von dem ganzen Dividendus einen gewissen Theil, oder ob man von jeder Einheit desselben den eben so vielten Theil nimmt. Ist der Dividendus kleiner als der Divisor, z. B. wenn 7 durch 12 zu dividiren sind, so kann man den Quotienten nicht anders als durch den Bruch $\frac{7}{12}$ (das ist 7 mahl $\frac{1}{12}$) ausdrucken. Ist der Dividendus grösser als der Divisor, so kann man dem Quotienten eine doppelte Form geben. Z. B. der Quotient von 19 durch 5 ist $\frac{19}{5}$ oder $3\frac{4}{5}$. Es ist nämlich $19 = 3 \times 5 + 4$. Soll der Quotient angeben, wie oft man den Divisor von dem Dividendus wegnehmen könne, so ist in dem Beyspiele die Antwort: 3mahl und noch den 5ten Theil des Divisors 4 mahl.

Ein wahrer oder eigentlicher Bruch (fractio vera) ist kleiner als die Einheit, oder der Zähler desselben ist kleiner als der Nenner, oder als die Menge der in der Einheit enthaltenen Bruchs-Einheiten, z. B. $\frac{3}{4}$.

Ein uneigentlicher Bruch (fractio spuria) ist so groß oder grösser als die Einheit, oder der Zähler desselben ist so groß oder grösser als der Nenner, z. B. $\frac{4}{4}$ oder $\frac{19}{5}$. Durch die wirkliche Division wird ein solcher Bruch in eine ganze Zahl, mit dem anhangenden Bruche verwandelt.

Die brechende Linie ſey ein Kreis (Fig 55. Tab. IV über dem Halbmeſſer AB aus dem Mittelpuncte C beſchr ben. Der leuchtende Punct ſey E. Zwey auffallen Strahlen ſind EM, EN, ihre gebrochenen MD, NI die ſich in D ſchneiden. Jene verlängert treffen den Kre in P, Q, dieſe in m, n. Die Einfallslothe ſind MC NCq. Die ſenkrechten auf MP, Mm ſind CG; CI Das Verhältniß derſelben iſt ein unveränderliches.

Man ſetze $CMP = \varphi$; $CMm = \omega$; $CN = \varphi + \Delta\varphi$; $CNn = \omega + \Delta\omega$. Bezeichnet man die B gen des Kreiſes eben ſo wie die zugehörigen Winkel am M telpuncte, ſo iſt $Pp = 2\varphi$, weil der zu Pp gehöri Winkel am Mittelpuncte doppelt ſo groß iſt als der a Umfange PMp. Eben ſo $Qq = 2(\varphi + \Delta\varphi)$, daß $Qq - Pp$ oder $QP + qp = 2\Delta\varphi$, das iſt, PQ $MN = 2\Delta\varphi$. Gleichergeſtalt iſt $mp = 2\omega$; $qn = 2(\omega + \Delta\omega)$, alſo $pq + mn$ oder $MN + mn = 2\Delta$

Für verſchwindende MN und PQ iſt, wie in (7 $MN : PQ = EM : EP$, und daraus $MN + PQ : M = EM + EP : EM$. Bey eben dieſer Annahme $MN : mn = DM : Dm$, alſo $MN : MN + mn = DM : DM + Dm$. Aus beiden Proportionen ergie ſich folgende:

$$MN + PQ : MN + mn = (EM + EP)\,DM \cdot EM\,(DM + Dm),$$

oder, weil G und H die Chorden MP, Mm halbire $MN + PQ : MN + mn = EG \times DM : EM \times DI$ und die Gränze von $\Delta\varphi : \Delta\omega$ iſt $EG \times DM : EM \times DI$

Da nach dem Geſetze der Brechung das Verhältn $\sin\varphi : \sin\omega$ unveränderlich iſt, ſo iſt $\sin(\varphi + \Delta\varphi) : \sin(\omega + \Delta\omega) = \sin\varphi : \sin\omega$, und daher $\sin(\varphi + \Delta$ $- \sin\varphi : \sin(\omega + \Delta\omega) - \sin\omega = \sin\varphi : \sin\omega$. Es i $\sin(\varphi + \Delta\varphi) - \sin\varphi = 2\sin\frac{1}{2}\Delta\varphi \cdot \cos\frac{1}{2}(2\varphi + \Delta\varphi$ und $\sin(\omega + \Delta\omega) - \sin\omega = 2\sin\frac{1}{2}\Delta\omega \cdot \cos\frac{1}{2}(2\omega + \Delta\omega$ nach Goniometrie, 28, wie es ſich auch leicht durch ei

geometrische Construction erweisen läßt. Die Gränze des Verhältnisses $2\sin\frac{1}{2}\Delta\varphi.\cos\frac{1}{2}(2\varphi+\Delta\varphi):2\sin\frac{1}{2}\Delta\omega.\cos\frac{1}{2}(2\omega+\Delta\omega)$ ist $\Delta\varphi.\cos\varphi:\Delta\omega.\cos\omega$. Jenes Verhältniß ist auch das unveränderliche $\sin\varphi:\sin\omega$, und daher ist die Gränze von $\Delta\varphi:\Delta\omega = \frac{\sin\varphi}{\cos\varphi}:\frac{\sin\omega}{\cos\omega}$.

Dieses Verhältniß tritt für verschwindende Veränderungen $\Delta\varphi$, $\Delta\omega$ ein; für endliche $\Delta\varphi$ und $\Delta\omega$ gilt ein anderes, das zugleich von den Veränderungen selbst abhängig ist. Da vorher auch eine Gränze für $\Delta\varphi:\Delta\omega$ gefunden ist, so sind die Werthe beider gleich, und es ist

$$\frac{\sin\varphi}{\cos\varphi}:\frac{\sin\omega}{\cos\omega} = EG\times DM:EM\times DH.$$

Es ist $\sin\varphi:\cos\varphi = CG:MG$, und $\sin\omega:\cos\omega = CH:MH$ also

$$\frac{CG}{MG}:\frac{CH}{MH} = EG\times DM:EM\times DH,$$

und daraus

$$\frac{CG\times EM}{MG}:\frac{CH\times EG}{MH} = DM:DH.$$

Aus dem Verhältnisse $DM:DH$ wird auch das $DM-DH:DM$ oder $MH:MD$ gefunden, wodurch der Punct D bestimmt wird. Dieser ist ein Punct der Brennlinie, den sie mit der berührenden gemein hat.

11. Wenn der auffallende Strahl durch den Mittelpunct C geht, so verwandelt sich das Verhältniß $EM:EG$ in $EA:EC$, das $MG:MH$ in $AC:AC$; das $CG:CH$ bleibt das beständige Brechungsverhältniß, welches durch $I:R$ bezeichnet werde. Beide, CG und CH, sind zwar für diese Lage des Strahls Null, aber ihr Verhältniß bleibt auch im Verschwinden das unveränderliche. Ferner verwandelt sich das Verhältniß $DM:DH$ in $FA:FC$, wenn F die Gränze der Durchschnittspuncte der ge-

brochenen Strahlen mit dem einfallenden ungebrochen fortgehenden ist. Demnach ist

$$I \times EA : R \times EC = FA : FC$$

daher

$$I \times EA - R \times EC : I \times EA = AC : AF.$$

12. Wenn die auffallenden Strahlen parallel mit AB sind, so sind EA, EM, EN unendlich groß, und das Verhältniß EM:EG wird 1:1. In diesem Falle ist

$$\frac{CG}{MG} : \frac{CH}{MH} = DM : DH,$$

und $I - R : I = AC : AF$.

13. Die Anwendung der gegebenen Auflösung auf andere Fälle ist leicht. Nur ist noch zu zeigen, wie die Lage des gebrochenen Strahls durch eine Construction gefunden wird,

Es sey BAD (Fig. 56.) der Einfallswinkel, AI das Einfallsloth, AD der einfallende Strahl. Ueber der willkührlichen AB beschreibe man einen Halbkreis, welcher AD in D schneidet, und ziehe BD. Auf der verlängerten AB nehme man AE:AB gleich dem Brechungsverhältnisse, beschreibe über AE einen Kreis, lege in denselben die Chorde EF = BD, und ziehe AF, so ist AF der gebrochne Strahl. Denn der Sinus des Einfallswinkels ist $\frac{BD}{AB}$, des Brechungswinkels $\frac{EF}{AE}$. Beide verhalten sich wie AE : AB, dem Brechungsverhältnisse gemäß.

14. Die Untersuchung über den Durchschnittspunct zweyer unmittelbar nächsten, zurück geworfenen oder gebrochenen Strahlen hat zuerst Barrow angestellt. (Lectiones opticae, VI–XIII.) Sein Zweck war, die Stelle zu suchen, wo das Bild eines Punctes liegt, welchen ein Auge in einer gegebenen Lage durch zurückgeworfene oder gebrochene Strahlen erblickt. Das Bild setzt er

um den Durchschnittspunct zweyer nächsten Strahlen, den Gränzpunct der Durchschnitte sich naher Strahlen, und zwar um den Punct herum, weil die Augenöfnung einen gewissen Durchmesser hat. Seine Beweise sind hier zusammen gezogen. Barrow fiel aber noch nicht darauf, die Linie zu betrachten, welche die Reihe aller Bilder oder Gränzpuncte der Durchschnitte enthält.

15. Huygens ist der erste, der die Entstehung der Brennlinien angegeben hat, doch nur für den Halbkreis, und für auffallende Parallelstrahlen. Er trägt sie in seinem Traité de la Lumiere, Ch. 6. vor. (Opera reliqua. Vol. I.). Diese Schrift ist 1690 herausgekommen, aber schon 1678 verfaßt worden, und in dieser Materie nicht verändert. Von der Brennlinie durch Brechung begnügt sich H. zu bemerken, daß man jeden Punct derselben mittelst eines von Barrow vorgetragenen Lehrsatzes finden könne, und daß sie rectificabel ist. Denn er wendet sie eigentlich zur Erläuterung seiner Theorie vom Lichte, und der Bewegung der Lichtwellen an. Eben so behandelt er die Brennlinie durch Zurückwerfung. Er zeigt nur an, wie jeder ihrer Puncte gefunden wird, bemerkt, daß sie eine Art Cykloide ist, giebt ihre Länge, und den zwischen ihr und dem Halbkreise enthaltenen Flächenraum an, so wie es in (5.) vorgetragen ist.

Ehe diese Lehrsätze bekannt gemacht wurden, versuchte Tschirnhausen die Brennlinie durch Zurückwerfung paralleler Strahlen von einem Halbkreise zu bestimmen. Er legte seine Entdeckung der Pariser Akademie der Wissenschaften vor, ohne die Beweise zu geben. Auch in den Actis Erud. a. 1682 machte er seine Construction bekannt, aber auch ohne Beweis. Sie ist folgende. Der zurückwerfende Halbkreis sey ADB (Fig. 57. Tab. IV.) der Mittelpunct C, ein mit CD parallel auffallender Strahl PN. Ueber CB werde ein Halbkreis COB beschrieben; welcher von PN in O geschnitten wird. Es werde ON in M halbirt, so soll M ein Punct der Brennlinie seyn. Daß diese Construction unrichtig ist, erwie-

derſelben. Die zurückgeworfenen Strahlen ſind divergent, aus einander fahrend, und zielen rückwärts nach dem andern Brennpuncte.

G. W. Krafft zeigt in einer Abhandlung, Indagatio focorum in omnibus curvis poſſibilibus, Comm. novi Petrop. T. II. daß bloß die gewöhnliche Ellipſe und Parabel, jene zwey wirkliche Vereinigungs- oder Brennpuncte, dieſe einen einzigen, haben.

Briggiſche Logarithmen ſind die gewöhnlichen, zur Abkürzung der Rechnung bequemſten, Logarithmen, welche Heinrich Briggs (Profeſſor der Mathematik am Gresham-Collegium in London, und hernach zu Oxford, geſt. 1630) zum Theil berechnet, und an die Stelle der von Neper zuerſt berechneten natürlichen Logarithmen geſetzt hat.

Brounckerſche Reihen ſind unendliche Reihen, welche Lord Brouncker für die Quadratur der Hyperbel angegeben hat. Es ſind die erſten, durch welche der Inhalt eines hyperboliſchen Raumes gefunden iſt. Er machte ſie in den Philoſoph. Tranſactions T. III. für das J. 1668. nr. 34. bekannt, hatte ſie aber ſchon vor mehrern Jahren entdeckt. Der Aufſatz ſteht auch in dem erſten Theile der Sammlung von logarithmiſchen Schriften, die Maſeres in drey ſtarken Quartbänden veranſtaltet hat. Die Methode iſt zwar bloß auf die Hyperbel anwendbar, allein ſie iſt doch ein ſehr gutes Beyſpiel zu zeigen, wie man die beſondern Eigenſchaften einer Curve oder einer Relation von Größen benutzen mag, um Aufgaben dieſelbe betreffend aufzulöſen.

Es ſey AEZ (Fig. 58. Tab. IV.) ein Bogen einer gleichſeitigen Hyperbel von dem Scheitel A an genommen; C ihr Mittelpunct; CA die halbe Axe; CX eine der Aſymptoten; auf dieſe ſeyn die ſenkrechten AB, ED von den Puncten A, E der Hyperbel gezogen. Da dieſe parallel mit der andern Aſymptote ſind, ſo iſt CD : CB = AB : ED. Weil AC den Winkel der Aſymptoten

halbirt, und dieſer ein Rechter iſt, ſo iſt AB = CB. Es ſoll nun der hyperboliſche Raum ABDEHA durch das Quadrat von AB oder CB mittelſt einer Reihe ausgedruckt werden.

Man ziehe zu dem Ende die parallele EF mit BD, ſo iſt das Parallelogramm BDEF das erſte Glied dieſer Reihe. Nun halbire man BD in G, und ziehe die Ordinate GH, ſo iſt GH durch die Proportion CG : CB = AB : GH gegeben. Durch H ziehe man HK parallel mit BG, ſo iſt das Pgrm HKFL das zweyte Glied der Reihe. In den beiden hyperboliſchen Dreyecken AKH, HLE ſchneide man auf dieſelbe Art wie in dem AFE ein Parallelogramm ab, indem man durch die Mitte von BG und GD Ordinaten zieht, ſo ſind dieſe beiden Vierecke das dritte und vierte Glied der Reihe. Nun bleiben in dem hyperboliſchen Raume ABDEA vier Dreyecke übrig, in deren jedem wieder ein Parallelogramm abzuſchneiden iſt, wodurch das fünfte bis achte Glied erhalten wird. Auf dieſe Art wird die Reihe unbeſtimmt weit fortgeſetzt. Man ziehe AM parallel mit BD bis an die verlängerte DE, ſo kann man auf dieſelbe Art für den hyperboliſchen Raum AMEHA eine Reihe finden. Auch läßt ſich auf eine ähnliche Art das Segment AHEA berechnen. Denn man ziehe die Chorden der Bogen AH, HE, ſo läßt ſich das geradlinichte Dreyeck AHE durch die gegebenen Größen ausdrucken. Von den beiden Segmenten über AH und EH kann man wiederum auf gleiche Art in jedem ein geradlinichtes Dreyeck abſchneiden. Fährt man ſolchergeſtalt fort, ſo erhält man eine Reihe, deren Glieder immer kleiner werden.

Brouncker hat ſeine Methode nur an einem Beyſpiele gewieſen. Er nimmt AB : ED = 1 : $\frac{1}{2}$ oder CB : CD = 1 : 2, und findet, wenn AB oder CB = 1 geſetzt wird,

$ABDEHA = \frac{1}{1.2} + \frac{1}{3.4} + \frac{1}{5.6} + \frac{1}{7.8} + \frac{1}{9.10} -$

$AMEHA = \frac{1}{2.3} + \frac{1}{4.5} + \frac{1}{6.7} + \frac{1}{8.9} + \frac{1}{10.11} +$

$AEHA = \frac{1}{2.3.4} + \frac{1}{4.5.6} + \frac{1}{6.7.8} + \frac{1}{8.9.10} -$

Montucla hat in seiner Geschichte der Mathem. 2. 3. 5. S. irriger Weise die zweyte Reihe für den hyp lischen Raum AHEF angesetzt. Seine Nachricht Brounckers Methode ist zu unvollständig. Man k nach derselben glauben, daß sie auf das Verhältniß für AB : ED eingeschränkt sey, wenn er nicht noch zufügte, daß Br. nach seiner Methode auch den Log men von 10 berechnet habe.

Zum bessern Verständnisse der Methode füge i allgemeinen Formeln für die Rechtecke und Dreyecke bey che, jene in den hyperbolischen Trapezien, diese in den menten, nach der Reihe abzuschneiden sind. Bro hat dergleichen nicht gegeben.

Es ist CF (Fig. 59.) ein Stück der einen Asym einer gleichseitigen Hyperbel, C der Mittelpunct, M ein Bogen derselben, CD und DM; CF und FP Paare rechtwinklichter Coordinaten. Man halbire in E, und ziehe die Ordinate EN. Durch P u seyn PHG und NK parallel mit DF. Man setze CD:

$DF = n$, so ist $MD = \frac{1}{m}$, $PF = \frac{1}{m+n}$,

$NE = \frac{2}{2m+n}$, $NH = \frac{2}{2m+n} - \frac{1}{m} -$

$= \frac{n}{(m+n)(2m+n)}$, also das Pgrm. NI

$= \frac{nn}{2(m+n)(2m+n)}$.

Man ziehe die Chorde MP, welche von EN geschnitten werde. Es ist $HL = \frac{1}{2}MG = \frac{1}{2}(MD -$

$= \frac{n}{2m(m+n)}$. Vorher iſt gefunden NH

$= \frac{n}{(m+n)(2m+n)}$, alſo iſt NL

$= \frac{nn}{2m(m+n)(2m+n)}$. Das Δ NLP iſt

$= \frac{1}{2}$ NL $\times$ PH, alſo iſt

$$\Delta NLP = \frac{n^3}{8m(m+n)(2m+n)}.$$

Das Dreyeck NLM iſt dem NLP gleich, weil die Grundlinien ML, PL gleich ſind. Folglich iſt

$$\Delta MNP = \frac{n^3}{4m(m+n)(2m+n)}.$$

Man ſetze $n = \frac{1}{p}$, und $m = \frac{q}{p}$, ſo iſt das Pgrm.

$NHGK = \frac{1}{(2q+1)(2q+2)}$, und das Dreyeck

$MNP = \frac{1}{2q(2q+1)(2q+2)}$.

Es ſey zuerſt CD $= 1$, alſo MD $= 1$, ſo iſt bey der erſten Zweytheilung $q = p$; bey der zweyten kommt $2p$ ſtatt p, und q erhält die Werthe $2p$; $2p+1$. Bey der dritten Zweytheilung kommt $4p$ für $2p$, und q erhält die Werthe $4p$; $4p+1$; $4p+2$; $4p+3$. u. ſ. f.

Z. B. Es ſey DF $= 1$, ſo iſt $p = 1$, und für das erſte Pgrm. NHGK, iſt $q = 1$; für die zwey folgenden hat q die Werthe 2; 3; für die vier nächſten die Werthe 4; 5; 6; 7, u. ſ. f. Setzt man dieſe Werthe in unſere beiden Formeln, ſo erhält man die Glieder der erſten und dritten Brounckerſchen Reihe.

In dem zweyten Exempel, welches Brouncker berechnet, iſt MD : PF $= 5 : 4$, und CD $= 1$, alſo DF $= \frac{4}{5}$, und $p = 4$. Daher iſt $\Delta MNP = \frac{1}{8.9.01}$

Für die zwey folgenden Dreyecke in dem Segmente
die Werthe, 8 ; 9 ; und die beiden Dreyecke
$\frac{1}{16\ 17.18}$; $\frac{1}{18.19.20}$. Für die folgenden vier
ecke hat q die Werthe 16, 17, 18, 19, und die
Dreyecke sind $\frac{1}{32.33.34}$; $\frac{1}{34.35.36}$; $\frac{1}{36.37.}$
$\frac{1}{38.39.40}$; u. s. f.

Brouncker hat noch aus den berechneten Glieder
Reihe, welche das hyperbolische Segment ausdruckt
die übrigen zwey nahe kommende Werthe gefunden,
einer größer, der andere kleiner als diese noch übrig
Er berechnet daraus den natürlichen Logarithmen v
und 10 bis auf die sechste Decimalstelle. Es ist nä
die hyperbolische Area ABDEHA (Fig. 58.) der n
liche Logarithme von CD, wenn CB zur Einhe
Längen, und das Quadrat von CB zur Einheit der Fl
räume genommen wird. Allein diese Methode Logarit
zu berechnen ist noch zu mühsam. Mercator g
derselben Zeit, als Brouncker seine Quadratur der H
bel bekannt machte, seine Logarithmotechnie heraus,
er eine leichtere Art die Logarithmen und hyperbol
Flächenräume, wie ABDEHA, zu berechnen,
Sie erfordert eine Infinitesimalrechnung, die mi
Integration der Formel $x^n dx$ übereinkommt. B
ckers Quadratur ist eigentlich dadurch merkwürdig, d
keiner Infinitesimalrechnung bedarf.

Bruch, gebrochne Zahl (Fractio), ist diej
deren Einheit ein Theil der Einheit für die ganzen Z
(der Grund-Einheit) ist. Ein Bruch enthält der
zwey Begriffe, erstlich die Bruchseinheit (unité fr
ctionnaire), welche durch die Eintheilung der Einhe
die ganzen Zahlen, sie mögen benannte oder unben
seyn, entsteht, und zweytens die Anzahl dieser Bruch

heiten. Z. B. $\frac{3}{4}$ und $\frac{7}{4}$, enthalten beide den 4ten Theil der Grund-Einheit einige mahl, jener Bruch 3 mahl, dieſer 7 mahl.

Die Zahl, welche die Menge der in der Grund-Einheit angenommenen Theile anzeigt, heißt der Nenner (denominator); die Zahl, welche die Menge der Bruchs-Einheiten angiebt, heißt der Zähler (numerator). Man ſchreibt ſie über einander, den Zähler über dem abſondernden Querſtriche, den Nenner darunter, wie $\frac{5}{8} : \frac{13}{8}$. Jenes bedeutet 5mal $\frac{1}{8}$, dieſes 13mal $\frac{1}{8}$.

Ein Bruch iſt ein Quotient, der aus der Diviſion des Zählers durch den Nenner entſteht. Denn es iſt einerley, ob man von dem ganzen Dividendus einen gewiſſen Theil, oder ob man von jeder Einheit deſſelben den eben ſo vielten Theil nimmt. Iſt der Dividendus kleiner als der Diviſor, z. B. wenn 7 durch 12 zu dividiren ſind, ſo kann man den Quotienten nicht anders als durch den Bruch $\frac{7}{12}$ (das iſt 7 mahl $\frac{1}{12}$) ausdrucken. Iſt der Dividendus größer als der Diviſor, ſo kann man dem Quotienten eine doppelte Form geben. Z. B. der Quotient von 19 durch 5 iſt $\frac{19}{5}$ oder $3\frac{4}{5}$. Es iſt nämlich $19 = 3 \times 5 + 4$. Soll der Quotient angeben, wie oft man den Diviſor von dem Dividendus wegnehmen könne, ſo iſt in dem Beyſpiele die Antwort; 3mahl und noch den 5ten Theil des Diviſors 4 mahl.

Ein wahrer oder eigentlicher Bruch (fractio vera) iſt kleiner als die Einheit, oder der Zähler deſſelben iſt kleiner als der Nenner, oder als die Menge der in der Einheit enthaltenen Bruchs-Einheiten, z. B. $\frac{3}{4}$.

Ein uneigentlicher Bruch (fractio ſpuria) iſt ſo groß oder größer als die Einheit, oder der Zähler deſſelben iſt ſo groß oder größer als der Nenner, z. B. $\frac{4}{4}$ oder $\frac{5}{4}$. Durch die wirkliche Diviſion wird ein ſolcher Bruch in eine ganze Zahl, mit dem anhangenden Bruche verwandelt.

Ein **Bruchs-Bruch** ist, wenn anstatt von d Grund-Einheit einen gewissen Theil ein oder mehrmahl nehmen, von einem Bruche dieses geschieht. Z. B. von $\frac{3}{4}$ Thlr. Dies bedeutet den 3ten Theil von $\frac{3}{4}$ Th 2 mahl, oder $\frac{6}{12} = \frac{1}{2}$ Thlr. Ein Bruchs-Br wird leicht auf einen gewöhnlichen oder einfachen Br gebracht. Das Product der Zähler wird der Zähl das Product der Nenner wird der Nenner des einfach Bruches.

Bey benannten Zahlen sind die der Haupt-Einh nächst kleinern Einheiten Brüche jener, die darauf folg den kleinern Einheiten sind Bruchs-Brüche, die auf di folgende sind Bruchs-Bruchs-Brüche. Z. B. 12 9 9 Lth. 3 Qtchn. sind $(12 + \frac{9}{32} + \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{32})$ Pfunde. Oder 8 Cent. 23 Pf. 5 Lth. 3 Quent. sind $(8 + \frac{2}{1} + \frac{5}{32} \cdot \frac{1}{110} + \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{32} \cdot \frac{1}{110})$ Centner.

Ein **unreiner Bruch** oder **Doppelbruch** ist ein cher, dessen Zähler und Nenner beide oder einer von ih Brüche sind. Z. B. $\frac{7\frac{2}{3}}{18}$; $\frac{8}{4\frac{2}{3}}$; $\frac{4\frac{2}{7}}{9\frac{1}{5}}$. Nach dem sten dieser Brüche ist die Grund-Einheit in 18 glei Theile getheilt; die Anzahl, die davon genommen wi enthält einen Bruchtheil jenes Theils — Nach dem zw ten Bruche ist die Grund-Einheit in zweyerley Theile theilt, in 4 gleiche und 2 kleinere, deren jeder $\frac{1}{3}$ eines 4 gleichen ist. Von den 4 gleichen Theilen sollen zuf des Zählers 8 genommen werden. — Nach dem drit zum Beyspiele gesetzten Bruche ist die Grund-Einheit 9 gleiche Theile nebst $\frac{1}{7}$ eines solchen Theils gethe

Der Zähler enthält einen der 9 Theile $4\frac{2}{7}$ mahl. — Die Doppelbrüche werden auf einfache gebracht, wenn man mit dem Produkte der Nenner in den Brüchen des Zählers und Nenners dieſe multiplicirt. So iſt der erſte Bruch $= \frac{37}{90}$; der zweyte $= \frac{24}{14} = \frac{12}{7}$; der dritte $= \frac{150}{322} = \frac{75}{161}$. Der Bruch $\frac{7}{\frac{2}{3}}$ iſt $= \frac{21}{2}$. Hier iſt die Bruchs-Einheit $\frac{2}{3}$ der Grund-Einheit, da $\frac{2}{3}$ derſelben die Grund-Einheit ausmachen. — Bey der Anwendung allgemeiner Formeln, die Brüche enthalten, kommt man oft auf Doppelbrüche. Auch bey gemeinen Rechnungen. Z. B. Wenn ein Friedrichsdo'r $4\frac{2}{3}$ Rthlr. hannöveriſch Geld iſt, und der Ducat $2\frac{1}{4}$ Rthlr., ſo iſt ein Friedrichsdo'r $= \frac{4\frac{2}{3}}{2\frac{1}{4}}$ Ducat. Rechnet man das Jahr zu $365\frac{1}{4}$ Tage, den Monath zu $29\frac{1}{2}$ Tage, ſo iſt ein Monath $= \frac{29\frac{1}{2}}{365\frac{1}{4}}$ Jahr.

Decimal-Brüche; Sexageſimal-Brüche; Kettenbrüche (continuirliche Brüche) ſ. an ihren Stellen.

Bruch-Rechnung iſt das Verfahren mit Brüchen zu rechnen.

Wenn man den Zähler eines Bruches durch eine Zahl multiplicirt oder dividirt, ſo wird der Bruch ſelbſt durch dieſe Zahl multiplicirt oder dividirt z. B. $\frac{3.2}{11} = \frac{6}{11} = \frac{3}{11}$. 2

Wird der Nenner eines Bruches durch eine Zahl multiplicirt oder dividirt, ſo wird der Bruch durch dieſe Zahl dividirt oder multiplicirt. Z. B. $\frac{7}{4.3} = \frac{7}{12} = \frac{7}{4} : 3$.

Werden Zähler und Nenner eines Bruches di
selbe Zahl multiplicirt oder dividirt, so bleibt de
des Bruches unverändert, und die Brüche sind g
lige. Z. B. $\frac{3}{4} = \frac{6}{8} = \frac{24}{32}$.

Hierauf beruht die Reduction der Brü
ungleichen Nennern auf Brüche von einerley
oder gleicher Benennung, oder das Einricht
Brüche, welches bey der Addition und Subtrac
cher Brüche nothwendig ist.

Die allgemeine Regel für das Einrichten bei
ist: Man multiplicire Zähler und Nenner jedes
mit dem Producte der Nenner aller übrigen

Z. B, $\frac{2}{3}$; $\frac{4}{7}$; $\frac{1}{5}$; $\frac{3}{4}$ sind $\frac{280}{420}$; $\frac{240}{420}$; $\frac{8}{4}$
$\frac{315}{420}$.

Oft kann man zu dem gemeinschaftlichen Ne
einer kleinern Zahl ausreichen, als die nach dies
herauskommende ist. Wenn nämlich zwey oder
Nenner einen gemeinschaftlichen Factor haben,
man diesen nur bey einem Nenner bey, und läßt
den übrigen weg. Die Nenner seyn 6, 10, 14,
der kleinste gemeinschaftliche Nenner = 2.3.5.7
es kommt hier nur darauf an, eine Zahl zu finden
alle Nenner aufgehen. Mit dem Quotienten dies
durch jeden Nenner wird der dazu gehörige Zähle
plicirt.

Vorausgesetzt, daß man jede Zahl in ihre e
Factoren zu zerlegen wisse, zerfälle man jeden N
seine einfachen Factoren, und streiche diejenigen a
schon aus andern Nennern vorkommen. Das
der übrigen ist der kleinste gemeinschaftliche Nenne
die Brüche, welche auf einerley Benennung zu brin

seyn $\frac{5}{12}$, $\frac{3}{10}$, $\frac{7}{8}$, $\frac{11}{15}$, $\frac{4}{21}$, $\frac{1}{14}$. Zerfällt man die Nenner, nach der Ordnung der Brüche, in ihre einfachen Factoren, und streicht die überflüssigen aus, so erhält man das Product

2. 2. 3 × 2. 5 × 2. 2. 2 × 3. 5 × 2. 7 × 2. 7

oder 2. 2. 3. 5. 2. 7 = 840 als den kleinsten gemeinschaftlichen Nenner, und die Zähler der eingerichteten Brüche sind 350, 252, 735, 616, 160, 60.

Die Reduction eines Bruches auf die kleinsten Zahlen im Zähler und Nenner, oder das Aufheben eines Bruchs, geschieht mittelst der Division des Zählers und Nenners durch den größten gemeinschaftlichen Factor, wofern ein solcher vorhanden ist. Wie man diesen findet, zeigt der Artikel: Theiler, gemeinschaftlicher. Z. B. der Bruch $\frac{805}{2829}$ wird durch die Division beider Zahlen durch 23 in den $\frac{35}{123}$ verwandelt. — Wie ein unverkleinerlicher Bruch mit dem möglich kleinsten Fehler in kleinern Zahlen ausgedruckt wird, zeigt der Artikel: Aufheben der Brüche.

Addition der Brüche. Man bringe sie auf einerley Nenner, wenn sie nicht schon sie haben, und addire die Zähler. Die Summe wird als Zähler mit jenem Nenner verbunden. Z. B. $\frac{5}{6} + \frac{7}{10} + \frac{11}{14} = \frac{175}{210}$ $+\frac{147}{210} + \frac{165}{210} = \frac{487}{210} = 2\frac{67}{210}$. Weil die Zähler nunmehr einerley Theile des Ganzen bedeuten, so kann man sie als Größen einer Art zusammen nehmen.

Subtraction der Brüche. Man bringe sie, wenn es nöthig ist, auf einerley Benennung, und subtrahire den kleinern Zähler von dem größern. Der Unterschied

wird als Zähler über den gemeinschaftlichen Nenner
setzt. Z. B. $\frac{5}{6} - \frac{7}{10} = \frac{25}{30} - \frac{21}{30} = \frac{4}{30} = \frac{2}{15}$ ..

Multiplication der Brüche. Wenn ein Bruch einer ganzen Zahl multiplicirt werden soll, so multipl man den Zähler mit dieser Zahl, oder dividire den Ne durch dieselbe. Z. B. $\frac{5}{8}$ durch 7 multiplicirt ist $\frac{3}{8}$
und $\frac{5}{8}$ durch 4 multiplicirt ist $\frac{20}{8}$ oder kürzer $\frac{5}{2}$ (s. Br

Soll eine ganze Zahl durch einen Bruch multipl werden, so multiplicirt man sie durch den Zähler, dividirt sie durch den Nenner, z. B. $7 \times \frac{3}{4} =$
$= 5\frac{1}{4}$.

Soll ein Bruch durch einen Bruch multiplicirt wer so multiplicirt man den Zähler jenes durch den Zähler andern; eben so die Nenner; das erstere Product ist Zähler, das andere ist der Nenner des Bruchs, wel dem Produkte der beiden Brüche gleich ist. Z. $\frac{5}{8} \times \frac{3}{7} = \frac{15}{56}$; und $\frac{5}{8} \times \frac{9}{4} = \frac{45}{32} = 1\frac{13}{32}$.

Sind mehrere Brüche in einander zu multipliciren giebt das Product aller Zähler den Zähler des Prod das Product aller Nenner den Nenner desselben. Z. $\frac{3}{4} \times \frac{5}{8} \times \frac{9}{7} \times \frac{11}{2} = \frac{1485}{448} = 3\frac{141}{448}$.

Da ein Product den Multiplicandus auf dieselbe enthält, als der Multiplicator die Einheit, und ein B $\frac{3}{7}$, oder allgemein, $\frac{m}{n}$, den nten Theil der Grund-

heit m mahl enthält, so muß man, bey der Multiplication durch $\frac{m}{n}$, den nten Theil des Multiplicandus m mahl nehmen, d. i. mit dem Nenner n dividiren, und mit dem Zähler m multipliciren. Die Multiplication mit einem Bruche ist demnach eine gedoppelte Operation, sowohl ein Vervielfältigen als Theilen, so wie ein Bruch zwey Begriffe enthält, den einer Bruchseinheit und den einer gewissen Menge derselben. Man nennt es aber ein Multipliciren wegen der Übereinstimmung mit der Multiplication durch eine ganze Zahl.

Division der Brüche. Einen Bruch durch eine ganze Zahl zu dividiren, wird entweder der Nenner durch dieselbe multiplicirt oder der Zähler dadurch dividirt. Z. B. $\frac{5}{8}$ durch 7 dividirt, ist $=\frac{5}{56}$; und $\frac{8}{9}$ durch 4 dividirt ist $=\frac{2}{9}$, (s. Bruch).

Soll eine ganze Zahl durch einen Bruch dividirt werden, so wird sie durch den Nenner multiplicirt und durch den Zähler dividirt. Z. B. $9:\frac{2}{5}=\frac{45}{2}=22\frac{1}{2}$.

Soll ein Bruch durch einen Bruch dividirt werden, so multiplicirt man den Zähler des Dividendus durch den Nenner des Divisors, und den Nenner jenes durch den Zähler dieses; das erstere Product giebt den Zähler, das andere den Nenner des Quotienten. Z. B. $\frac{4}{7}:\frac{3}{5}=\frac{20}{21}$ und $\frac{4}{7}:\frac{9}{5}=\frac{20}{63}$.

Der Quotient giebt denjenigen Theil des Dividendus an, welcher darin eben so enthalten ist, als die Einheit in dem Divisor. Nun entsteht die Grund-Einheit aus einem Bruche, $\frac{m}{n}$, mittelst der Multiplication durch n und

Diviſion durch m, oder iſt $\frac{n}{m}$ dieſes Bruches. Al
ſteht der Quotient aus dem Dividendus, bey der Di
durch den Bruch, $\frac{m}{n}$, auf dieſelbe Art, nämlich
die Multiplication mit den Nenner n, und Diviſio
dem Zähler m.

Der Quotient iſt ein Bruchtheil des Divide
nämlich $\frac{n}{m}$, daher mit dem Bruche $\frac{m}{n}$ dividiren
iſt als mit dem umgekehrten Bruche $\frac{n}{m}$ multiplicire

Die Diviſion durch einen Bruch iſt eine gedo
Operation, ein Theilen und Vervielfältigen, die ma
gen der Übereinſtimmung mit der Diviſion durch eine
Zahl Diviſion nennt.

Beym Dividiren und Multipliciren läßt ſich die
nung abkürzen, wenn man, wo es thunlich iſt, a
der Multiplication des Zählers oder Nenners eine
ſion des Nenners und Zählers vornimmt. So iſt

$$\frac{9}{8} \times \frac{4}{3} = \frac{3}{2}; \text{ und } \frac{15}{8} : \frac{3}{2} = \frac{5}{4}.$$

Die Multiplication durch einen eigentlichen Bruch
kleinert; die Diviſion durch einen ſolchen Bruch vergrö
In dieſer Abſicht iſt die Operation mit einem eigentl
Bruche der mit ganzen Zahlen entgegengeſetzt. Ab
dem Weſentlichen ſtimmen ſie doch überein.

Die Regeln für die Multiplication und Diviſio
Brüche mögen am kürzeſten folgendergeſtalt erwieſen we

1. Es iſt $\frac{m}{n} \times n = m$, und $\frac{p}{q} \times q = p$,

$\frac{m}{n} \times n \times \frac{p}{q} \times q = mp$, und mittelſt der Di
durch $n \times q$ iſt $\frac{m}{n} \times \frac{p}{q} = \frac{mp}{nq}$.

2. Es ist $\frac{m}{n} \times n : \frac{p}{q} \times q = \frac{m}{p}$, und mittelst der Division durch n und Multiplication durch q ist $\frac{m}{n} : \frac{p}{q} = \frac{mq}{np}$.

So wie mehrere Brüche unter einen gemeinschaftlichen Nenner gebracht werden können, so kann man auch einen Bruch wieder in mehrere Brüche zerlegen, und zwar in so viele, als der Nenner einfache Factoren hat. Z. B. den Bruch $\frac{31}{35}$ zu zerlegen, setze man $\frac{31}{35} = \frac{a}{5} + \frac{b}{7}$, weil der Nenner die einfachen Factoren 5 und 7 hat. Die Summe der beiden Brüche ist $\frac{7a + 5b}{35}$; folglich ist $7a + 5b = 31$, wo a und b ganze Zahlen seyn sollen. Die unbestimmte Analytik lehrt, wie man in diesem Falle und in allen ähnlichen die Werthe von a und b, auch mit Einschluß der negativen, findet, die der Forderung Genüge thun. Hier muß $31 - 7a$ ein Vielfaches von 5, oder $31 - 5b$ ein Vielfaches von 7 seyn. Die kleinsten Werthe von a und b, die dieses leisten, sind 3 und 2, so daß $\frac{31}{35} = \frac{3}{5} + \frac{2}{7}$. Addirt man zu dem einem Bruche eine ganze Zahl und subtrahirt dieselbe von dem andern, so erhält man zwey Brüche, deren Unterschied der gegebene Bruch ist. Z. B. $\frac{8}{5} - \frac{5}{7}$; $\frac{13}{5} - \frac{12}{7}$.

Zweites Beyspiel. Der Bruch $\frac{79}{60}$ soll in drey Brüche mit den Nennern 3, 4, 5 zerlegt werden. Die Brüche seyn $\frac{a}{3} + \frac{b}{4} + \frac{c}{5}$, so ist $20a + 15b + 12c = 79$.

Da $15b + 12c = 79 - 20a$ ist, so ist der kleinste ganz positive Werth von $a = 2$, damit $79 - 20a$ sich, so wi der Theil linker Hand, durch 3 dividiren lasse, und ma erhält $5b + 4c = 13$, woraus $b = +1$ und $c = +$ folgt, so daß $\frac{79}{60} = \frac{2}{3} + \frac{1}{4} + \frac{2}{5}$ ist. — Man kan einen oder den andern Zähler auch negativ nehmen, un dadurch den zugehörigen Bruch subtractiv machen.

Wenn in dem Nenner die Potenz eines einfachen Fa tors enthalten ist, so kann man entweder diese Potenz al Nenner eines partiellen Bruchs behalten, oder diesen Bruc in Brüche zerfällen, deren Nenner eine geometrische Pr greſſion sind, von dem einfachen Factor an bis z der Potenz desselben in dem gegebenen Bruche. Z. 2

$\frac{31}{40} = \frac{2}{5} + \frac{3}{8} = \frac{2}{5} + \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{8}$. Der Bruch $\frac{1}{4}$ i subtractiv, weil $\frac{1}{2}$ größer als $\frac{3}{8}$ ist.

Zu den Nennern der partiellen Brüche darf man kei nehmen, die gemeinschaftliche Factore haben, wenn d Zähler ganze Zählen seyn sollen. Denn man nehme i Allgemeinen zwey Brüche $\frac{a}{\alpha} + \frac{b}{\beta}$, deren Summe $=$

$\frac{a\beta + b\alpha}{\alpha\beta} = \frac{A}{\alpha\beta}$. Ist nun der unverkleinerliche Bruch $\frac{A}{\alpha}$ gegeben so ist $A = a\beta + b\alpha$. Haben α und β nen gemeinschaftlichen Factor, so läßt sich auch A dadur dividiren, wider die Voraussetzung, daß der gegebene Bru nicht verkleinerlich sey. Eben so erhellt der Satz für me rere Brüche.

Bruchzeichen sind in der praktischen Geomet die Zeichen, wodurch die Ruthen, Fuße, Zolle, Lini (Grane) angedeutet werden, nämlich °) ') '') '''), z. 5° 8′ 8″ 3‴. Die kleine Null ist das Zeichen der E heit (wie $a^0 = 1$ ist); die Striche zeigen die Potenz

des Bruches $\frac{1}{10}$ oder $\frac{1}{12}$, oder eines andern an, womit die dadurch bezeichneten Zahlen zu multipliciren ſind. Es muß noch bemerkt werden, ob zehntheiliges oder zwölftheiliges Maaß bey den Längen gebraucht wird. Bey Flächenmaaß muß ein Q, oder Qu, oder □ angehängt werden; bey Körpermaaß ein C oder Cb oder das Zeichen ⌭.

Buchſtabenrechnung iſt der erſte Theil der Analyſis, welcher die allgemeine Bezeichnungsart der Größen und ihrer Zuſammenſetzungen (Formen) lehrt, zugleich auch die gemeinſten und leichteſten Rechnungsarten oder Umwandlungen ihrer Formen enthält. Um allgemeine Sätze und Auflöſungen der Aufgaben zu erhalten, iſt eine allgemeine Charackteriſtik nothwendig. Man wird dadurch in Stand geſetzt, ſehr verwickelte Verbindungen von Größen auf das deutlichſte darzuſtellen und zu faſſen, welches in Worten nicht anders als ſehr weitläuftig oder gar nicht geſchehen könnte. Die Buchſtabenrechnung iſt eine Zeichenſchrift, welche allen Mathematikern in jedem Volke verſtändlich iſt. Es iſt gar nicht ſchwer ſie zu leſen und zu verſtehen.

1. Die Größen werden durch Buchſtaben, als Symbole, dargeſtellt, die bekannten durch die erſten Buchſtaben des Alphabets, die unbekannten durch die letzten, oder die unveränderlichen (als beſtimmt gedachte) durch die erſtern, die veränderlichen durch die letztern. Die mittlern Buchſtaben, m, n, p, werden ſchicklich angewandt, ein Vielfaches anderer Größen zu bezeichnen; auch zur Bezeichnung der Exponenten von Potenzen. Man nimmt zu der Bezeichnung benannter Größen oft die Anfangsbuchſtaben der Worte, welche die Sprache für ſie hat, dieſes aber wird nicht ſelten unbequem, und wird unthunlich, wenn zwey Wörter einerley Anfangsbuchſtaben haben. — So wie man bey unbenannten Zahlen die Art der Einheit unbeſtimmt läßt, ſo bleibt bey den Bezeichnungen, a, b; m, n; y, z; die Menge der Einheiten und ihrer Theile unbeſtimmt. Es wird nur ein Grad der Abſtraction mehr erfordert, um ſich darunter Größen vorzuſtellen,

Diviſion durch m, oder iſt $\frac{n}{m}$ dieſes Bruches. Alſo entſteht der Quotient aus dem Dividendus, bey der Diviſion durch den Bruch, $\frac{m}{n}$, auf dieſelbe Art, nämlich durch die Multiplication mit den Nenner n, und Diviſion mit dem Zähler m.

Der Quotient iſt ein Bruchtheil des Dividendus, nämlich $\frac{n}{m}$, daher mit dem Bruche $\frac{m}{n}$ dividiren ſo viel iſt als mit dem umgekehrten Bruche $\frac{n}{m}$ multipliciren.

Die Diviſion durch einen Bruch iſt eine gedoppelte Operation, ein Theilen und Vervielfältigen, die man wegen der Übereinſtimmung mit der Diviſion durch eine ganze Zahl Diviſion nennt.

Beym Dividiren und Multipliciren läßt ſich die Rechnung abkürzen, wenn man, wo es thunlich iſt, anſtatt der Multiplication des Zählers oder Nenners eine Diviſion des Nenners und Zählers vornimmt. So iſt

$$\frac{9}{8} \times \frac{4}{3} = \frac{3}{2}\ ;\ \text{und}\ \ \frac{15}{8}\ ;\ \frac{3}{2} = \frac{5}{4}\ .$$

Die Multiplication durch einen eigentlichen Bruch verkleinert; die Diviſion durch einen ſolchen Bruch vergrößert. In dieſer Abſicht iſt die Operation mit einem eigentlichen Bruche der mit ganzen Zahlen entgegengeſetzt. Aber in dem Weſentlichen ſtimmen ſie doch überein.

Die Regeln für die Multiplication und Diviſion der Brüche mögen am kürzeſten folgendergeſtalt erwieſen werden.

1. Es iſt $\frac{m}{n} \times n = m$, und $\frac{p}{q} \times q = p$, alſo $\frac{m}{n} \times n \times \frac{p}{q} \times q = mp$, und mittelſt der Diviſion durch $n \times q$ iſt $\frac{m}{n} \times \frac{p}{q} = \frac{mp}{nq}$.

2. Es ist $\frac{m}{n} \times n : \frac{p}{q} \times q = \frac{m}{p}$, und mittelst der Division durch n und Multiplication durch q ist

$$\frac{m}{n} : \frac{p}{q} = \frac{mq}{np}.$$

So wie mehrere Brüche unter einen gemeinschaftlichen Nenner gebracht werden können, so kann man auch einen Bruch wieder in mehrere Brüche zerlegen, und zwar so viele, als der Nenner einfache Factoren hat. Z. B. den Bruch $\frac{31}{35}$ zu zerlegen, setze man $\frac{31}{35} = \frac{a}{5} + \frac{b}{7}$, weil der Nenner die einfachen Factoren 5 und 7 hat. Die Summe der beiden Brüche ist $\frac{7a+5b}{35}$; folglich ist $7a + 5b = 31$, wo a und b ganze Zahlen seyn sollen. Die unbestimmte Analytik lehrt, wie man in diesem Falle und in allen ähnlichen die Werthe von a und b, auch mit Einschluß der negativen, findet, die der Forderung Genüge thun. Hier muß $31 - 7a$ ein Vielfaches von 5, oder $31 - 5b$ ein Vielfaches von 7 seyn. Die kleinsten Werthe von a und b, die dieses leisten, sind 3 und 2, so daß $\frac{31}{35} = \frac{3}{5} + \frac{2}{7}$. Addirt man zu dem einen Bruche eine ganze Zahl und subtrahirt dieselbe von dem andern, so erhält man zwey Brüche, deren Unterschied der gegebene Bruch ist. Z. B. $\frac{8}{5} - \frac{5}{7}$; $\frac{13}{5} - \frac{12}{7}$.

Zweites Beyspiel. Der Bruch $\frac{79}{60}$ soll in drey Brüche mit den Nennern 3, 4, 5 zerlegt werden. Die Brüche seyn $\frac{a}{3} + \frac{b}{4} + \frac{c}{5}$, so ist $20a + 15b + 12c = 79$.

Da $15b + 12c = 79 - 20a$ ist, so ist der kleinste gan positive Werth von $a = 2$, damit $79 - 20a$ sich, so w der Theil linker Hand, durch 3 dividiren lasse, und m erhält $5b + 4c = 13$, woraus $b = +1$ und $c = +$ folgt, so daß $\frac{79}{60} = \frac{2}{3} + \frac{1}{4} + \frac{2}{5}$ ist. — Man kan einen oder den andern Zähler auch negativ nehmen, u dadurch den zugehörigen Bruch subtractiv machen.

Wenn in dem Nenner die Potenz eines einfachen Fa tors enthalten ist, so kann man entweder diese Potenz a Nenner eines partiellen Bruchs behalten, oder diesen Bru in Brüche zerfällen, deren Nenner eine geometrische Pr greſſion sind, von dem einfachen Factor an bis der Potenz desselben in dem gegebenen Bruche. Z. $\frac{31}{40} = \frac{2}{5} + \frac{3}{8} = \frac{2}{5} + \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{8}$. Der Bruch $\frac{1}{4}$ subtractiv, weil $\frac{1}{2}$ größer als $\frac{3}{8}$ ist.

Zu den Nennern der partiellen Brüche darf man kei nehmen, die gemeinschaftliche Factore haben, wenn Zähler ganze Zählen seyn sollen. Denn man nehme Allgemeinen zwey Brüche $\frac{a}{\alpha} + \frac{b}{\beta}$, deren Summe $\frac{a\beta + b\alpha}{\alpha\beta} = \frac{A}{\alpha\beta}$. Ist nun der unverkleinerliche Bruch gegeben so ist $A = a\beta + b\alpha$. Haben α und β nen gemeinschaftlichen Factor, so läßt sich auch A dadu dividiren, wider die Voraussetzung, daß der gegebene Br nicht verkleinerlich sey. Eben so erhellt der Satz für m rere Brüche.

Bruchzeichen sind in der praktischen Geomet die Zeichen, wodurch die Ruthen, Fuße, Zolle, Lin (Grane) angedeutet werden, nämlich °) ′) ″) ‴), z. $5° 8′ 8″ 3‴$. Die kleine Null ist das Zeichen der E heit (wie $a° = 1$ ist); die Striche zeigen die Poten

des Bruches $\frac{1}{10}$ oder $\frac{1}{12}$, oder eines andern an, womit die dadurch bezeichneten Zahlen zu multipliciren ſind. Es muß noch bemerkt werden, ob zehntheiliges oder zwölftheiliges Maaß bey den Längen gebraucht wird. Bey Flächenmaaß muß ein Q, oder Qu, oder □ angehängt werden; bey Körpermaaß ein C oder Cb oder das Zeichen ⌭.

Buchſtabenrechnung iſt der erſte Theil der Analyſis, welcher die allgemeine Bezeichnungsart der Größen und ihrer Zuſammenſetzungen (Formen) lehrt, zugleich auch die gemeinſten und leichteſten Rechnungsarten oder Umwandlungen ihrer Formen enthält. Um allgemeine Sätze und Auflöſungen der Aufgaben zu erhalten, iſt eine allgemeine Charackteriſtik nothwendig. Man wird dadurch in Stand geſetzt, ſehr verwickelte Verbindungen von Größen auf das deutlichſte darzuſtellen und zu faſſen, welches in Worten nicht anders als ſehr weitläuftig oder gar nicht geſchehen könnte. Die Buchſtabenrechnung iſt eine Zeichenſchrift, welche allen Mathematikern in jedem Volke verſtändlich iſt. Es iſt gar nicht ſchwer ſie zu leſen und zu verſtehen.

1. Die Größen werden durch Buchſtaben, als Symbole, dargeſtellt, die bekannten durch die erſten Buchſtaben des Alphabets, die unbekannten durch die letzten, oder die unveränderlichen (als beſtimmt gedachte) durch die erſtern, die veränderlichen durch die letztern. Die mittlern Buchſtaben, m, n, p, werden ſchicklich angewandt, ein Vielfaches anderer Größen zu bezeichnen; auch zur Bezeichnung der Exponenten von Potenzen. Man nimmt zu der Bezeichnung benannter Größen oft die Anfangsbuchſtaben der Worte, welche die Sprache für ſie hat, dieſes aber wird nicht ſelten unbequem, und wird unthunlich, wenn zwey Wörter einerley Anfangsbuchſtaben haben. — So wie man bey unbenannten Zahlen die Art der Einheit unbeſtimmt läßt, ſo bleibt bey den Bezeichnungen, a, b; m, n; y, z; die Menge der Einheiten und ihrer Theile unbeſtimmt. Es wird nur ein Grad der Abſtraction mehr erfordert, um ſich darunter Größen vorzuſtellen,

als bey unbenannten Zahlen. — Die Buchstaben können jede Art von Größe bedeuten, bloße Zahlengrößen, geometrische Größen, Kräfte, Zeiten, Geschwindigkeiten. Die Analysis gebraucht eigentlich nur die unbenannten Größen, in Beziehung auf eine unbestimmte Einheit; die Anwendung hat es mit benannten Größen zu thun, wobey aber immer eine gewisse Einheit angegeben werden muß, wenn die Untersuchung sich der Rechnung bedient.

2. Die Zeichen, wodurch die Zusammensetzungsart der Größen dargestellt wird, sind erstlich die Zeichen der vier gemeinsten Rechnungsarten, der Addition (+), der Subtraction (—); der Multiplication (. oder ×, oder unmittelbare Zusammenstellung), der Division ein Strich zwischen Dividendus und Divisor, oder (:); der Vereinigung zu einem Ganzen, durch zwey Klammern ( ); der Potenzierung (durch den Exponenten oben an der Wurzelgröße); der Wurzelausziehung ($\sqrt{}$); die Zeichen der Gleichheit, (=) und der Ungleichheit (> oder <). Diese sind die, welche am häufigsten gebraucht werden. S. Zeichen.

3. Ein einfaches Symbol, wie a, vertritt oft die Stelle einer aus mehreren Größen zusammengesetzten Größe, der Abkürzung im Rechnen wegen. Für sich allein zeigt es eine formlose Größe an, die mit andern verbunden werden soll.

I. Addition.

4. Wenn die Theile, woraus ein Ganzes zusammengesetzt wird, keine Form haben, oder eintheilig sind, so werden sie bloß durch das Zeichen + verbunden.

$$a + b + c + d = S$$

bedeutet ein Ganzes S, welches aus den verschiedenen unbestimmten, formlosen Theilen oder eintheiligen Größen, a, b, c, d, zusammengesetzt wird.

5. Wenn die Theile des ganzen S wieder aus Theilen zusammengesetzt sind, so werden die gleichnamigen Theile

zusammengenommen, und die Anzahl derselben wird durch eine vorgesetzte Zahl, bestimmte oder unbestimmte, bemerkt. Z. E.

$$\begin{aligned} 3a + 5b + 2c &= A \\ 7a + 8b + 8c + 6d &= B \\ 2a + 4b + 3c + 2d + e &= C \end{aligned}$$

$$12a + 12b + 13c + 8d + e = A + B + C = S.$$

$$\begin{aligned} ma + nb + pc &= A \\ 2na + 3nb + qc &= B \end{aligned}$$

$$(m + 2n)a + 4nb + (p + q)c = A + B = S.$$

II. Subtraction.

6. Die Subtraction stellt einen Theil des Ganzen durch das Ganze und den andern Theil dar, also bey formlosen und eintheiligen Größen folgendergestalt:

$$a - b = U,$$

wo a das Ganze, b der eine Theil, (Subtrahendus) und der andere Theil (der Unterschied) U ist.

7. Wenn die abzuziehende Größe aus einigen Theilen besteht, so wird jeder Theil abgezogen.

$$a - (b + c) = a - b - c = U.$$

Denn es ist das Ganze, $a = U + (b + c) = U + b + c$, also $a - b - c = U$.

8. Ist die abzuziehende Größe ein Unterschied zweyer, nämlich $b - c$, so ist

$$a - (b - c) = a - b + c = U.$$

Denn es ist das Ganze, $a = U + (b - c) = U + b - c$, also $a - b + c = U$.

9. Wenn sowohl das Ganze (Minuendus) als der Subtrahendus aus mehreren Theilen bestehen, so werden

heile des Subtrahendus mit entgegengesetzten Vor-
n zu den ihnen gleichartigen des Minuendus gesetzt:
bey verschiedenen Vorzeichen derselben in dem Aggre-
wird dem Unterschiede das Vorzeichen des größern
ben. Z. B.

$$\begin{array}{r} 3a+5b-7c-3d+4e-f=A \\ a+5b-2c-4d-3e+3f=B \\ \hline 2a-3b-5c+d+7e-4f=A-B. \end{array}$$

$$\begin{array}{r} ma+nb+pc=A \\ 2na-3nb-qc=B \\ \hline (m-3n)a+4nb+(p+q)c=A-B. \end{array}$$

In dem Falle daß hier $2n > m$ ist, wird $-(2n-m)a$
statt $+(m-2n)a$ gesetzt. Der erste Terminus be-
kommt das Zeichen $+$ nicht vorgesetzt; und ist alsdann
additiv; soll er aber subtractiv seyn, so muß dieses durch
das Vorzeichen $-$ angezeigt werden.

Aggregation.

10. Wenn Größen, die aus additiven und subtracti-
ven Theilen zusammengesetzt sind, addirt werden, so nenne
man dieses Zusammennehmen, Aggregation. Z. B.

$$\begin{array}{r} 3a+2b+7c-4d=A \\ 5a-8b-4c-3d=B \\ \hline 8a-6b+3c-7d=A+B. \end{array}$$

11. Ein Aggregat ist nämlich eine Zusammensetzung
von mehreren Theilen, sie mögen einerley oder verschiedene
Vorzeichen haben, und begreift also sowohl Summe als
Unterschied. In der allgemeinen Rechnung werden die
Zusammensetzungen von Größen, welche sich nur durch
die Vorzeichen einer oder mehrerer dieser Größen unter-
scheiden, bloß für Abänderungen einer und derselben Form
gehalten, so daß der Beweis oder die Auflösung für einen

Fall, mutatis mutandis, auch für jeden oder andern gilt. Da also eine Zusammensetzung einer Größe aus mehreren Theilen alle durch die Vorzeichen verschiedene Fälle begreift, so kann man sie weder eine Summe (im eigentlichen Verstande) noch einen Unterschied nennen, sondern muß ihr einen allgemeinern Namen, Aggregat, geben.

III. Multiplication.

12. Die Multiplication zweyer eintheiligen Größen, a, b, wird durch ihre bloße Zusammenstellung angezeigt, als $ab = P$. So vielmahl die Einheit in einer der beiden, a, enthalten ist, so vielmahl ist die andere, b, in dem Producte, P, enthalten.

13. Es ist $(a+b)c = ac+bc$, und

$$(a-b)c = ac-bc.$$

wo die Klammern die Vereinigung zu einem Factor anzeigen. Der Beweis ist leicht.

14. Ferner ist

$$(a+b)(c+d) = a(c+d)+b(c+d)$$
$$= ac+ad+bc+bd.$$

$$(a-b)(c+d) = a(c+d)-b(c+d)$$
$$= ac+ad-bc-bd.$$

$$(a-b)(c-d) = a(c-d)-b(c-d)$$
$$= ac-ad-bc+bd.$$

Hier sieht man deutlich den Grund, warum verschiedene Vorzeichen der Factoren in dem Producte das Vorzeichen $-$; gleiche Zeichen aber $+$ geben.

15. Wenn die Factoren aus mehr als zwey Theilen bestehen, so bezeichne man alle mit $+$ begleiteten in dem einem Factor durch A, in dem andern durch C; alle mit $-$ verbundenen in jenem durch $-B$, die in diesem durch

— D. Nun ist (A — B) (C — D) = AC — AD — BC + BD. So erhellt, daß das Totalproduct aus den Partialproducten jedes Theils des einen Factors in jeden Theil des andern zusammengesetzt wird, und daß die Vorzeichen die gleich vorher gegebene Regel befolgen.

16. Wenn drey oder mehr Factoren vorhanden sind, so enthält das Product derselben alle Partialproducte aus jedem Theile jedes Factors in einen Theil jedes der andern Factoren. Es seyn drey Factoren, A — B; C — D; E — F, wo A, C, E, die mit + begleiteten Theile, B, D, F die mit — begleiteten bedeuten. Es ist (A — B) (C — D) (E — F) = (AC — AD — BC + BD) (E — F) = (ACE — ACF — ADE + ADF — BCE + BCF + BDE — BDF. Wo hier einer oder drey mit dem Vorzeichen — behaftete Factoren in einem Partialproducte vorkommen, erhält dieses das Vorzeichen (—); wo zwey solche Factoren zusammen kommen, erhält das Product das Vorzeichen (+). Überhaupt giebt eine ungerade Anzahl Partial-Factoren, die mit dem Vorzeichen (—) begleitet sind, dem Partialproducte das Vorzeichen (—), eine gerade Anzahl das Vorzeichen (+).

17. Mehrtheilige Größen pflegt man nach den Potenzen einer gewissen Größe, die man alsdann durch einen der letzten Buchstaben des Alphabets zur Unterscheidung bezeichnen mag, zu ordnen; ihr Product gleichfalls. Diese Größe wird hier so gebraucht, wie die Zehn in unserm Zahlensystem.

Multiplic. $5xx + 4ax - 7bb$

Multiplic. $3xx - 9ax + 2bb$

1. P. P. $15x^4 + 12ax^3 - 21b^2x^2$

2. = = $-45ax^3 - 36a^2x^2 + 63ab^2x$

3. = = $+10b^2x^2 + 8ab^2x - 14b^4$

Totalpr. $15x^4 - 33ax^3 - 36a^2x^2 + 71ab^2x - 14b^4 - 11b^2x^2$

Von der allgemeinen Multiplication zweyer und mehrerer solcher Reihen s. die Artikel Multiplication der Reihen, und combinatorische Analysis.

18. Einige merkwürdige Producte;

I. $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

II. $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

III. $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$

IV. $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$

V. $(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$

VI. $(a+b)^2(a-b) = a^3 + a^2b - ab^2 - b^3$

VII. $(a-b)^2(a+b) = a^3 - a^2b - ab^2 + b^3$

VIII. $(a^2 + ab + b^2)(a-b) = a^3 - b^3$

IX. $(a^2 - ab + b^2)(a+b) = a^3 + b^3$

X. $(a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 \ldots + ab^{n-2} + b^{n-1})$
$(a-b) = a^n - b^n$

XI. $(a^{n-1} - a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 \ldots \pm ab^{n-2} \mp b^{n-1})$
$(a+b) = a^n \mp b^n$, das obere Vorzeichen für ein gerades n; das untere für ein ungerades n.

Die Formeln I. und II.; IV. und V.; VI. und VII.; VIII. und IX.; X. und XI. zeigen, daß wenn in den Factoren ein Theil sein Vorzeichen durchgängig ändert, dieses auch in dem Producte geschieht, wo der Theil vorkommt. Es behält aber das Quadrat sein Vorzeichen, weil darin zwey Factoren ihr Vorzeichen ändern. Die Formel III. unterscheidet sich von I. und II. dadurch, daß b nur in dem einen Factor das Vorzeichen ändert; daher hat auch das Product eine ganz andere Form. Eben so verhält es sich mit VI. und VII. in Absicht auf V. und VI.

können, stellt man die Division auf dieselbe Art, wie für Zahlen, an. Man ordne Dividendus und Divisor nach den Potenzen einer Größe, und dividire den ersten Theil des Dividendus D durch den ersten Theil des Divisors d, so erhält man den ersten Theil q des Quotienten Q. Das Product q in den ganzen Divisor d wird von D abgezogen. Finden sich in jenem Theile, die nicht in diesem vorhanden sind, so setze man sie zu D mit beiden entgegengesetzten Vorzeichen, als wodurch D nicht geändert wird. Nun kommt der abzuziehende Theil mit entgegengesetzten Vorzeichen in den Rest. Der erste Theil des Restes durch den ersten Theil des Divisors dividirt, giebt den zweyten Theil q^1 des Quotienten Q. So fährt man fort, bis entweder o zum Reste kommt, oder bis man es schicklich findet abzubrechen, und den Rest mit dem Divisor dividirt, zuzufügen, vielleicht auch unter gewissen Bedingungen wegzulassen. Es ist zu merken, daß der Quotient auch subtrahirte Theile enthalten kann. Hat der erste Theil eines Restes das Vorzeichen —, so bekommt es der zugehörige Theil von Q auch. Es zeigt an, daß der Quotient, so weit er gefunden worden, zu groß ist. Das Product aus dem Divisor in jeden Theil des Quotienten muß sich in dem Dividendus finden, es sey nun, daß es ursprünglich da war, oder auf die vorher gewiesene Art hineingebracht ist. In dem letztern Falle heben sich bey der Multiplication des Divisors in den Quotienten, einige Theile, die daher in dem Dividendus nicht erscheinen, bey der Division aber hineingebracht werden. Als Beyspiel nehme man selbst das obige Product in (17.), und dividire es durch einen der Factoren, so wird der Quotient der andere Factor.

24. Es wird durch die Division gefunden:

$$\text{I.}\quad \frac{a+x}{b+x} = \frac{a}{b} - \frac{a-b}{b}\cdot\frac{x}{b} + \frac{a-b}{b}\cdot\frac{x^2}{b^2} - \frac{a-b}{b}\cdot\frac{x^3}{b^3} + \frac{a-b}{b}\cdot\frac{x^4}{b^4} - \text{etc.}$$

Die erste Reihe dient, wenn $\frac{x}{b}$ ein ächter Bruch ist, die andere, wenn $\frac{b}{x}$ ein solcher Bruch ist. Denn in dem ersten Falle würde die zweite Reihe nicht convergiren, in dem zweiten nicht die erste.

25. Wenn in dem Dividendus und Divisor eine oder mehrere der Theile negativ werden (ihr Vorzeichen ändern), so geschieht dies auch in dem Quotienten. So ist

$$\frac{a-x}{b-x} = \frac{a}{b} + \frac{a-b}{b}\cdot\frac{x}{b} + \frac{a-b}{b}\cdot\frac{x^2}{b^2} + \text{etc.}$$

$$\frac{x+a}{x-b} = 1 + \frac{a+b}{x} + \frac{b(a+b)}{x^2} + \text{etc.}$$

26. Es ist

I. $\frac{a}{1+x} = a - ax + ax^2 - ax^3 + ax^4 - \text{etc.}$

II. $\frac{a}{1-x} = a + ax + ax^2 + ax^3 + ax^4 + \text{etc.}$

III. $\frac{a}{x-1} = a\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3} + \frac{1}{x^4} + \text{etc.}\right)$

IV. $\frac{a^n - b^n}{a-b} = a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 \ldots + b^{n-1}$

V. $\frac{a^n \pm b^n}{a+b} = a^{n-1} - a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 \ldots \pm b^{n-1}$

Die vierte dieser Formeln kann zur Erläuterung der Differentialrechnung gebraucht werden. Je näher a und b sich kommen, desto näher kommt $\frac{a^n - b^n}{a-b}$ dem Werthe $n a^{n-1}$. Die Glieder aller dieser Reihen, absolut genommen, machen eine geometrische Reihe aus.

gen Winkel ausgedruckt werden, der Quotient iſt die Tangente deſſelben Winkels durch dieſen ausgedruckt; ſ. Cyklometrie, und Bernoulliſche Zahlen.

Die hier gewieſene Methode gehört zu der Anwendung der Lehre von den Combinationen. S. combinatoriſche Analyſis.

VI. Bruchrechnung.

29. Es iſt I. $a+\frac{b}{c}=\frac{ac+b}{c}$

II. $a-\frac{b}{c}=\frac{ac-b}{c}$

III. $\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{ad+bc}{bd}$

IV. $\frac{a}{b}-\frac{c}{d}=\frac{ad-bc}{bd}$

V. $\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{ac}{bd}$

VI. $\frac{a}{b}:\frac{c}{d}=\frac{ad}{bc}$

Die Beweiſe ſind in dem Artikel: Bruchrechnung, anzutreffen.

Aus dem Satze von der Zuſammenſetzung zweyer Verhältniſſe werden die Formeln V. VI. ſehr gut hergeleitet. Es iſt $1:\frac{a}{b}=b:a$, weil $1=\frac{b}{b}$ iſt. Gleichfalls iſt $1:\frac{c}{d}=d:c$. Folglich iſt $1:\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=bd:ac$ oder $1:\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=1:\frac{ac}{db}$. Da die vorhergehenden Glieder der beiden Verhältniſſe gleich ſind, ſo ſind es die nachfolgenden auch.

Ferner ist zuerst $\frac{a}{b} : = a : b$, und $1 : \frac{a}{d} = d : c$;

also $\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = ad : bc$; oder $\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{ad}{bc} : 1$;

das ist, der Quotient von $\frac{a}{b}$ durch $\frac{c}{d}$ ist $= \frac{ad}{bc}$.

C.

Canon ist erstlich eine allgemeine Regel zur Auflösung einer geometrischen oder algebraischen Aufgabe in allen ähnlichen und verwandten Fällen. In dieser Bedeutung kommt das Wort meistens nur bey ältern Schriftstellern vor. Die Neuern gebrauchen die Ausdrücke: Regel, Vorschrift, Formel, Methode.

Zweytens ist Canon eine Tafel berechneter Größen in einer bestimmten Fortschreitung, als eine Sammlung von einzelnen Vorschriften. Z. B. Canon naturalis triangulorum, d. i. die Tafel der trigonometrischen Linien; Canon artificialis triangulorum, die Tafel ihrer Logarithmen; Canon sexagenarius s. hexacontadon, eine zur Multiplication sechszigtheiliger Brüche eingerichtete Tafel; Canon Logarithmorum. Auch von astronomischen Tafeln wird in ältern Zeiten die Benennung Canon gebraucht, als in den Prutenicis tabulis coelestium motuum auct. Er. Reinholdo, Vitemb. 1585, worin die Tafeln die Überschrift Canon haben, als Canon ascensionum rectarum; canones aequalium motuum et prostaphaereseon, etc.

Was Canon in der theoretischen Musik, und Canon paschalis in der Chronologie bedeuten, wird in der zweyten Abtheilung dieses Werks vorkommen.

Canonion, einerley mit Canon, nur etwa von geringerm Umfange. In den gleich vorher angeführten Prutenischen Tafeln kommen ein paar Täfelchen vor, die

die Ueberschrift, Canonion führen. In einem seltenen trigonometrischen Werke von Vieta (varia opera mathematica, Paris. 1579 u. 1609. Fol.) kommt eine ausführliche Tafel für rechtwinklichte Dreyecke mit rationalen Seiten vor, welche mit Canonion überschrieben ist, da die Tafel der Sinus, Tangenten und Secanten in demselben Werke die Benennung, Canon, hat.

Canonisch ist, was zur Regel gebraucht wird. Harriot nennt aequatio canonica diejenige, worin die Formation der Coefficienten aus den Wurzeln der Gleichung sichtbar ist, weil sie zur Vergleichung mit einer gegebenen Gleichung dient. Die Analogien zur Berechnung eines rechtwinklichten Dreyecks, geradlinichten oder sphärischen, nennt Vieta in dem gleich vorher angeführten Werke analogias canonicas.

Capacität ist der Inhalt eines Körpers, insbesondere eines Gefäßes, verglichen mit einem gewissen Maaße, als der Einheit für die Räume.

Capax (fassend, franz. capable) wird von einem Kreisabschnitte gesagt, so fern dieser einen gewissen Winkel faßt, dessen Scheitel nämlich in den Bogen fällt, und dessen Schenkel durch die Endpuncte des Kreisbogens gehen. Alle solche Winkel in demselben Abschnitte sind sich gleich. Abschnitte verschiedener Kreise, die einerley Winkel fassen, sind ähnlich.

Capitulum ist in der alten Algebra eine algebraische Gleichung mit gewissen Bestimmungen der Form und Zeichen. Z. B. Capitulum cubi aequalis rebus et numero ist, was wir jetzt durch die Gleichung, $x^3 = ax + b$, ausdrucken. Jeder besondere Fall gab ein Capitulum.

Cardans Regel ist eine algebraische Formel für die Wurzel einer cubischen Gleichung, wenn diese nur eine einzige mögliche Wurzel hat. Sie ist in dem Artikel Gleichung, III. 14, 15. vorgetragen. Sie sollte eigent-

lich die Regel des Tartalea heißen, ſ. Geſchichte der Algebra in dem Artikel, Algebra.

Hier iſt zu zeigen, wie dieſe Formel auch zur Auflöſung der Gleichungen mit drey möglichen Wurzeln angewandt werden kann, ungeachtet ſie für dieſen Fall unmögliche Größen enthält.

1. Die cubiſche Gleichung ſey, nach weggeſchafftem zweiten Gliede, wenn es vorhanden war, $x^3 - bx - c = o$, ſo iſt, wenn $\frac{1}{4}c^2 - \frac{1}{27}b^3 = A^2$ geſetzt wird.

$$x = \sqrt[3]{(\tfrac{1}{2}c + A)} + \sqrt[3]{(\tfrac{1}{2}c - A)}$$

$$= \sqrt[3]{(A + \tfrac{1}{2}c)} - \sqrt[3]{(A - \tfrac{1}{2}c)}.$$

In dem Falle, da $\frac{1}{27}b^3 > \frac{1}{4}c^2$ iſt, iſt A eine unmögliche Größe; die Gleichung aber hat alsdann drey mögliche Wurzeln.

2. Um das Unmögliche in beyden Cubikwurzeln ſich heben zu laſſen, muß jede derſelben, nach dem binomiſchen Lehrſatze, in eine Reihe verwandelt werden. Dieſem zufolge iſt (binom. Lehrſ. 13.)

$$\sqrt[3]{(1 \pm z)} = 1 \pm \tfrac{1}{3}z - \frac{1 \cdot 2}{3.6}z^2 \pm \frac{1 \cdot 2 \cdot 5}{3.6.9}z^3$$

$$- \frac{1 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 8}{3.6.9.12}z^4 \pm \frac{1 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 8 \cdot 11}{3.6.9.12.15}z^5 - \text{etc.}$$

3. Man bezeichne die numeriſchen Werthe der Coefficienten, ohne Rückſicht auf die Vorzeichen, durch A, B, C, D, etc., ſo daß $\sqrt[3]{(1 \pm z)} = 1 \pm Az^1 - Bz^2 \pm Cz^3 - Dz^4 \pm Ez^5 - \text{etc.}$

Die Coefficienten mit ihren Logarithmen sind, jene bis auf die zehnte Decimalstelle.

	Coefficienten		Logarithmen
$\mathfrak{A}$	= 0, 333333	3333	9, 5208787
$\mathfrak{B}$	= 0, 111111	1111	9, 0457575
$\mathfrak{C}$	= 0, 061728	3951	8, 7904850
$\mathfrak{D}$	= 0, 041152	2634	8, 6143937
$\mathfrak{E}$	= 0, 030178	3265	8, 4796952
$\mathfrak{F}$	= 0, 023472	0317	8, 3705507
$\mathfrak{G}$	= 0, 019001	1685	8, 2787804
$\mathfrak{H}$	= 0, 015834	3071	8, 1995990
$\mathfrak{J}$	= 0, 013488	4838	8, 1299632
$\mathfrak{K}$	= 0, 011690	0193	8, 0678158

4. Es sey A^2 negativ, weswegen man setze $A = Q\sqrt{-1}$. Um convergirende Reihen zu erhalten, hat man die beiden Fälle, da $\frac{1}{2}c$ größer, und da es kleiner als Q ist, zu unterscheiden. Es sey zuerst $\frac{1}{2}c$ größer als Q.

Man setze $\frac{2Q}{c} = B$, so wird aus der Formel,

$$x = \sqrt[3]{(\tfrac{1}{2}c + Q\sqrt{-1})} + \sqrt[3]{(\tfrac{1}{2}c - Q\sqrt{-1})}, \text{ diese,}$$

$$= \left(\sqrt[3]{(1 + B\sqrt{-1})} + \sqrt[3]{(1 - B\sqrt{-1})}\right)\sqrt[3]{\tfrac{1}{2}c}.$$

Bey der Entwickelung der Wurzelgrößen heben sich die unmöglichen Theile; die einfach geraden Potenzen von $B\sqrt{-1}$, welche für sich das Vorzeichen — haben, erhalten in der Reihe das Vorzeichen +; dagegen die doppelt geraden in derselben das Vorzeichen — bekommen, demnach ist

$$x = 2(1 + \mathfrak{B}B - \mathfrak{D}B^4 + \mathfrak{F}B^6 - \mathfrak{H}B^8 + \text{etc.})\sqrt[3]{\tfrac{1}{2}c}.$$

5. Zweytens sey $\frac{1}{2}c$ kleiner als Q. Nun setze man $\frac{c}{2Q} = C$, so wird aus der Formel

$x = \sqrt[3]{(QV-1+\frac{1}{2}c)} - \sqrt[3]{(QV-1-\frac{1}{2}c)}$ diese,

$$x = \left(\sqrt[3]{(1+\frac{C}{V-1})} - \sqrt[3]{(1-\frac{C}{V-1})}\right)\sqrt[3]{QV-1}.$$

Es ist $\sqrt[3]{QV-1} = -\sqrt[3]{Q}.V-1$, da der zweyte Theil dieser Gleichung cubirt $= QV-1$ ist. Bey der Entwickelung der Wurzelgrößen bleiben bloß die Glieder, welche durch $V-1$ dividirt sind. Hier hebt sich die Division durch $V-1$ gegen die Multiplication mit $V-1$ in dem gemeinschaftlichen Factor auf. Demnach ist

$$x = -2(AC - CC^3 + EC^5 - GC^7 + JC^9 - \text{etc.})\sqrt[3]{Q}.$$

6. Die gefundene Wurzel heiße p. Die beyden übrigen seyn q, r. Da das zweyte Glied der Gleichung fehlt, so ist $p+q+r=0$, oder $q+r=-p$; auch ist $pq+pr+qr=-b$ (Gleichung III. 5.). Hieraus ist $qr=p^2-b$. Demnach sind q und r die Wurzeln der quadratischen Gleichung,

$$u^2+pu+p^2-b=0,$$

und $u=-\frac{1}{2}p\pm V(b-\frac{3}{4}p^2)$.

7. Man setze abgekürzt $\sqrt[3]{(\frac{1}{2}c+A)} = m$; und $\sqrt[3]{(\frac{1}{2}c-A)} = n$, so ist $\sqrt[3]{(\frac{1}{4}c^2-A^2)} = mn$, das ist $\frac{1}{3}b=mn$ (aus 2.). Auch ist $p=m+n$; folglich $b-\frac{3}{4}p^2 = 3mn-\frac{3}{4}(m+n)^2 = +\frac{3}{4}(m-n)^2$. Daher ist

$$n = -\frac{1}{2}(m+n) \pm \frac{1}{2}(m-n)V-3.$$

Hier hebt sich in dem ersten Gliede das unmögliche durch gegenseitige Subtraction auf; in dem zweyten Gliede durch die Multiplication mit dem Factor $\sqrt{-3}$ oder $\sqrt{3}\cdot\sqrt{-1}$.

8. Es sey zuerst $\frac{1}{2}c$ größer als Q, und $\frac{2Q}{c} = B$, so ist

$$u = -(1 + \mathfrak{B}B^2 - \mathfrak{D}B^4 + \mathfrak{F}B^6 - \mathfrak{H}B^8 + \text{etc.})\sqrt[3]{\tfrac{1}{2}c}$$
$$\mp(\mathfrak{A}B - \mathfrak{C}B^5 + \mathfrak{E}B^5 - \mathfrak{G}B^7 + \mathfrak{J}B^9 - \text{etc.})\sqrt{3}\cdot\sqrt[3]{\tfrac{1}{2}c}$$

9. Ist $\frac{1}{2}c$ kleiner als Q, und $\frac{c}{2Q} = C$, so ist

$$u = +(\mathfrak{A}C - \mathfrak{C}C^3 + \mathfrak{E}C^5 - \mathfrak{G}C^7 + \mathfrak{J}C^9 - \text{etc.})\sqrt{Q}$$
$$\pm(1 + \mathfrak{B}C^2 - \mathfrak{D}C^4 + \mathfrak{F}C^6 - \mathfrak{H}C^8 + \text{etc.})\sqrt{3}\cdot\sqrt[3]{Q}$$

10. Exempel. Es sey $x^3 - 2100x + 24000 = 0$. Hier ist $b = 2100$, und $c = -24000$; also $A^2 = -199000000$; $Q^2 = +199000000$. Da $\frac{1}{2}c$ kleiner als Q ist, so werden für x die Formeln genommen, welche den Quotienten C enthalten. Es ist $C = -\frac{24000}{2Q}$. Die Rechnung mit Hülfe der Logarithmen ist folgende.

$\mathfrak{l}Q^2 = 8{,}2988531$
$\mathfrak{l}Q = 4{,}1494265$
$\mathfrak{l}\frac{1}{2}c = 4{,}0791812$
$\mathfrak{l}C = 9{,}9297547-10$

$\mathfrak{l}A = 9{,}52288$
$\mathfrak{l}C = 9{,}92975$
$= 9{,}45263$
$\mathfrak{l}B = 9{,}04576$
$\mathfrak{l}C^2 = 9{,}85951$
$= 8{,}90527$
$\mathfrak{l}E = 8{,}79048$
$\mathfrak{l}C^3 = 9{,}78926$
$8{,}57974$
$\mathfrak{l}D = 8{,}61439$
$\mathfrak{l}C^4 = 9{,}71902$
$8{,}33341$

$\mathfrak{l}E = 8{,}47969$
$\mathfrak{l}C^6 = 9{,}64877$
$8{,}12846$
$\mathfrak{l}F = 8{,}37055$
$\mathfrak{l}C^5 = 9{,}57853$
$7{,}94908$
$\mathfrak{l}G = 8{,}27878$
$\mathfrak{l}C^7 = 9{,}50828$
$7{,}78706$
$\mathfrak{l}H = 8{,}19960$
$\mathfrak{l}C^8 = 9{,}43804$
$7{,}63764$
$\mathfrak{l}J = 8{,}12996$
$\mathfrak{l}C^9 = 9{,}36779$
$7{,}49775$

$AC = -0{,}28355$ $+1 = +1{,}000000$
$-EC^3 = +0{,}03799$ $+BC^2 = +0{,}080403$
$+FC^5 = -0{,}01344$ $-DC^4 = -0{,}021548$
$-GC^7 = +0{,}00612$ $+FC^6 = +0{,}008893$
$+JC^9 = -0{,}00314$ $-HC^8 = -0{,}004341$
Aggregat $= -0{,}25602$ Aggregat $+1{,}08829$
$= F$ $= G$

$\mathfrak{l}F = 9{,}40827$
$\frac{1}{3}\mathfrak{l}Q = 1{,}38314$
$\mathfrak{l}2 = 0{,}30103$
$\mathfrak{l}p = 1{,}09244$
$p = +12{,}372$

$\mathfrak{l}G = 0{,}02670$
$\mathfrak{l}\sqrt{3} = 0{,}23856$
$\frac{1}{3}\mathfrak{l}Q = 1{,}38314$
$\mathfrak{l}H = 1{,}64840$
$H = 44{,}504$

Die eine Wurzel der Gleichung ist $p = +12,372$; die beiden andern sind $-6,186 \pm 44,504$, oder $q = +38,318$, und $r = -50,690$. Die Summe der drey Wurzeln ist $= 0$, wie es seyn muß, aber ihr Product ist $= 24030.6$ statt 24000. Denn der gefundene Werth von p ist etwas zu groß, weil in dem Factor F das nächstfolgende subtractive Glied weggelassen ist. Dieser nähert sich in dem Exempel dem völligen Werthe nur langsam.

Die Rechnung ist in dem vorgelegten Falle mühsam, und liefert die Wurzeln nur zwischen den Zehn- und Hundertheilen. Die Methode sie aus einer Reihe von Werthen der Gleichung zu finden, würde noch mühsamer seyn. Bey Gleichungen mit großen Coefficienten ist die Cardanische Regel brauchbarer. Inzwischen ist die Berechnung durch die trigonometrische Dreytheilung eines Winkels am leichtesten, s. die Auflösung dieser Gleichung in dem Artikel: Anwendung der Geometrie auf die Algebra. S. 154.

11. Die Cubikwurzel aus einer möglichen Größe, a^3, hat einen möglichen und zwey unmögliche Werthe, welche zusammen die Wurzeln der cubischen Gleichung $x^3 - a^3 = 0$ sind. Sie sind I. a; II. $-\frac{1}{2}a(1+\sqrt{-3})$; III. $-\frac{1}{2}a(1-\sqrt{-3})$, s. Cubikwurzel. Ist a^3 selbst eine unmögliche Größe, so sind alle drey Cubikwurzeln aus derselben unmöglich,, und eine so gut wie die andere als Cubikwurzel der unmöglichen Größe anzusehen. Die unmögliche Größe sey $A + B\sqrt{-1}$, so haben ihre Cubikwurzeln ebenfalls die Form $P + Q\sqrt{-1}$, damit bey der Cubirung ein möglicher und ein unmöglicher Theil entstehe. Man bezeichne eine der Wurzeln durch $P + Q\sqrt{-1}$, so sind die andern $= -\frac{1}{2}(P + Q\sqrt{-1})(1 + \sqrt{-3})$. Der Cubus jeder der drey Wurzeln ist $P^3 + 3P^2Q\sqrt{-1} - 3PQ^2 - Q^3\sqrt{-1}$, so daß $P^3 - 3PQ^2 = A$, und $3P^2Q - Q^3 = B$ ist. Daher sind die Cubikwurzeln aus $A - B\sqrt{-1}$ die drey: $P - Q\sqrt{-1}$, und $-\frac{1}{2}(P - Q\sqrt{-1})(1 \pm \sqrt{-3})$.

Folglich hat die Summe der beiden Cubikwurzeln, $\sqrt[3]{(A+B\sqrt{-1})} + \sqrt[3]{(A-B\sqrt{-1})}$ neuen Werthe, weil je eine der drey Wurzeln des ersten Theils mit je einer der drey Wurzeln des zweyten verbunden werden kann. Von diesen neun Combinationen sind drey mögliche Grössen, nämlich

$$P+Q\sqrt{-1} \text{ mit } P-Q\sqrt{-1}$$

$$-\tfrac{1}{2}(P+Q\sqrt{-1})(1+\sqrt{-3}) \text{ mit } -\tfrac{1}{2}(P-Q\sqrt{-1})(1-\sqrt{-3})$$

$$-\tfrac{1}{2}(P+Q\sqrt{-1})(1-\sqrt{-3}) \text{ mit } -\tfrac{1}{2}(P-Q\sqrt{-1})(1+\sqrt{-3}),$$

welche zur Summe geben: I. $2P$; II. $-P+Q\sqrt{3}$; III. $-P-Q\sqrt{3}$.

Hier ist $2P$ die vorher gefundene durch p bezeichnete Wurzel, und Q der zweyte Theil von u durch $\sqrt{3}$ dividirt.

12. Leibnitz hat zwar schon bemerkt, daß bey der Ausziehung der Cubikwurzel aus den beiden Theilen der Cardanischen Formel, vermittelst einer unendlichen Reihe, das Unmögliche sich aufheben müsse, (in einem Briefe an Wallis, 1698, Opp. III, p. 126.); aber Nicole wird der erste seyn, der die Rechnung ausgeführt hat, in den Mem. de l' Acad. des Sc. 1738, 1741 und 1743. Sein Vortrag ist nicht faßlich. Er bemerkt nicht, daß die Wurzelreihen auf zweyerley Art dargestellt werden müssen, um in dem einen oder dem andern Falle eine annähernde Reihe zu erhalten. Die praktischen Hülfsmittel, welche in diesem Artikel gegeben sind, fehlen bey ihm. In den Mémoires 1744 ist noch eine Abhandlung von Nicole enthalten, worin er den cubischen Gleichungen zwey Formen giebt, die zu einer schnellen Näherung dienen. Sie erfordern aber auch mehrere Versuche.

13. Diese Formen sind

$$x^3 - px + n\sqrt{(p+n)} = 0$$

$$x^3 - \frac{rx}{\sqrt[3]{(q+r)}} + q = 0.$$

Die Wurzeln der ersten Gleichung sind: I. $-\sqrt{(p+n)}$;

II. $+\frac{1}{2}\sqrt{(p+n)} + \frac{1}{2}\sqrt{(-3n)}$;

III. $+\frac{1}{2}\sqrt{(p+n)} - \frac{1}{2}\sqrt{(p-3n)}$. Die Wurzeln der zweyten Gleichung sind, I. $-\sqrt[3]{(q+r)}$;

II. $+\frac{1}{2}\sqrt[3]{(q+r)} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{r-3q}{\sqrt[3]{(q+r)}}}$;

III. $+\frac{1}{2}\sqrt[3]{(q+r)} - \frac{1}{2}\sqrt{\frac{r-3q}{\sqrt[3]{(q+r)}}}$.

Diese Formen sind hier angeführt, um eine Übung in der Formation der Coefficienten aus den Wurzeln zu veranlassen. Das erste Verfahren von Nicole durch Auflösung der Formel in zwey Reihen findet man in Clairauts Algebra, V. Th. Bey dem zweyten Verfahren wird nach der ersten Form eine Zahl n durch eine positio falsi gesucht, daß das gegebene Glied der Gleichung die Form $n\sqrt{(p+n)}$ völlig genau oder nahe genug bekomme. Nach der andern Form ist eine Zahl r zu finden, so daß der Coefficient von x die Form $\frac{r}{\sqrt[3]{(q+r)}}$ erhalte.

14. In Kästners Analysis endl. Größen §. 699. ff. ist umständlich gezeigt, wie die Cardanische Formel drey mögliche Wurzeln liefern könne. Die daselbst §. 718

getadelte Bemerkung Newtons möchte doch gerechtfertigt werden können. Ein möglicher algebraischer Ausdruck der Wurzel einer Gleichung durch die Coefficienten derselben kann nicht mehrere mögliche Werthe haben, wenn nicht etwa Wurzeln mit einem geraden Exponenten darin vorkommen; und doch sollte er, wenn mehrere mögliche Wurzeln vorhanden sind, eine so gut als die andere angeben. Darum erhält der Ausdruck eine unmögliche Form, als bey welcher eine Vieldeutigkeit Statt hat. Die Gleichung selbst ist auch ein Ausdruck für die Wurzeln, aber eine functio implicita.

15. In den neuern Zeiten noch hat man sich, in der That unnöthiger Weise, viel mit der Cardanischen Regel in dem Falle dreyer möglichen Wurzeln beschäftigt.

A method of extending Cardan's Rule for resolving one case of a cubick equation ... to the other case, called the irreducible. By Fr. Maseres. Phil. Transf. 1778.

Sul quesito analitico proposito dall' Academia di Padova ..., dissert. di Pietro Cossali. Verona. 1782.

Della possibilità della reale Solutione analytica del case irreducibile, riflessioni dell' Arciprete Nicolai. Padova. 1783.

Mem. sur la regle de Cardan, par de Castillon. Mem. de Berlin. 1783.

Osservazione del Signor Sebast. Canterzani sul Valor Cardanico -- in occasione d'essere uscito un foglio anonimo, che propone una maniera di redurre il caso irreducibile. In Bologna 1787.

mente oder Bestandtheile von Flächen, und Flächen al solche Bestandtheile von Körpern angesehen werden Bonaventura Cavaleri, ein Geometer in der erste Hälfte des 17ten Jahrhunderts, aus dem Orden der Je suiten, war Professor der Mathematik zu Bologna. E hat seine Methode in einem Werke vorgetragen, welche den Titel führt: Geometria indivisibilibus continuo rum nova quadam ratione promota. Autore F. Bo naventura Cavalerio. Bononiae 1635. 69'. pag. 4 Zweyte Ausgabe 1653. Er erläuterte sie nachher noch in den Exercitationibus geometricis, Bonon. 1647. 4, und vertheidigte sie gegen die Einwürfe des Guldin. Vor Cavaleri hat Kepler die Ausmessung mancherley Körper durch Zerlegung in Elemente, aber körperliche, gezeigt, in dem Supplemento Stereometriae Archime deae, die der Stereometria doliorum vinariorum, Lincii 1615 Fol. beygefügt ist. Cavaleri führt auch Keplers Untersuchungen in der Vorrede zu seinem ersten Werke an, mit der Bemerkung, daß es ihm angenehm ge wesen, seine neue und bequeme Methode auf die von Kep ler aufgestellten neuen Gattungen von Körpern anzuwen den. Guldin nahm von dieser Anzeige einen Grund her daß Cavaleri durch Kepler auf seine Methode geleite wäre. Diesem widerspricht C. in seinem zweyten Werke und fügt hinzu, Kepler setze aus höchst kleinen (minutiss mis) Körperchen ohne Zwischenräumchen größere zusam men, er aber sage, daß ebene Figuren sich wie die Aggre gate gleich weiter Parallelen, Körper, sich wie die Aggre gate gleich weiter parallelen Ebenen, verhalten. Sei ne Methode sey die von den Alten schon gebrauchte, nu einfacher gemacht. In der That ist die Erhaustions Methode der Alten im Wesentlichen dieselbe mit der Ca valerischen, nur daß jene ihrer Beweisart die befriedigend Evidenz gaben, dagegen Cavaleri's Methode durch die Unbestimmtheit des Begriffs, untheilbare Größe, un durch das Unendliche eine Dunkelheit läßt, die der Urhe ber selbst in der Vorrede zu dem siebenten Buche seines Werks bes[illegible]tet, daher er eben dieses Buch dazu ma

Man ziehe durch den Mittelpunct C des Kreises NBA die Parallele CE mit AM, nehmen CF = AB = NM, und ziehe CN, FM, so ist FM parallel mit CN, und ihr gleich, und der Punct M der Cardioide liegt auf dem Umfange des aus F als Mittelpunct beschriebenen, dem Kreise ANBA gleichen Kreises FnMG. Dieser berührt jenen in dem Puncte G, welcher CF halbirt. Der W. EFM ist gleich dem W. GCN = CNA. Da der W. BCN = 2CNA, so ist W. BCG = GCN, also W. BCG = EFM, und W. ACG = GFM, daher der Bogen ANG = MnG. Die Cardioide ist also eine Epicykloide, welche durch die Wälzung eines Kreises auf einem ihm gleichen von einem Puncte auf dem Umfange jenes beschrieben wird. — Man kann sie auch als eine Verwandte der Conchoide ansehen, da eine gegebene gerade Linie auf einem Kreise, so wie bey der Conchoide auf einer geraden Linie fortgeführt wird, indem zugleich ihre Verlängerung durch einen gegebenen Punct geht.

Es sey L der Punct auf dem Bogen AH, dessen Abstand von der auf AB senkrechten Chorde AH am größten ist, und l ein solcher Punct auf dem Bogen Ah. Die zugehörige Abscisse sey AK. In den Puncten L, l werden zwey Ordinaten einander gleich, die für kleinere AK ungleich sind. Daher hat die Ordinate y hier zwey gleiche positive Werthe, und eben so zwey gleiche, eben so große, negative Werthe, also hat y^2 einen einfachen Werth. Dieser sey = A, so daß $q^2 - A = 0$, also $q^4 - 2Aq^2 + A^2 = 0$ ist. Die Vergleichung mit der Gleichung für y giebt $A = \frac{1}{2}(a^2 + 2ax - 2xx$, und $A^2 = x^4 - 2ax^3$; also $\frac{1}{4}(a^2 + 2ax - 2xx)^2 = x^4 - 2ax^3$. Daraus wird $x = -\frac{1}{4}a$. Dieser Werth in die Gleichung zwischen x und y gesetzt, verwandelt sie in diese, $y^4 - \frac{3}{8}a^2y^2 + \frac{9}{256}a^4 = 0$, woraus folgt $y^2 = \frac{3}{16}a^2$, und $y = \pm\frac{3}{4}a\sqrt{3}$.

metrie sey. Er sagt, um das Verhältniß zweyer ebenen, oder körperlichen Figuren zu finden, brauche man nur das Verhältniß zu suchen, welches in den ebenen Figuren alle ihre nach irgend einer Regel genommenen Linien, und in den körperlichen Figuren alle ihre gleichergestalt genommenen Ebenen (d. i. Durchschnitte) haben. Die Regel ist bey ebenen Figuren irgend eine in ihrer Ebene gezogene gerade Linie, mit welcher innerhalb der Figur unendlich viele parallele gedacht werden; bey Körpern ist sie eine Ebene, mit welcher innerhalb des Körpers unendlich viele parallele Durchschnitte gelegt werden.

Es sey die gerade Linie RR (Fig. 67. Tab. IV.) eine solche Regel. Mit dieser werde SS parallel gezogen. Innerhalb dieser Parallelen sind die Linien AB und DC. gerade oder krumme, wie auch ab und dc, gezogen, mit dem Gesetze, daß die in einerley Abstande von der Regel innerhalb der Figuren ABCD, abcd, mit jenen parallelen MN, mn ein gegebenes Verhältniß haben. Sind AD, ad, die Durchschnitte der Figur mit RR; und BC, bc die Durchschnitte mit SS, so ist AD : ad = BC : bc = MN : mn. Dieses gesetzt, verhalten sich die Flächenräume der Figuren ABCD, abcd, wie AD : ad, oder wie zwey einander zugehörige, MN : mn. Cavaleri, L. II. prop. 4.

Durch die Linie RR lege man eine Ebene als Regel, mit welcher durch die parallele SS eine Ebene parallel gelegt werde. Zwischen beiden Ebenen seyn zwey Körper enthalten, deren Durchschnitte mit einer dritten Ebene die Figuren ABCD sind. Die Durchschnitte dieser Körper mit den der Regel parallelen Ebenen in einerley Abstande von derselben seyn in einem gegebenen Verhältnisse p : q, so sind die Körper selbst in eben demselben Verhältnisse p : q. Cavaleri l. c.

Zum Beyspiel nehme man einen Kreis und eine Ellipse, deren große Axe dem Durchmesser jenes gleich ist. Die Ordinaten, die auf einen Durchmesser und die große Axe

nkrecht ſind, verhalten ſich in beiden Figuren, für die=
lbe Abſciſſe, wie der Durchmeſſer und die kleine Axe,
ihen die Flächenräume eben ſo. — Läßt man den Kreis
h um einen Durchmeſſer, die Ellipſe ſich um die große Axe,
ehen, ſo verhalten ſich die Flächenſchnitte, die ſenkrecht auf
ne Linien ſind, wie die Quadrate der großen und der
einen Axe, und eben ſo die Kugel und das oblonge
Sphäroid. —

Sind in den beiden ebenen Figuren die Durchſchnitts=
nien, welche der Regel RR parallel ſind, in demſelben
bſtande von dieſer gleich, ſo ſind die Figuren dem Flä=
enraume nach gleich, ſie mögen dabey ſich ähnlich ſeyn,
der nicht.

Desgleichen, wenn in den Körpern, die zwiſchen zwey
arallelen Ebenen enthalten ſind, die Durchſchnitte mit
erſelben, jenen parallelen, Ebene gleich groß ſind, ſo ſind
ie Körper dem Raume nach gleich, wie auch übrigens ihre
eſtalt verſchieden ſeyn mag.

Segner gebraucht dieſe beiden Sätze, von der Gleichheit
er Figuren und Körper, als Grundlage für die Vergleichung
bener Figuren und der Körper, Elem. Geometriae §. 194.
98. Die Flächen, erinnert er, werden zwar nicht aus
inien, noch die Körper aus Flächen zuſammengeſetzt,
llein die geraden Linien dienen, ihm zufolge, bloß zur
ngabe der Ausdehnung nach einer gewiſſen Richtung,
nd eben ſo zeige die Gleichheit der Durchſchnitte in den
örpern eine gleiche Ausdehnung an.

Cavaleri erweiſet nun, nach ſeiner Methode, allge=
ein (L. II. Prop. 15.), daß alle ähnliche Figuren in
em zweyfachen Verhältniſſe der gleichnamigen Seiten,
der der auf ähnliche Art in ihnen gezogenen Linien, ſte=
en. Der Beweis iſt etwas lang, weil er, wenn die Fi=
uren von den parallelen Durchſchnittslinien, in mehr als
wey Puncten geſchnitten werden, ſie in andere gleich große,
urch die Addition der Theile auf den Durchſchnittslinien,
nd Übertragung längs einer geraden Linie, verwandelt,

kurz und leicht genug machen, und zwar nach der
rischen Methode. Cavaleri glaubt sehr viel gele
haben, daß er einen Satz allgemein erweiset, den die
nur von einzelnen Körpern erwiesen hatten. (
Prop. 16. L. II.).

Ein Hauptsatz für die Vergleichungen der
und Körper ist der 24ste im zweyten Buche. Ex
parallelogrammo quocunque, in eoque duct
metro; omnia quadrata parallelogrammi ad
quadrata cujusvis triangulorum per dictam d
trum constitutorum erunt in ratione tripla, u
terum parallelogrammi communi regula exil
Das heißt: wenn in dem Parallelogramm und dem
ecke Parallelen mit der einen Seite des erstern g
werden, so ist das Gränzverhältniß der Summ
Quadrate von diesen Linien das von 3 : 1. Der
druck, ratio tripla, kommt auch in 17ten Satze vo
Verhältnisse ähnlicher Körper vor, und bedeutet d
was man jetzt ratio triplicata nennt.

Mit Hülfe dieses Satzes und des von dem Ve
nisse aller Linien in dem Parallelogramm und dem
ecke, welches das von 2 : 1 ist. (Coroll. 2. prop.
erweiset Cavaleri sehr viele geometrische Sätze, zwar
sam aber doch sinnreich.

Cavaleri's Satz folgt aus der Formel in (14.
Artikels, arithm. Reihen höherer Ordnungen.
Summe der Quadrate der natürlichen Zahlen, $1 +$
$9 \ldots + r^2$ ist $= \frac{1}{6} r(r+1)(2r+1)$.

Summe von r Quadraten, deren jedes r^2 ist, ist $= r^3$. Diese verhält sich zu jener, wie $r^3 : \frac{1}{6}(r+1)(2r+1)$. Die Gränze dieses Verhältnisses für ein unendlich großes r ist $r^3 : \frac{2}{6} r^3$ oder 3 : 1.

Zum Beyspiel nehme man einen Cylinder und Kegel mit gleicher Grundfläche und gleicher Höhe. Man zeichne ein Rechteck, dessen Grundlinie der Durchmesser der Grundfläche beider Körper, und die Höhe ihre Höhe ist, und ziehe darin eine Diagonale. Schneidet man die Körper durch eine Ebene parallel mit der Grundfläche, und zieht in dem Rechtecke nebst dem Dreyecke in derselben Entfernung von der Grundlinie, wie dort von der Grundfläche, eine parallele mit der Grundlinie, so sind die Durchmesser der Durchschnitte in den Körpern die Parallelen in den beiden Figuren. Die beiden Durchschnittsflächen verhalten sich wie die Quadrate dieser Linien; und alle Durchschnittsflächen (nach Cavaleri's Art zu reden) wie alle Quadrate; daher Cylinder und Kegel wie 3 zu 1. (Prop. 34. Coroll. 4. sect. 9.)

Ein anderes Beyspiel giebt die Quadratur der Parabel. Es sey (Fig. 68.) BAC eine Parabel, deren Axe AD, auf welche die Chorde BC senkrecht ist. Die berührende im Scheitel A ist EF. Man ziehe durch den Punct C, und durch irgend einen andern Punct M der Parabel mit ihrer Axe die parallelen FC, PM, deren letztere die Chorde BC in N trifft. Vermöge der Eigenschaft der Parabel ist FC:PM = AFqu: APqu, oder PN: PM = AFqu:APqu. Also ist die Summe aller PN zu der Summe aller PM, wie die Summe aller AFqu. zu der Summe aller APqu. Die beiden ersten Summen verhalten sich wie das Rechteck ADCF und der dreylinige Raum AMCF; die beiden andern Summen verhalten sich wie 3 : 1. Also ist das Trilineum der dritte Theil des

Noch ein Beyspiel sey die Cubatur eines Kug
schnitts und der Kugel selbst, wozu es nöthig i
Summe aller Quadrate der Ordinaten in einem Abs
mit der Summe der Quadrate der größten unter ih
vergleichen.

Es ist AEB (Fig. 69.) ein Halbkreis über dem D
messer AB aus dem Mittelpuncte C beschrieben; E
bestimmte Ordinate senkrecht auf AB, und AFE
Rechteck von den Coordinaten AD, DE. Eine
stimmmte Ordinate ist PM zu der Abscisse AP.
lasse das Rechteck AE und den Kreisabschnitt AE
sich um AD als Axe drehen, so beschreibt nach einer
endeten Umlaufe jenes einen Cylinder, dieser ein
stück. Beide Körper verhalten sich wie die Summ
ler circulären Durchschnitte, die mit der von DE b
benen Kreisfläche parallel sind. Da diese Durchs
sich wie die Quadrate ihrer Durchmesser verhalten,
halten sich die beiden Körper wie die Summen aller
und aller PMqu.. Die Summe aller PNqu ist p
tional dem Producte AD × DEqu oder AD × A
DB. Die Summe aller PMqu ist die Summ
Producte AP × PB. Man verlängere FA n
nehme AG = AD, und vollende sowohl das Q
AGID als das Rechteck AGHB. In dem Qu
ziehe man die Diagonale AI, und errichte über dem D
AGI als Grundfläche ein dreyseitiges senkrechtes P
dessen Höhe AB ist. Auf AG nehme man AL =
und ziehe parallel mit AB die Linie LM, welche
Q schneide, so ist LQ = AL) = P. Durch
führe man einen Schnitt des Prisma senkrecht a
Grundfläche, so ist der Inhalt desselben = LM ×
= AB × AP. Das Prisma verhält sich also n
Summe aller Producte AB × AP, oder wie das
gat der Summen aller Producte AP × AP + AP

Auf der Seitenfläche des Prisma, das GI zur Grundlinie hat, zeichne man über GI ein Quadrat, und nehme es zur Grundfläche einer Pyramide, deren Spitze A, und Höhe AG ist. Eine Seitenfläche dieser Pyramide ist das Dreyeck AGI. Ein Schnitt durch LQ senkrecht auf AGI, also parallel mit der Grundfläche, ist ein Quadrat, und die Pyramide ist proportional der Summe aller Quadrate, wie LQqu, oder der Summe aller APqu. Der übrige Theil des Prisma ist der Summe aller AP × PB proportional. Dieser übrige Theil besteht aus einem Prisma von der Höhe DB über der Grundfläche AGI, und dem Theile des Prisma von der Höhe AD über derselben Grundfläche, der nach abgeschnittener Pyramide übrig bleibt. Das Prisma von der Höhe AD wird ausgedruckt durch das Product $\frac{1}{2}$ AG × GI × AD oder $\frac{1}{2}$ AD cub. Die Pyramide aber durch $\frac{1}{3}$ GI × GI × AG oder $\frac{1}{6}$ AD cub. Also ist der übrige Theil jenes Prisma = $\frac{1}{6}$ AD cub. Dieser werde zu dem Prisma von der Höhe DB, das ist zu $\frac{1}{2}$ AG × GI × DB oder $\frac{1}{2}$ AD × AD × DB addirt, so ist die Summe $\frac{1}{2}$ AD × AD × DB + $\frac{1}{6}$ AD cub. proportional der Summe aller AP × PB. Folglich verhält sich der Cylinder mit dem Halbmesser DE zu dem Kugelabschnitte über derselben Grundfläche wie AD × AD × DA zu $\frac{1}{2}$ AD × AD × DB + $\frac{1}{6}$ AD cub, oder wie DB : $\frac{1}{2}$ DB + $\frac{1}{6}$ AD.

Für die Halbkugel ist DB = AD = AC, also verhält sich der Cylinder, dessen Halbmesser und Höhe dem Halbmesser der Kugel gleich sind, zu der Halbkugel, wie 1 : $\frac{2}{3}$, oder wie 3 : 2. Eben so verhält sich der Cylinder, dessen Durchmesser und Höhe dem Durchmesser der Kugel gleich sind, zu der ganzen Kugel.

Die hieher gehörigen Sätze bey Cavaleri sind Coroll. Propos. 30. L. 2.; Prop. 1. L. 3.; und Cor. 1. Prop. 34. L. 3. Die Deduction ist hier sehr abgekürzt, doch mit Beybehaltung seiner Vorstellungsart.

Wenn die Linien, durch deren Bewegung ober fließen (Cavaleri braucht einigemal das Wort re) eine Figur beſchrieben wird, ſich um einen feſten bewegen, ſo verhalten ſich die beſchriebenen Flächei nicht wie die Summen der Linien, ſondern wie die men ihrer Quadrate. Denn man muß hier die Lir Repräſentanten von verſchwindenden Kreisſectoren a Bey der Quadratur der Archimedeiſchen Spirallir fährt Cavaleri nach dieſem Grundſatze, wiewohl nicht deutlich darüber erklärt. L, 6, Prop. 9.) quadrirt ſie durch Hülfe der Quadratur der Parab

In dem zweyten anfangs angeführten Werk exercitt. mathem. geht Cavaleri weiter als in den worin er nur ſolche Summirungen vortrug, die d Werthe einer unendlichen Reihe Quadrate, deren zeln in arithmetiſcher Fortſchreitung ſind, abhang erhebt ſich daſelbſt zu Unterſuchungen, welche die mirung einer unendlichen Anzahl von Cubis und draten erfordern. Er fand, daß die Summe de rum aller Linien, die in paralleler Lage ein Recht füllen, ſich zu der Summe der Cuborum aller p in dem halbirenden Dreyecke wie 4 : 1 verhalten; die Summen ihrer Biquadrate wie 5 : 1 ſind. die Artikel: arithm. Reihen höherer Ordn, 15. 1 tenz. III.

Man wird ſich gegenwärtig nicht die Mühe Cavaler'is Werke zu leſen, da man ſeine Sätze w ter durch die Integralrechnung finden kann. C nicht den philoſophiſchen Geiſt, der auch in der matik zur lichtvollen Darſtellung nöthig iſt. Vortrage fehlt es an Nettigkeit, und die Schreib iſt äußerſt vernachläßigt.

Seine Methode erhielt unter ſeinen Zeitgeno len Beyfall. Torricelli ſagt in der Vorrede zu ſe handlung de ſolido acuto hyberboli o ſogar: ret me veteris Geometriae, quae cum Indi

lium doctrinam sive non noverit, sive non admiserit, circa dimensionem solidorum adeo paucas veritates invenit, ut ipsa penuria infelix ad aetatem nostram pervenerit. In der Vorrede zu der Abhandlung, Quadratura parabolae per novam indivisibilium Geometriam pluribus modis absoluta, sagt er, er wolle nicht behaupten, daß die Geometria indivisibilium eine ganz neue Erfindung sey. Er glaube vielmehr, daß die alten Geometer sich dieser Methode zur Erfindung sehr schwerer Sätze bedient hätten, ob sie gleich in ihren Beweisen einen andern Weg genommen haben, es sey, um die Kunst der Erfindung zu verstecken, oder um allen Anlaß zu Widersprüchen zu verhüten. Genug, diese Geometrie sey ein herrliches Erfindungsmittel, wodurch man unzählige, sehr verborgene Lehrsätze kurz und directe erweisen könne, welches nach der Methode der Alten nicht thunlich sey.

Torricelli wendet die Methode des Cavaleri auf die Quadratur der Cykloide an, indem er zeigt, daß in dem Raume zwischen der halben Cykloide (vom Anfange bis zum Scheitel) und der Chorde je zwey Parallelen, in gleicher Entfernung von der Grundlinie und dem Scheitel, zusammengenommen den beyden gleichen correspondirenden Parallelen in dem Halbkreise am Scheitel gleich sind, daher jener Raum dem Halbkreise gleich ist.

Er führt auch noch neue Indivisibilia ein, Kreisumfänge, und Flächen von Kugel, Cylinder und Kegel. Dadurch findet er den Inhalt eines hyperbolischen Körpers, den er solidum hyperbolicum acutum nennt. Dieser entsteht durch die Umdrehung eines hyperbolischen, ins Unendliche nach einer Seite hin sich erstreckenden, Bogens um seine Asymptote. Es hat einen endlichen Inhalt, obgleich es unendlich lang ist, weswegen T. es ein wundersames nennt.

Descartes würdigte des Cavaleri Geometrie keiner Aufmerksamkeit. In einem Briefe an Mersenne (Epist.

T. III. 86.) ſagt er, daß er die Sätze in einer Viertelſtunde überlaufen habe, weil nach einer ihm von dem jüngern Schooten mitgetheilten Nachricht Cavaleri nur ſchon bekannte Sätze auf eine neue Art bewieſen hätte, welche mit dem Verfahren übereinkäme, das er zur Vergleichung des Flächenraums an einer Cykloide ſchon ehemahls gebraucht hätte. Dieſes iſt der Schluß, daß zwey gemiſchtlinichte Dreyecke, in welchen je zwey zuſammen gehörige parallele Linien gleiche Länge haben, gleich groß ſind. (Epiſt. 58,).

Roberval in Frankreich behauptete in einem Briefe an Torricelli vom J. 1644, daß er ſchon fünf Jahre vor der Ausgabe der Geometrie des Cavaleri eine ähnliche Methode gefunden hätte, die er aus den Alten geſchöpft habe, daß er aber, welches beſſer ſey, Flächen und Körper, jene aus unendlich vielen kleinen Rechtecken, dieſe aus dergleichen Prismen zuſammen ſetze. (Divers ouvrages de Mſſ. de l'Acad. roy. Paris 1693.).

Fermat gebrauchte die Methode des Untheilbaren, die er mit Rechnung verband, als eine Abkürzung der Archimedeiſchen durch umſchriebene und eingeſchriebene Rechtecke und Prismen. Er wandte ſie auch auf andere geometriſche Unterſuchungen höherer Art, außer der Cubirung der Körper, an. In einem Briefe an Roberval vom J. 1636 ſagt er, daß er ſeine Methode ſchon vor etwa ſieben Jahren einem Freunde mitgetheilt hätte.

Lucas Valerius, Profeſſor der Mathematik in Rom, der 1603 ein Werk über den Schwerpunct lieferte, brachte darin den wichtigſten und fruchtbarſten Theil der alten Exhauſtions Methode auf einige allgemeine Lehrſätze. Dadurch ſcheint er die Geometer ſeines Zeitalters auf die Vorſtellung von der Zuſammenſetzung geometriſcher Gröſſen aus unendlich vielen, unendlich kleinen Theilen, und die Bemühung jenes umſtändlichere Verfahren abzukürzen, geleitet zu haben.

Keplers im Anfange dieſes Artikels angezeigte Methode, den Inhalt körperlicher Räume zu vergleichen iſt, wie Cavaleri richtig behauptete, von der ſeinigen ganz verſchieden. Auch iſt ſie auf gewiſſe Arten von Körpern eingeſchränkt, ſolche nämlich, die durch die Umdrehung eines Kreiſes oder einer Ellipſe um eine Axe in ihrer Ebene, parallel mit einer der Axen der Ellipſe entſtehen, die Drehungsaxe mag innerhalb oder außerhalb der Figur liegen, oder ſie berühren. Den ringförmigen, oder vollen, oder vertieften, oder zugeſpitzten Körper verwandelt er in einen Cylinder, deſſen Grundfläche die ſich drehende Figur, die Höhe oder Länge der Umfang des von einem gewiſſen Puncte der Figur beſchriebenen Kreiſes iſt, auf eine ähnliche Art, als man die Kreisfläche in ein Dreyeck verwandelt, deſſen Grundlinie der Umfang, die Höhe der Halbmeſſer iſt. Auch zerlegt er den Körper, der durch Umdrehung eines Kreiſes oder einer Ellipſe um eine Chorde, (die in letzterer ſenkrecht auf eine der Axen iſt) in zwey Stücke, ein cylinderförmiges, und ein ringförmiges, welches er eine Zone nennt. Dieſe Zone verwandelt er in einen hufförmigen Abſchnitt eines Cylinders mit einer circulären oder elliptiſchen Grundfläche, und zerlegt dieſen in zwey Stücke, wovon das eine eine Zone einer Kugel iſt.

Cavaleri mag durch ſich ſelbſt auf ſeine Methode gekommen ſeyn. In der Vorrede zu der Geometrie erzählt er, daß er anfangs cylindriſche und koniſche Körper aus Ebenen, die ſich in der Axe ſchneiden, habe zuſammenſetzen, und aus den Verhältniſſen dieſer Ebenen das Verhältniß der Körper ſelbſt herleiten wollen. Allein da er eingeſehen, daß dieſes unthunlich ſey, ſo habe er die Linien und Ebenen parallel mit einander gelegt, und aus deren Verhältniſſen die Vergleichung der Figuren und Körper gefunden.

Zu vergleichen iſt

Montucla hiſtoire des Mathém. nouvelle édit. T. II. p. 37—42.

gel ist $= \frac{4}{3}\pi r^3$, wenn r der Halbmesser ist. Der Inhalt des Halbkreises ist $\frac{1}{2}\pi r^2$. Also ist der Weg des Schwerpunctes bey einer ganzen Drehung $\frac{4}{3}\pi r^2 : \frac{1}{2}\pi r^2 = \frac{8}{3} r$. Dieses ist der Umfang des beschriebenen Kreises, dessen Halbmesser folglich $\frac{4r}{3\pi}$ ist, der Abstand des Schwerpunctes vom Mittelpuncte.

Man suche den Schwerpunct des halben Kreisumfanges. Da die von demselben beschriebene Oberfläche der Kugel $= 4\pi r^2$, und der halbe Umfang $= \pi r$ ist, so ist der ganze Weg des Schwerpunctes $= 4r$, und der Abstand desselben von dem Mittelpuncte $= \frac{2r}{\pi}$.

Guldin erwies seinen Satz theils durch Induction in solchen Fällen, wo die erzeugte Größe ein schon bekanntes und erwiesenes Verhältniß zu der erzeugenden hat, und die Lage des Schwerpunctes der letztern auch bekannt ist. Dann wollte er auch einen directen Beweis führen, der aber sehr mißlungen ist. Er glaubte, weil der Abstand des Schwerpuncts von der Axe der Drehung ein gewisses Mittel zwischen den Abständen der Theile der erzeugenden Größe hält, und weil dieser Punct ein einziger ausgezeichneter ist, so müsse ihm vor allen andern Puncten die in dem Satze angegebene Eigenschaft zukommen. Es ist besser, sich an die Induction allein zu halten, als solche Vermuthungsgründe zu gebrauchen.

Aus der Eigenschaft des Schwerpunctes läßt sich der Satz leicht herleiten. Wenn in einer Ebene mehrere schwere Puncte auf derselben Seite einer geraden Linie liegen, und von ihnen Perpendikel auf diese Linie gezogen werden, so ist die Summe der Producte aus dem Gewichte jedes Punctes in seine Entfernung von der gegebenen Linie gleich dem Producte aus der Summe aller Gewichte in den Abstand des Schwerpunctes. Man lasse die Ebene mit den Puncten um die gegebene Linie sich drehen, und

einen Umlauf vollenden, so ist die Summe der Producte aus dem Gewichte jedes einzelnen Punctes in den beschriebenen Weg gleich dem Producte aus der Summe aller in den Weg des Schwerpunctes, weil die Kreisumfänge sich wie die Halbmesser oder Entfernungen von der Drehungs-Axe verhalten.

Zuerst lasse man die Puncte alle gleich schwer seyn, und auf einer gegebenen Linie liegen. Es ist alsdann die Summe der Producte aus dem Gewichte jedes Punctes in seinen Weg gleich dem Producte aus dem Gewichte eines einzelnen Punctes in die Summe aller Wege. Da der Satz für jede beliebige Anzahl Puncte richtig ist, so ist er auch für die ganze Linie richtig, oder es ist das Product aus dem Gewicht eines einzelnen Puncts in die Oberfläche gleich dem Producte aus der Summe aller Gewichte in den Weg des Schwerpunctes. Die Summe aller Gewichte ist das Gewicht eines einzelnen Punctes mit der Länge des Bogens multiplicirt. Dadurch geht das Gewicht des einzelnen Punctes aus der Vergleichung heraus.

Ist die erzeugende Größe eine ebene Figur, die sich um eine geradlinichte Seite dreht, so ziehe man auf diese irgend eine Anzahl senkrechter Linien, die alle als schwer, und in gleichen Theilen gleich schwer betrachtet werden. Ihre Schwerpuncte halbiren jede derselben. Wird in jedem das Gewicht der ganzen Linie vereinigt, so entsteht eine Reihe schwerer Puncte, und es ist das Gewicht aller multiplicirt in den Weg des gemeinschaftlichen Schwerpunctes gleich der Summe der Producte jedes einzelnen Gewichts in den Weg desselben; das ist, (wenn für die Gewichte die denselben proportionalen Längen gesetzt werden), die Summe aller senkrechten Linien auf die Drehungsaxe multiplicirt in den Weg ihres gemeinschaftlichen Schwerpunctes ist gleich der Summe der Producte jeder Linie in den Weg ihres Mittels, oder in den Umfang des von ihrer Hälfte beschriebenen Kreises; oder jenes Product ist gleich der Summe aller Kreisflächen, die von den senkrechten Linien um die Drehungs-Axe beschrieben werden. Da

dieſes für jede Anzahl von Linien gilt, ſo gilt es auch f die Fläche, welche ſie ausfüllen, und den Körper, d die Kreisflächen ausfüllen. Alſo u. ſ. w.

Tacquet beſchäftigt ſich viel mit der geometriſch Anwendung des Schwerpunctes, in dem fünften Buc der cylindricorum et annularium, welches in der Sam lung ſeiner Werke denſelben beygefügt iſt.

Characteres ſ. Bezeichnung und Zeichen.

Characteriſtica der Logarithmen, ſ. Logarithm und Kennziffer.

Characteriſtiſches Dreyeck in einer krumm Linie iſt dasjenige, welchem ſich das gemiſchtlinichte zw ſchen dem Unterſchiede zweyer Ordinaten, dem Unterſch de der zugehörigen Abſciſſen und dem Bogen der krum men Linie, zu deſſen Endpuncten die Ordinaten gehöre immer mehr nähert, je kleiner der Bogen genommen wir Es kann nur gedacht, nicht ſinnlich dargeſtellt werde Die Benennung iſt ſehr ſchicklich, weil die Verhältniſſ der Seiten dieſes Dreyecks die krumme Linie charakteriſ ren. Leibnitz hat ſie zuerſt gebraucht. S. Opp. T. III p. 85. 128. 193. 291. Barrow leitete aus dieſem Dreyeck ſeine Methode her, berührende an eine krumm Linie durch einen gegebenen Punct zu ziehen.

Chilias iſt das griechiſche Wort für Tauſend Im Zählen machen wir im Deutſchen mit jeder Chiliad einen Abſchnitt.

Chiliagonum, ein Vieleck von tauſend Seiten Der Centriwinkel eines regulären iſt 21′ 36″, die Seit iſt 62831439 für den Halbmeſſer 10000 Millionen.

Chorde, oder Sehne, iſt die gerade Linie, welch zwiſchen zwey Puncten einer krummen Linie liegt, ohne ſi in einem Puncte zwiſchen denſelben zu ſchneiden. J krummen Linien, die in ſich ſelbſt wiederkehren, wie Krei

und Ellipſe gehört eine Chorde ſowohl zu dem einen, als zu dem andern Theile, zu dem größern wie zu dem kleinern. Von der Berechnung der Chorden in einem Kreiſe aus den zugehörigen Winkeln ſ. Cyklometrie und reguläre Figur.

Circul, ſ. Kreis.

Circularſtücke in einem rechtwinklichten ſphäriſchen Dreyecke ſind die beiden Katheten, das Complement der Hypotenuſe zum Quadranten, und die Complemente der beiden ſpitzen Winkel (der innern oder äußern) zu einem Rechten. In einem ſphäriſchen Dreyecke, deſſen eine Seite ein Quadrant iſt, ſind es die beiden daran liegenden Winkel, die Complemente der beiden andern Seiten zum Quadranten, und das Complement des gegen über liegenden Winkels (des innern oder äußern ſpitzen) zum Rechten. Neper hat ſie zum Behuf ſeiner Regel für dieſe beiden Gattungen von Dreyecken circulares genannt. (Logarithm. canonis deſcriptio. L. II. c. 4.) Das geſuchte wird als das mittlere angeſehen, die gegebenen Dinge ſind entweder die zunächſt anliegenden (circumpoſita) oder die entgegengeſetzten (oppoſita), d. i., welche auf die anliegenden folgen, immer mit Übergehung des rechten Winkels oder der Quadrantalſeite. Die Regel iſt in dem Artikel, Nepers Regel, zu finden.

Circulirender, oder periodiſcher, **Decimalbruch** iſt ein ſolcher, worin dieſelbe Ziffer oder mehrere immerfort in ihrer Ordnung wiederkehren, wie 4,7390 7390 7390 ... Alle Decimalbrüche, die nicht irgendwo abbrechen, ſind periodiſche. S. Decimalbruch.

Circulzahl oder **Kugelzahl** iſt eine ſolche, von welcher eine Potenz ſich mit ihr ſelbſt endigt. Z. B. von 5 iſt das Quadrat 25, der Würfel 125: von 6 iſt das Quadrat 36, die Würfel 216. Von 76 iſt das Qua-

CA als Halbmeſſer beſchreibe man einen Kreis, und zeichne die zugehörige Ciſſoide. Die andere CR trage man auf den ſenkrechten Halbmeſſer CD von C nach R, ziehe BR, welche die Ciſſoide in M treffe; dann AM, welche CD in Q ſchneide; und ſuche zwiſchen CQ nnd CR die mittlere proportionale CS, ſo ſind CR, CS, CQ, CA die vier ſtetigen Proportionalen, von welchen CR, CA die gegebenen ſind.

Iſt CR größer als CA oder CD, ſo trifft BR die Ciſſoide in einem Puncte außerhalb des Kreiſes, und Q fällt auch jenſeits D, zwiſchen D und R.

Die Linie BT, welche in B auf AB ſenkrecht iſt, iſt Aſymptote der Ciſſoide. Dieſes iſt aus der Conſtruction klar.

Für den andern Halbkreis AdB iſt ein ganz gleicher Zweig der Ciſſoide Adμ mit der Aſymptote Bt vorhanden.

Diokles zeichnet bloß den Bogen AMD des einen Zweiges. Die Alten haben in der Folge noch den Bogen Ad zugefügt, ohne doch die Linie ins Unendliche fortgehen zu laſſen. Geminus nannte, wie Proklus in ſeinem Commentar über Euklides anführt, die Ciſſoide eine zuſammen geſetzte Linie, die ſich breche und einen Winkel mache. Es kann auch ſeyn, daß ſie in dem Quadranten BCD einen Bogen, wie den AMD hinzugefügt haben, der mit dieſem in D zuſammenkam. Geminus bemerkt, daß die Ciſſoide von dem Epheublatte (κισσος, Epheu) ihren Namen, Epheuähnliche, erhalten habe.

Der Punct A, wo die beiden Zweige AD nnd Ad zuſammen kommen, iſt eine Spitze (cuſpis), wo AB die gemeinſchaftliche berührende iſt. Die Tangente des Winkels, welchen eine krumme Linie mit einer normalen Ordinate macht, iſt $\frac{dx}{dy}$, welcher Quotient für die Ciſſoide

von welchem an der Bogen derſelben genommen wird.

Denn es iſt $d.MS = -pdx + \frac{(1+pp)\,dx\,d^2p}{2\,dp^2} =$

$-dy + ds$, oder $ds = d.Ms + dy$, und daher $s = Ms + PM - Conſt.$, wo die Conſt. ſo beſtimmt werden muß, daß in dem Anfangspuncte der Brennlinie der Werth von $s = o$ ſey.

7. Iſt die Gleichung zwiſchen x und y eine algebraiſche, ſo iſt der Bogen der Brennlinie rectificabel.

8. Der Halbmeſſer der Krümmung in M ſey $= r$.

Es iſt $r = -(1+pp)^{\frac{3}{2}}\frac{dx}{dp}$ (Krümmungskreis 2.).

Demnach iſt $MS = \frac{r}{2\sqrt{(1+pp)}}$, und

$$s = \frac{r}{2\sqrt{(1+pp)}} + y - Conſt.$$

9. Es ſey R der Mittelpunct der Krümmung für den Punct M, und RG ſenkrecht auf MSV, ſo iſt $MS = \frac{1}{2}MG$, oder $MS = \frac{1}{2}r\,cof\,RMG$. Denn es iſt

$tang\,PMH = \frac{dy}{dx} = p$, alſo auch $tang\,RMG = p$.

Daher $cof\,RMG = \frac{1}{\sqrt{(1+pp)}}$ (Goniometrie, 14.);

folglich $MG = MR\,cof\,RMG = \frac{r}{\sqrt{(1+pp)}} = 2MS$.

10. Exempel I. Die zurückwerfende Linie ſey ein Kreisquadrant BMD, deſſen Halbmeſſer AB iſt. Fig. 62. Die Strahlen fallen parallel mit AD auf. Die Linien in der Figur behalten ihre Bedeutungen und Benennungen,

C dem Durchmeſſer AB gleich iſt. Die krumme Linie welche der Punct M, der FG halbirt, bey dieſer Bewegung des Winkelmaßes beſchreibt, iſt die Ciſſoide.

Man ziehe MP und FQ ſenkrecht auf CH, und FI ſchneide ſie in R. Es iſt

$$CE + FQ : CQ = FQ : RQ = PG : PM,$$

oder $CE + 2MP : CP - PG = PG : PM.$

Man ſetze $AC = a$, $CP = x$; $PM = y$, $PG = z$ ſo iſt aus dieſer Proportion

$$2(a+y)y = (x-z)z.$$

Da $z^2 = a^2 - y^2$, ſo iſt

$$a^2 + 2ay + y^2 = xz, \text{ daher}$$

$$(a+y)^4 = x^2z^2 = x^2(a+y)(a-y)$$

alſo $$(a+y)^3 = x^2(a-y).$$

Man nehme die Abſciſſenlinie auf AB von A an, ziehe MS darauf ſenkrecht, und ſetze $AS = u$, ſo iſt

$$u = a + y, \text{ und } u^3 = x^2(2a - u).$$

Dieſes iſt die Gleichung, die vorher für die Ciſſoide gefunden iſt.

Wallis fand durch ſeine Arithmetica Infinitorum die Quadratur und Cubatur der Ciſſoide, nebſt der Lage ihres Schwerpuncts. Operum T. I. p. 545.

Reimer in der hiſtoria duplicationis cubi, Göttingae 1798. liefert ſehr gute Nachforſchungen über Diokles und über die Ciſſoide, wie die Alten ſie kannten nebſt der Überſetzung ſeiner Auflöſung des gedachten Problems aus Eutocius. Er zeigt aus einer Anführung des Proklus, daß die Ciſſoide ſchon dem Geminus, der im 1ſten Jahrhundert vor Chr. G. gelebt hat, bekannt geweſen, dagegen Montücla u. a. den Diokles erſt ins 5ten Jahrh. nach Chr. G. ſetzen.

Coefficient iſt die gegebene oder die unveränderliche Größe, welche in einer Gleichung oder in einer Reihe mit der unbekannten oder den veränderlichen als Factor verbunden iſt. So die Größen a, b, c in der Gleichung $x^3 + ax^2 + bx + c = o$, oder A, B, C, D, etc. in der nach x geordneten Reihe, $y = A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + \text{etc.}$ Wo die unbekannte oder veränderliche Größe keinen Factor hat, vertritt die Einheit die Stelle deſſelben. In unſern dekadiſchen Zahl-Ausdrücken iſt jede einzelne Ziffer der Coefficient einer zugehörigen Potenz der Zehn. Wie die unbekannten Coefficienten in einer Reihe aus den Coefficienten in andern zugeordneten Reihen beſtimmt werden, zeigt der Artikel, Methode der unbeſtimmten Coefficienten.

Coelometria iſt die Wiſſenſchaft der Regeln, Gefäße auszumeſſen, ein nicht üblicher Ausdruck für die Viſirkunſt, von κοιλος, hohl.

Coevoluten ſind zwey einander zugeordnete krumme Linien, welche eine die andere durch Abwickelung erzeugen. Es ſeyn AB, ab, (Fig. 73. Tab. V.) Bogen der beiden krummen Linien; an beide ſey ein völlig biegſamer Faden AMPma ohne Dicke gelegt, und in den Puncten M, m, nach den daſelbſt berührenden MP, mP geſpannt. Ferner ſeyn MN, mn gleich große Bogen, und in den Puncten N und n ſeyn NQ und nQ die berührenden, die ſich in Q ſchneiden. Iſt nun die Summe NQ + nQ hier, ſo wie für jede andere gleiche Bogen MN, mn, gleich der Summe MP + Pm, ſo ſind AB, ab Coevoluten. Der Durchſchnittspunct der beiden berührenden beſchreibt nach Art eines den Faden MPm ſpannenden Stiftes eine krumme Linie CD, welche für die berührenden, wie MP, mP, eine zurückſtrahlende Linie iſt, wenn dieſe berührenden als auffallende an CQ betrachtet werden.

Tſchirnhauſen hat die Coevoluten erſonnen, und Leibnitz bemerkt, daß ſie dienen, gewiſſe Aufgaben aufzulöſen.

Man ſehe ſeine Opera, Tom. III. p. 277 und 398 auch das Commercium philoſ. et mathem. Leibnit et Jo. Bernoulli an mehrern Stellen.

In dem Artikel, Catacauſtica (16.) iſt gezeigt, da die Summe des auffallenden und zurückgeworfenen Strahl wenn die Strahlen aus einem Puncte auffallen, mit de Bogen der Brennlinie gleich viel wächſt. Hier rückt d ſtrahlende Punct gerade ſo viel fort, als der Bogen d Brennlinie zunimmt; daher bleibt die Summe des auffa lenden und zurückgeworfenen Strahls unverändert, ur die Bogen zwiſchen den zuſammengehörigen Puncten ſin gleich groß.

Da die Liebhaberey an mannigfaltigen Conſtruction der krummen Linien jetzt bey weitem nicht ſo ſtark iſ als vor hundert Jahren, ſo mag das hier beygebrach vollkommen hinreichen.

Combination iſt eine Verbindung von einige Dingen aus mehrern gegebenen, ohne Rückſicht auf di Ordnung der verbundenen Dinge. Eine Veränderung i der Ordnung der Dinge allein macht keine andere Combi nation. Die Dinge können Größen ſeyn, von welche die verbundenen in einander multiplicirt, zu einande addirt, oder zum Theil ſubtrahirt, oder auch bloß zuſam men geſtellt werden, wie die in einem Lotto gezogene Nummern oder die Augen auf verſchiedenen Würfeln Sie können, aber auch andere Dinge ſeyn, als: Perſonen Buchſtaben, Wörter, Farben, Karten, einfache Stoff des Mineralreichs, u. ſ. w.

1. Die verbundenen Dinge nenne man allgeme *Elemente*. Die Anzahl der combinirten Dinge od Elemente heißt der *Exponens* der Combination. Hie bey unterſcheidet man Combinationen *an ſich* und zu b *ſtimmten Summen*, *mit* oder *ohne* Wiederh lungen.

2. Die Combinationen werden in *Claſſen* nach d Anzahl der verbundenen Elemente abgetheilt. Eine

zelnes aus den vorhandenen Elementen heißt eine Union, und eine oder mehrere derselben machen die erste Classe der Combinationen aus, obgleich dieses Wort grammatisch eine Mehrheit, eigentlich eine Zweyheit andeutet. Man sieht hiebey nur auf das Ausheben aus mehrern Dingen. Eine Verbindung von zwey Elementen heißt eine Bision; von drey eine Ternion; von vier eine Quaternion; von fünf eine Quinion; von sechs eine Sexion, u. s. w. Was eine Nullion sey, wird sich unten (42.) in einem Beyspiele zeigen.

3. Die Abtheilungen oder Ordnungen in den Classen werden nach den Elementen gemacht, die in der ersten Stelle der einzelnen Combinationen stehen. So gehören aaa, aab, abc zu der ersten Ordnung in der dritten Classe; bbb, bbc, bcd zu der zweyten in derselben. Die Ordnung ist der Zahl nach dieselbe mit der Stellenzahl des anfangenden Buchstabens, wenn die Elemente nach den folgenden Buchstaben geordnet werden. Die Unterordnungen kann man durch die nach dem ersten Buchstaben folgenden angeben. So gehören abbd, abce zu der Unterordnung ab in der vierten Classe.

4. In den Combinationen sind entweder alle Elemente verschieden, oder eines oder mehrere werden wiederholt, z. B. abcd, aabc, aaabbcd. Die wiederholten Elemente kann man wie Potenzen bezeichnen. — Die Zahl, welche angiebt, wie oft ein Element genommen wird, nenne man den Wiederholungs-Exponenten. So ist 3 der Wiederholungs-Exponent von a, und 2 der von b in der Combination $a^3 b^2 cd$.

5. Die Beschaffenheit einer Combination in Rücksicht auf die Anzahl der Elemente, und die Verschiedenheit oder Wiederholung derselben macht die Form der Combination aus. Sie hängt nicht von der Ordnung ab, welche man die Elemente befolgen zu lassen für gut findet.

6. Combinationen, die in der Anzahl der Elemente und in den Wiederholungen, wenn solche vorhanden sind, übereinkommen, sind ähnlich, und machen eine Species, Art oder Gattung aus. Z. B. abc und bcd; ferner aabc, bbcd, bccd; oder a^3b^2c; c^2d^3e, bc^2d^3.

7. Die Elemente der Combinationen müssen gut oder regelmäßig geordnet werden, d. i sie müssen nach der Ordnung der sie bezeichnenden Buchstaben oder der Zahl ihrer Stellen auf einander folgen. Z. B. die Combination adffc ist nicht gut geordnet, sie muß geschrieben werden, acdff. Dieses ist nöthig, wenn bey der Aufstellung der Combinationen einer Classe Verwirrung und Unvollständigkeit vermieden werden sollen.

8. Die Combinationen einer Classe werden lexikographisch, wie die Wörter in einem Wörterbuche, geordnet. Zwey nächste Combinationen enthalten also in der ersten Stelle, wo sie von einander abgehen, zwey nächst auf einander folgende Buchstaben, und die zweyte derselben nach dem veränderten Buchstaben die darauf unmittelbar folgenden so viele als die Classe erfordert. Z. B. wenn die zu combinirenden Elemente sind, a, b, c, d, e, f, g, so sind die Combinationen aus der vierten Classe lexikographisch geordnet; abcd, abce ... abfg, acde ... acfg, adef ... aefg, bcde .. befg, cdef .. cefg, defg, an der Zahl 35, wo man die Lücken leicht ausfüllen kann.

9. Variationen sind Combinationen mit allen Versetzungen der darin vorhandenen Elemente. Die variirten Combinationen können nicht nach der Folge der bezeichnenden Buchstaben oder Zahlen in den einzelnen Complexionen geordnet bleiben. Doch muß eine gewisse Ordnung in der Folge der Variationen jeder Combination beobachtet werden, s. Versetzungen. Die Combinationen behalten die in (8.) festgesetzte Ordnung.

Nun iſt aus (II.)

$$\frac{2\,ds}{r} = \frac{\cos\omega.\,ds}{z} + \frac{\cos\omega.\,ds}{u},$$

Daraus iſt

$$u = \frac{r\,z\cos\omega}{2z - r\cos\omega}.$$

VI. Für die krumme Linie muß eine Gleichung zwiſchen dem Radius AM und dem Winkel BAM, den AM mit einer der Lage nach gegebenen AB macht, oder einer Function dieſes Winkels, gefunden oder gegeben ſeyn. Aus dieſer wird für irgend ein z der Werth von r und von $\cos\omega$ hergeleitet. Der daraus zufolge der Formel für u gefundene Werth von MS wird auf den zurückgeworfenen Strahl getragen, um den zugehörigen Punct der Brennlinie zu erhalten.

VII. Man ziehe RG ſenkrecht auf MA, ſo iſt $MG = \cos\omega$, und $MS = \frac{MA \times MG}{2MA - MG}$. Man halbire MG in H, ſo iſt $MS = \frac{MA \times MG}{2AH}$, weil $MA - AH = HM = \frac{1}{2}MG$ iſt, es mag G jenſeits oder diesſeits A liegen.

14. Wenn die auffallenden Strahlen ſich parallel ſind, ſo iſt z unendlich groß, und $u = \frac{1}{2}\cos\omega$, wie in (G.) gefunden iſt.

15. Daß die zurückgeworfenen Strahlen die Brennlinie berühren, iſt in (3) für parallel einfallende Strahlen analytiſch erwieſen. Daſſelbe gilt auch für divergirend auffallende. Denn nicht auf den Winkel, welchen die auffallenden Strahlen mit den Normalen und unter ſich machen, kommt es hier an, ſondern darauf, daß die zurückgeworfenen mit den Normalen dieſelben Winkel wie die auffallenden machen.

Es sey diese Anzahl = N. Aus jeder Combinatio von m Elementen entstehen durch die Versetzung derselben sie selbst auch gerechnet, m (m−1) (m−2) . . . 2 . 1 Variationen. Also ist die Menge aller Verbindungen nad m, mit Inbegriff der Variationen = m (m − 1 (m—2) . . . . . 2.1 × N. Diese ist aber aud n(n—1)(n—2) . . . . . (n—m+1); also is

$$N = \frac{n.n-1 \ldots (n-m+1)}{1 \cdot 2 \ldots m}.$$

Es ist aus n verschiedenen Elementen

Die Anzahl der Unionen $= \frac{n}{1}$.

Die Anzahl der Binionen $= \frac{n.n-1.}{1.2}$.

Die Anzahl der Ternionen $= \frac{n.n-1.n-2.}{1 \cdot 2 \cdot 3}$.

Die Anzahl der Quaternionen $= \frac{n.n-1.n-2.n-3.}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}$.

u. s. f.

14. Wenn 2m größer als n, das ist, wenn m größer als n − m ist, so nehme man das Complement n — m des Exponenten m zu der Anzahl der Elemente n, und suche für den Exponenten n — m die Anzahl der Combinationen. Denn nach der Formel (13.) ist die Anzahl der Combinationen nach m =

$$\frac{n.n-1 \ldots (m+1)\, m \ldots (n-m+1)}{1 \cdot 2 \cdot \ldots (n-m)(n-m+1) \ldots m} = \frac{n.n-1 \ldots m+1.}{1 \cdot 2 \ldots n-m.},$$

da die Factoren m . . . . . (n — m + 1) im Zähler sich gegen eben so viele solche im Nenner aufheben. Dieses ist aber die Anzahl der Combinationen für den Exponenten n — m.

15. Man kann $n - m$ Dinge aus n Dingen gerade eben so oft nehmen als m Dinge aus derselben Anzahl, z. B. 27 Karten aus 40 so oft als 13 aus 40 Karten.

16. Exempel. I. In dem Hazardspiele, welches Lotto heißt, werden 90 Nummern in einen Kasten gethan, und daraus 5 gezogen. Die Binionen, Ternionen, Quaternionen heißen hier Amben, Ternen, Quaternen.

Aus allen 90 Nummern ist die Anzahl

der Amben $= \frac{90 \cdot 89}{1 \cdot 2} = 4005$

der Ternen $= \frac{90 \cdot 89 \cdot 88}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 117480$

der Quaternen $= \frac{90 \cdot 89 \cdot 88 \cdot 87}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} = 2555190.$

Aus den gezogenen Nummern sind nur 10 Amben, 10 Ternen und fünf Quaternen möglich. Wer eine Ambe besetzt, hofft auf einen Gewinn in einer Lotterie von 4005 Loosen, mit 10 Gewinnen; bey einer Terne auf einen Gewinn in einer Lotterie von 117480 Loosen mit 10 Gewinnen; und bey einer Quaterne auf einen Gewinn in einer Lotterie von 2555185 Nieten gegen 5 Gewinne.

17. Exempel. II. Im Lombre ist die Menge der in den Händen aller drey Spieler zusammen möglichen Spiele $= \frac{40 \cdot 39 \ldots 28 \ldots 14}{1 \cdot 2 \ldots 13 \ldots 27} = \frac{40 \ldots 28}{1 \ldots 13} =$ 12033 22280, weil 27 Karten aus 40 genommen, oder 13 aus 40 zurückgelegt werden.

Die Menge der in einer Hand möglichen Spiele, ist die Menge der Combinationen von 9 Karten aus 40, also $= \frac{40 \cdot 39 \ldots 32}{1 \cdot 2 \ldots 9} = 273\,438880.$

Die Menge der in einer Hand möglichen Spiele ohne Spadille und Basta ist die Menge der Combinationen von 9 Karten aus 38, also $= \frac{38 \cdot 37 \ldots 30}{1 \cdot 2 \ldots 9} =$ 163 011640.

Es sey diese Anzahl = N. Aus jeder Combination von m Elementen entstehen durch die Versetzung derselben, sie selbst auch gerechnet, m (m−1) (m−2) . . . 2 . 1 Variationen. Also ist die Menge aller Verbindungen nach m, mit Inbegriff der Variationen = m (m−1) (m−2) . . . . . 2.1 × N. Diese ist aber auch n(n−1)(n−2) . . . . . (n−m+1); also ist

$$N = \frac{n.n-1 \ldots (n-m+1)}{1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot m}.$$

Es ist aus n verschiedenen Elementen

Die Anzahl der Unionen $= \frac{n}{1}$.

Die Anzahl der Binionen $= \frac{n.n-1.}{1.2}$.

Die Anzahl der Ternionen $= \frac{n.n-1.n-2.}{1 \cdot 2 \cdot 3}$.

Die Anzahl der Quaternionen $= \frac{n.n-1.n-2.n-3.}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}$.

u. s. f.

14. Wenn 2m größer als n, das ist, wenn m größer als n − m ist, so nehme man das Complement n − m des Exponenten m zu der Anzahl der Elemente n, und suche für den Exponenten n − m die Anzahl der Combinationen. Denn nach der Formel (13.) ist die Anzahl der Combinationen nach m =

$$\frac{n.n-1 \ldots (m+1)\, m \ldots (n-m+1)}{1 \cdot 2 \cdot \ldots (n-m)(n-m+1) \ldots m} = \frac{n.n-1 \ldots m+1.}{1.2 \ldots n-m.},$$

da die Factoren m . . . . . (n − m + 1) im Zähler sich gegen eben so viele solche im Nenner aufheben. Dieses ist aber die Anzahl der Combinationen für den Exponenten n − m.

15. Man kann n — m Dinge aus n Dingen gerade eben ſo oft nehmen als m Dinge aus derſelben Anzahl, z. B. 27 Karten aus 40 ſo oft als 13 aus 40 Karten.

16. Exempel. I. In dem Hazardſpiele, welches Lotto heißt, werden 90 Nummern in einen Kaſten gethan, und daraus 5 gezogen. Die Binionen, Ternionen, Quaternionen heißen hier Ambeu, Ternen, Quaternen.

Aus allen 90 Nummern iſt die Anzahl

der Ambeu $= \frac{90\ 89}{1\ .\ 2} = 4005$

der Ternen $= \frac{90.89.88}{1\ .\ 2\ .\ 3} = 117480$

der Quaternen $= \frac{90.89.88.87}{1\ .\ 2\ .\ 3\ .\ 4} = 2555190.$

Aus den gezogenen Nummern ſind nur 10 Ambeu, 10 Ternen und fünf Quaternen möglich. Wer eine Ambe beſetzt, hofft auf einen Gewinn in einer Lotterie von 4005 Looſen, mit 10 Gewinnen; bey einer Terne auf einen Gewinn in einer Lotterie von 117480 Looſen mit 10 Gewinnen; und bey einer Quaterne auf einen Gewinn in einer Lotterie von 2555185 Nieten gegen 5 Gewinne.

17. Exempel. II. Im Lombre iſt die Menge der in den Händen aller drey Spieler zuſammen möglichen Spiele

$= \frac{40.39\ldots28\ldots14}{1\ .\ 2\ .\ .\ 13\ldots27} = \frac{40\ldots28}{1\ldots13} =$

2033 22280, weil 27 Karten aus 40 genommen, oder 13 aus 40 zurückgelegt werden.

Die Menge der in einer Hand möglichen Spiele, iſt die Menge der Combinationen von 9 Karten aus 40, alſo

$= \frac{40.39\ldots32}{1\ .\ 2\ .\ .\ 9} = 273\ 438880.$

Die Menge der in einer Hand möglichen Spiele ohne Spadille und Baſta iſt die Menge der Combinationen von

Karten aus 38, alſo $= \frac{38.37\ldots30}{1\ .\ 2\ldots9} =$

53 011640.

die Stelle aller übrigen vertreten. Die Anzahl der
lichen Gattungen bezeichne man durch ein vorgesetzte
als N. abc; N. aab; N. aaa, oder N. abc; N.

N. a^3. Es ist N. abc $= \frac{n.n-1.n-2.}{1.2.3}$; N.

$= \frac{n.n-1}{1.2}.2.1 = n.n-1$; N. $a^3 = n$.

Summe dieser drey Zahlen ist die angegebene.

22. Die Anzahl der Quaternionen aus n Eleme
ohne und mit Wiederholungen, ist

$= \frac{n.n+1.n+2.n+3.}{1.2.3.4}$.

Die verschiedenen Formen dieser Verbindungen
abcd; a^2bc; a^3b^2; a^5b; a^4. Es ist N. abcd

$= \frac{n.n-1.n-2.n-3.}{1.2.3.4}$; N. a^2bc

$= \frac{n.n-1.n-2.}{1.2.3} \cdot \frac{1.2.3}{1.2} = \frac{n.n-1.n-2.}{1.2}$

N. $a^3b^2 = \frac{n.n-1.}{1.2} \cdot \frac{2.1}{1.2} = \frac{n.n-1.}{1.2}$;

N. $a^5b = \frac{n.n-1.}{1.2} \cdot 2.1 = n.n-1.$; N. $a^4 =$

Die Summe dieser Zahlen ist die angegebene.

23. Die Anzahl der Verbindungen von je fü
aus n Elementen, ohne und mit Wiederholungen,

$= \frac{n.n+1.n+2.n+3.n+4.}{1.2.3.4.5}$.

Die verschiedenen Formen der Verbindungen sind
abcde; a^2bcd; a^3bc; a^2b^2c; a^4b; a^3b^2;

Es ist N. abcde $= \frac{n...n-4}{1...5}$; N. a^2bcd

$= \frac{n \ldots n-3}{1 \ldots 4} \cdot 4$; $N.a^3bc = \frac{n.n-1.n-2}{1.2.3} \cdot 3$;

$N.a^2b^2c = \frac{n.n-1.n-2}{1.2.3} \cdot 3$; $N.a^2b = \frac{n.n-1}{1.2} \cdot 2$;

$N.a^2b^2 = \frac{n.n-1}{1.2} \cdot 2$; $N.a^4 = n$. Die Summe aller dieser Zahlen ist die angegebene.

24. Da die Formen der Verbindungen, und die Anzahl in jeder Gattung nach gewissen Gesetzen bestimmt werden, so darf man schließen, daß das in den vier berechneten Fällen sich zeigende Gesetz allgemein sey, nämlich, daß die Anzahl der Verbindungen von je m Elementen aus n, ohne und mit Wiederholungen, ist

$$\frac{n.n+1.n+2 \ldots n+m-1}{1.2.3 \ldots m}.$$

25. Es läßt sich auf einem andern Wege, als dem vorher, zur Übung in den Combinationen genommenen, leicht erweisen. Die Elemente seyn a, b, c, d, etc. an der Zahl n. Man multiplicire sie nach der Reihe durch a, dann von b an durch b; von c an durch c, u. s. f. und setze den Multiplicator voran. So erhält man alle Binionen, wie ab und aa, ohne Versetzungen und jede von den andern verschieden. Die Anzahl der mit a anfangenden ist $= n$, der mit b anfangenden, $= n - 1$, der mit c $= n - 2$, u. s. f. Folglich ist die Anzahl aller die Summe der Reihe $n; n-1; n-2; \ldots 2; 1$.

Diese Summe ist $= \frac{n+1.n}{1.2}$ (arithm. Reihe 6.).

Die Binionen multiplicire man auf dieselbe Art wie die Unionen, nämlich erstlich alle durch a; dann die von der Ordnung b und den folgenden durch b; darauf die von der Ordnung c und den folgenden durch c, u. s. f. den Multiplicator immer vorangesetzt. So erhält man folgende Partialsummen der verschiedenen Ternionen nach ihrer

C dem Durchmeſſer AB gleich iſt. Die krumme Linie, welche der Punct M, der FG halbirt, bey dieſer Bewegung des Winkelmaßes beſchreibt, iſt die Ciſſoide.

Man ziehe MP und FQ ſenkrecht auf CH, und FE ſchneide ſie in R. Es iſt

$$CE + FQ : CQ = FQ : RQ = PG : PM,$$

oder $CE + 2MP : CP - PG = PG : PM.$

Man ſetze $AC = a$, $CP = x$; $PM = y$, $PG = z$, ſo iſt aus dieſer Proportion

$$2(a+y)y = (x-z)z.$$

Da $z^2 = a^2 - y^2$, ſo iſt

$$a^2 + 2ay + y^2 = xz, \text{ daher}$$

$$(a+y)^4 = x^2z^2 = x^2(a+y)(a-y),$$

alſo $$(a+y)^3 = x^2(a-y).$$

Man nehme die Abſciſſenlinie auf AB von A an, ziehe MS darauf ſenkrecht, und ſetze $AS = u$, ſo iſt

$$u = a + y, \text{ und } u^3 = x^2(2a - u).$$

Dieſes iſt die Gleichung, die vorher für die Ciſſoide gefunden iſt.

Wallis fand durch ſeine Arithmetica Infinitorum die Quadratur und Cubatur der Ciſſoide, nebſt der Lage ihres Schwerpuncts. Operum T. I. p. 545.

Reimer in der hiſtoria duplicationis cubi, Göttingae 1798. liefert ſehr gute Nachforſchungen über Diokles und über die Ciſſoide, wie die Alten ſie kannten, nebſt der Überſetzung ſeiner Auflöſung des gedachten Problems aus Eutocius. Er zeigt aus einer Anführung des Proklus, daß die Ciſſoide ſchon dem Geminus, der im erſten Jahrhundert vor Chr. G. gelebt hat, bekannt geweſen, dagegen Montücla u. a. den Diokles erſt ins fünfte Jahrh. nach Chr. G. ſetzen.

Coefficient ist die gegebene oder die unveränderliche Größe, welche in einer Gleichung oder in einer Reihe mit der unbekannten oder den veränderlichen als Factor verbunden ist. So die Größen a, b, c in der Gleichung $x^3 + ax^2 + bx + c = o$, oder A, B, C, D, etc. in der nach x geordneten Reihe, $y = A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + \text{etc.}$ Wo die unbekannte oder veränderliche Größe keinen Factor hat, vertritt die Einheit die Stelle desselben. In unsern dekadischen Zahl-Ausdrücken ist jede einzelne Ziffer der Coefficient einer zugehörigen Potenz der Zehn. Wie die unbekannten Coefficienten in einer Reihe aus den Coefficienten in andern zugeordneten Reihen bestimmt werden, zeigt der Artikel, Methode der unbestimmten Coefficienten.

Coelometria ist die Wissenschaft der Regeln, Gefäße auszumessen, ein nicht üblicher Ausdruck für die Visirkunst, von κοιλος, hohl.

Coevoluten sind zwey einander zugeordnete krumme Linien, welche eine die andere durch Abwickelung erzeugen. Es seyn AB, ab, (Fig. 73. Tab. V.) Bogen der beiden krummen Linien; an beide sey ein völlig biegsamer Faden AMPma ohne Dicke gelegt, und in den Puncten M, m, nach den daselbst berührenden MP, mP gespannt. Ferner seyn MN, mn gleich große Bogen, und in den Puncten N und n seyn NQ und nQ die berührenden, die sich in Q schneiden. Ist nun die Summe NQ + nQ hier, so wie für jede andere gleiche Bogen MN, mn, gleich der Summe MP + Pm, so sind AB, ab Coevoluten. Der Durchschnittspunct der beiden berührenden beschreibt nach Art eines den Faden MPm spannenden Stiftes eine krumme Linie CD, welche für die berührenden, wie MP, mP, eine zurückstrahlende Linie ist, wenn diese berührenden als auffallende an CQ betrachtet werden.

Tschirnhausen hat die Coevoluten ersonnen, und Leibnitz bemerkt, daß sie dienen, gewisse Aufgaben aufzulösen.

Man sehe seine Opera, Tom. III. p. 277 und 398; auch das Commercium philos. et mathem. Leibnitii et Jo. Bernoulli an mehrern Stellen.

In dem Artikel, Catacaustica (16.) ist gezeigt, daß die Summe des auffallenden und zurückgeworfenen Strahls, wenn die Strahlen aus einem Puncte auffallen, mit dem Bogen der Brennlinie gleich viel wächst. Hier rückt der strahlende Punct gerade so viel fort, als der Bogen der Brennlinie zunimmt; daher bleibt die Summe des auffallenden und zurückgeworfenen Strahls unverändert, und die Bogen zwischen den zusammengehörigen Puncten sind gleich groß.

Da die Liebhaberey an mannigfaltigen Constructionen der krummen Linien jetzt bey weitem nicht so stark ist, als vor hundert Jahren, so mag das hier beygebrachte vollkommen hinreichen.

Combination ist eine Verbindung von einigen Dingen aus mehrern gegebenen, ohne Rücksicht auf die Ordnung der verbundenen Dinge. Eine Veränderung in der Ordnung der Dinge allein macht keine andere Combination. Die Dinge können Größen seyn, von welchen die verbundenen in einander multiplicirt, zu einander addirt, oder zum Theil subtrahirt, oder auch bloß zusammen gestellt werden, wie die in einem Lotto gezogenen Nummern oder die Augen auf verschiedenen Würfeln. Sie können, aber auch andere Dinge seyn, als: Personen, Buchstaben, Wörter, Farben, Karten, einfache Stoffe des Mineralreichs, u. s. w.

1. Die verbundenen Dinge nenne man allgemein Elemente. Die Anzahl der combinirten Dinge oder Elemente heißt der Exponens der Combination. Hierbey unterscheidet man Combinationen an sich und zu bestimmten Summen, mit oder ohne Wiederholungen.

2. Die Combinationen werden in Classen nach der Anzahl der verbundenen Elemente abgetheilt. Ein ein-

zelnes aus den vorhandenen Elementen heißt eine Union, und eine oder mehrere derſelben machen die erſte Claſſe der Combinationen aus, obgleich dieſes Wort grammatiſch eine Mehrheit, eigentlich eine Zweyheit andeutet. Man ſieht hiebey nur auf das Ausheben aus mehrern Dingen. Eine Verbindung von zwey Elementen heißt eine Binion; von drey eine Ternion; von vier eine Quaternion; von fünf eine Quinion; von ſechs eine Senion, u. ſ. w. Was eine Nullion ſey, wird ſich unten (42.) in einem Beyſpiele zeigen.

3. Die Abtheilungen oder Ordnungen in den Claſſen werden nach den Elementen gemacht, die in der erſten Stelle der einzelnen Combinationen ſtehen. So gehören aaa, aab, abc zu der erſten Ordnung in der dritten Claſſe; bbb, bbc, bcd zu der zweyten in derſelben. Die Ordnung iſt der Zahl nach dieſelbe mit der Stellenzahl des anfangenden Buchſtabens, wenn die Elemente nach den folgenden Buchſtaben geordnet werden. Die Unterordnungen kann man durch die nach dem erſten Buchſtaben folgenden angeben. So gehören abbd, abce zu der Unterordnung ab in der vierten Claſſe.

4. In den Combinationen ſind entweder alle Elemente verſchieden, oder eines oder mehrere werden wiederholt, z. B. abcd, aabc, aaabbcd. Die wiederholten Elemente kann man wie Potenzen bezeichnen. — Die Zahl, welche angiebt, wie oft ein Element genommen wird, nenne man den Wiederholungs-Exponenten. So iſt 3 der Wiederholungs-Exponent von a, und 2 der von b in der Combination $a^3 b^2 cd$.

5. Die Beſchaffenheit einer Combination in Rückſicht auf die Anzahl der Elemente, und die Verſchiedenheit oder Wiederholung derſelben macht die Form der Combination aus. Sie hängt nicht von der Ordnung ab, welche man die Elemente befolgen zu laſſen für gut findet.

6. Combinationen, die in der Anzahl der Elemente und in den Wiederholungen, wenn ſolche vorhanden ſind übereinkommen, ſind ähnlich, und machen eine Species, Art oder Gattung aus. Z. B. abc und bcd ferner aabc, bbcd, bccd; oder a^3b^2c; c^2d^3e bc^2d^3.

7. Die Elemente der Combinationen müſſen gut oder regelmäßig geordnet werden, d. i. ſie müſſen nach der Ordnung der ſie bezeichnenden Buchſtaben oder der Zahl ihre Stellen auf einander folgen. Z. B. die Combination adffc iſt nicht gut geordnet, ſie muß geſchrieben werden acdff. Dieſes iſt nöthig, wenn bey der Aufſtellung der Combinationen einer Claſſe Verwirrung und Unvollſtändigkeit vermieden werden ſollen.

8. Die Combinationen einer Claſſe werden lexikographiſch, wie die Wörter in einem Wörterbuche, geordnet. Zwey nächſte Combinationen enthalten alſo in der erſten Stelle, wo ſie von einander abgehen, zwey nächſt auf einander folgende Buchſtaben, und die zweyte derſelben nach dem veränderten Buchſtaben die darauf unmittelbar folgenden, ſo viele als die Claſſe erfordert. Z. B. wenn die zu combinirenden Elemente ſind, a, b, c, d, e, f, g, ſo ſind die Combinationen aus der vierten Claſſe lexikographiſch geordnet; abcd, abce ... abfg, acd ... acfg, adef ... aefg, bcde .. befg, cde .. cefg, defg, an der Zahl 35, wo man die Lücken leicht ausfüllen kann.

9. Variationen ſind Combinationen mit allen Verſetzungen der darin vorhandenen Elemente. Die variirten Combinationen können nicht nach der Folge der bezeichnenden Buchſtaben oder Zahlen in den einzelnen Complexionen geordnet bleiben. Doch muß eine gewiſſe Ordnung in der Folge der Variationen jeder Combination beobachtet werden, ſ. Verſetzungen. Die Combinationen behalten die in (8.) feſtgeſetzte Ordnung.

10. Eine combinatorische Involution der Art, wie hier zunächst vorkommen werden, ist eine Aussonderung aller Combinationen oder Variationen, in welchen die Summe der Stellenzahlen der verbundenen Elemente von der Einheit bis zu einem gewissen Werthe steigt; s. unten 37. f. f.

I. Anzahl der Combinationen jeder Classe ohne Wiederholungen.

11. Die Anzahl der Verbindungen nach m aus n verschiedenen Elementen, mit Inbegriff aller Variationen, ist $= n(n-1)(n-2)\ldots(n-m+1)$.

Ein einzelnes läßt sich aus n Elementen n mahl verschiedentlich nehmen. Setzt man zu jedem derselben nach der Reihe eines der übrigen $n-1$, so entstehen $n(n-1)$ Verbindungen nach 2, dergleichen ab, ba, ac, de sind. Wird zu jeder dieser eines der übrigen $n-2$ Elemente gesetzt, so entstehen $n(n-1)(n-2)$ Verbindungen nach 3, dergleichen abc, bac, abd, ade, def sind. Aus der Verknüpfung jeder dieser Verbindungen entstehen $n(n-1)(n-2)(n-3)$ Verbindungen nach 4, wie abcd, bacd, abce, abef, aefg, efgh, u. s. w. Solchergestalt wird bey jeder Zufügung eines Elements die Anzahl der Verbindungen mit Inbegriff ihrer Variationen immer mit der nächst kleinern Zahl multiplicirt, und für m Elemente ist die Anzahl der Verbindungen, mit Rücksicht auf die Ordnung der Elememte, die angegebene.

Für $m = n$ ist nur eine Verbindung, aber mit $n(n-1)\ldots 2.1$ Variationen.

12. Die Anzahl der Combinationen nach m aus n verschiedenen Elementen, ohne Variationen, ist

$$= \frac{n.n-1.n-2\ldots(n-m+1)}{1.2.3.\ldots m};$$

Es sey diese Anzahl = N. Aus jeder Combination von m Elementen entstehen durch die Versetzung derselben, sie selbst auch gerechnet, m (m−1) (m−2) . . . 2 . 1 Variationen. Also ist die Menge aller Verbindungen nach m, mit Inbegriff der Variationen = m (m−1) (m−2) . . . . . 2.1 × N. Diese ist aber auch n(n−1)(n−2) . . . . . (n−m+1); also ist

$$N = \frac{n.n-1 \ldots (n-m+1)}{1 \cdot 2 \ldots m}.$$

Es ist aus n verschiedenen Elementen

Die Anzahl der Unionen $= \frac{n}{1}$.

Die Anzahl der Binionen $= \frac{n.n-1.}{1.2}$.

Die Anzahl der Ternionen $= \frac{n.n-1.n-2.}{1.2.3}$.

Die Anzahl der Quaternionen $= \frac{n.n-1.n-2.n-3.}{1.2.3.4}$.

u. s. f.

14. Wenn 2m größer als n, das ist, wenn m größer als n − m ist, so nehme man das Complement n — m des Exponenten m zu der Anzahl der Elemente n, und suche für den Exponenten n — m die Anzahl der Combinationen. Denn nach der Formel (13.) ist die Anzahl der Combinationen nach m =

$$\frac{n.n-1 \ldots (m+1)\ m \ldots (n-m+1)}{1 \cdot 2 \cdot \quad (n-m)(n-m+1) \ldots m} = \frac{n.n-1 \ldots m+1.}{1.2 \ldots n-m.},$$

da die Factoren m . . . . . (n — m + 1) im Zähler sich gegen eben so viele solche im Nenner aufheben. Dieses ist aber die Anzahl der Combinationen für den Exponenten n — m.

15. Man kann $n - m$ Dinge aus n Dingen gerade eben so oft nehmen als m Dinge aus derselben Anzahl, z. B. 27 Karten aus 40 so oft als 13 aus 40 Karten.

16. Exempel. I. In dem Hazardspiele, welches Lotto heißt, werden 90 Nummern in einen Kasten gethan, und daraus 5 gezogen. Die Binionen, Ternionen, Quaternionen heißen hier Amben, Ternen, Quaternen.

Aus allen 90 Nummern ist die Anzahl

der Amben $= \frac{90 \cdot 89}{1 \cdot 2} = 4005$

der Ternen $= \frac{90 \cdot 89 \cdot 88}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 117480$

der Quaternen $= \frac{90 \cdot 89 \cdot 88 \cdot 87}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} = 2555190.$

Aus den gezogenen Nummern sind nur 10 Amben, 10 Ternen und fünf Quaternen möglich. Wer eine Ambe besetzt, hofft auf einen Gewinn in einer Lotterie von 4005 Loosen, mit 10 Gewinnen; bey einer Terne auf einen Gewinn in einer Lotterie von 117480 Loosen mit 10 Gewinnen; und bey einer Quaterne auf einen Gewinn in einer Lotterie von 2555185 Nieten gegen 5 Gewinne.

17. Exempel. II. Im Lombre ist die Menge der in den Händen aller drey Spieler zusammen möglichen Spiele

$= \frac{40 \cdot 39 \ldots 28 \ldots 14}{1 \cdot 2 \ldots 13 \ldots 27} = \frac{40 \ldots 28}{1 \ldots 13} =$

12033 22280, weil 27 Karten aus 40 genommen, oder 13 aus 40 zurückgelegt werden.

Die Menge der in einer Hand möglichen Spiele, ist die Menge der Combinationen von 9 Karten aus 40, also

$= \frac{40 \cdot 39 \ldots 32}{1 \cdot 2 \ldots 9} = 273\,438880.$

Die Menge der in einer Hand möglichen Spiele ohne Spadille und Basta ist die Menge der Combinationen von 9 Karten aus 38, also $= \frac{38 \cdot 37 \ldots 30}{1 \cdot 2 \ldots 9} =$

163 011640.

Die Menge der in einer Hand möglichen Spiele mi Spadille und Baſta iſt die Menge der Combinationen vo 7 Karten aus 38, alſo $= \frac{38 \cdot 37 \ldots 32}{1 \cdot 2 \ldots 7} = 1262025$

18. Die Anzahl aller Combinationen in allen Claſſe aus n Elementen iſt $= 2^n - 1$.

Es iſt die Anzahl der Unionen $= n$; der Binione $= \frac{n \cdot n-1}{1 \cdot 2}$; der Ternionen $= \frac{n \cdot n-1 \cdot n-2}{1 \cdot 2 \cdot 3}$; u. ſ. w. Die Anzahl der Verbindungen aller Elemen iſt $= \frac{n \cdot n-1 \ldots 2 \cdot 1}{1 \cdot 2 \ldots n-1 \cdot n}$. Nun iſt $(1+1)^n =$ $+ \frac{n}{1} + \frac{n \cdot n-1}{1 \cdot 2} \ldots + \frac{n \cdot n-1 \ldots 1}{1 \cdot 2 \ldots n}$ (Binom ſcher Lehrſatz. 1.). Alſo iſt die Anzahl der Combinatio nen in allen Claſſen $= (1+1)^n - 1 = 2^n - 1$.

Exempel. Die Zahl 2310 hat die einfachen Factoren 2, 3, 5, 7, 11, ohne Wiederholung eines derſelben Sie hat alſo $2^5 - 1$ Factoren, das iſt, 31 Factoren.

II. Anzahl der Combinationen mit Wiederholungen.

19. Die Anzahl der Combinationen einer gegebene Form mit Wiederholung eines oder mehrerer Elemente au n Elementen zu beſtimmen.

Man ſuche zuerſt die Anzahl der Combinationen vo ſo viel verſchiedenen Elementen, als in derſelben vorkon men, und multiplicire dieſe mit der Anzahl der Verſetzu gen, die für die Wiederholungs-Exponenten Statt fi den, wann dieſe als einzelne Elemente zuſammengeſte werden. Z. B. Die Form der Combinationen f aaabbcd, die Anzahl aller Elemente, $= p$. Daſſel

Element kann entweder dreymahl, oder zweymahl oder einmahl genommen werden. Folglich ſind für dieſelben Elemente a, b, c, d, folgende ähnliche Combinationen mit dem Exponenten 7 möglich.

a^3b^2cd a^2b^3cd ab^3c^2d ab^2cd^3 . . . .

a^3bc^2d a^2bc^3d ab^3cd^2 abc^3d^2 .

a^3bcd^2 a^2bcd^3 ab^2c^3d abc^2d^3 . .

Die Anzahl der Vertauſchungen iſt offenbar die Anzahl der Verſetzungen der Wiederholungs-Exponenten 3, 2, 1, 1, welche iſt $\frac{1.2.3.4}{1.2} = 12$. Vier Elemente, wie a, b, c, d, laſſen ſich aus n Elementen nehmen $\frac{n.n-1.n-2.n-3.}{1.2.3.4}$ mahl. Folglich iſt die Anzahl der Combinationen nach 7 mit den Wiederholungs-Exponenten 3, 2, 1, 1, $= \frac{n.n-1.n-2.n-3.}{1.2.3.4} \cdot \frac{1.2.3.4}{1.2}$.

Wie in dieſem Beyſpiele, ſo in jedem andern Falle.

20. Die Anzahl der Binionen aus n Elementen, ohne und mit Wiederholungen, iſt $= \frac{n.n+1.}{1.2}$.

Die Anzahl der Binionen verſchiedener Elemente iſt $= \frac{n.n-1.}{1.2}$; der Verdoppelungen $= n$, alſo die Summe $= \frac{n.n+1.}{1.2}$.

21. Die Anzahl der Ternionen aus n Elementen, ohne und mit Wiederholungen iſt $= \frac{n.n+1.n+2}{1.2.3}$.

Die Elemente ſeyn a, b, c, d, etc. Die verſchiedenen Formen der Ternionen ſind abc, aab, aaa, welche

die Stelle aller übrigen vertreten. Die Anzahl der ä
lichen Gattungen bezeichne man durch ein vorgesetztes
als N. abc; N. aab; N. aaa, oder N. abc; N. a²
N. a³. Es ist N. abc $= \frac{n.n-1.n-2.}{1.2.3}$; N. a
$= \frac{n.n-1}{1.2}.2.1 = n.n-1$; N. $a^3 = n$.

Summe dieser drey Zahlen ist die angegebene.

22. Die Anzahl der Quaternionen aus n Element
ohne und mit Wiederholungen, ist

$$= \frac{n.n+1.n+2.n+3.}{1.2.3.4}.$$

Die verschiedenen Formen dieser Verbindungen sin
abcd; a^2bc; a^2b^2; a^3b; a^4. Es ist N. abcd

$$= \frac{n.n-1.n-2.n-3.}{1.2.3.4}; \text{ N. } a^2bc$$

$$= \frac{n.n-1.n-2.}{1.2.3}.\frac{1.2.3}{1.2} = \frac{n.n-1.n-2.}{1.2}$$

$$\text{N. } a^3b^2 = \frac{n.n-1.}{1.2}.\frac{2.1}{1.2} = \frac{n.n-1.}{1.2};$$

$$\text{N. } a^3b = \frac{n.n-1.}{1.2}.2.1 = n.n-1.; \text{ N. } a^4 =$$

Die Summe dieser Zahlen ist die angegebene.

23. Die Anzahl der Verbindungen von je fünf
aus n Elementen, ohne und mit Wiederholungen,

$$= \frac{n.n+1.n+2.n+3.n+4.}{1.2.3.4.5}.$$

Die verschiedenen Formen der Verbindungen sind hie
abcde; a^2bcd; a^3bc; a^2b^2c; a^4b; a^3b^2; a

Es ist N. abcde $= \frac{n...n-4}{1...5}$; N. a^2bcd

$= \frac{n \ldots n-3}{1 \ldots 4} \cdot 4$; $N.a^5bc = \frac{n.n-1.n-2}{1.2.3} \cdot 3$;

$N.a^2b^2c = \frac{n.n-1.n-2}{1.2.3} \cdot 3$; $N.a^4b = \frac{n.n-1}{1.2} \cdot 3$;

$N.a^3b^2 = \frac{n.n-1}{1.2} \cdot 2$; $N.a^4 = n$. Die Summe aller dieser Zahlen ist die angegebene.

24. Da die Formen der Verbindungen, und die Anzahl in jeder Gattung nach gewissen Gesetzen bestimmt werden, so darf man schließen, daß das in den vier berechneten Fällen sich zeigende Gesetz allgemein sey, nämlich, daß die Anzahl der Verbindungen von je m Elementen aus n, ohne und mit Wiederholungen, ist

$$\frac{n.n+1.n+2 \ldots n+m-1.}{1.2.3 \ldots m},$$

25. Es läßt sich auf einem andern Wege, als dem vorher, zur Übung in den Combinationen genommenen, leicht erweisen. Die Elemente seyn a, b, c, d, etc. an der Zahl n. Man multiplicire sie nach der Reihe durch a, dann von b an durch b; von c an durch c, u. s. f. und setze den Multiplicator voran. So erhält man alle Binionen, wie ab und aa, ohne Versetzungen und jede von den andern verschieden. Die Anzahl der mit a anfangenden ist $= n$, der mit b anfangenden, $= n - 1$, der mit c $= n - 2$, u. s. f. Folglich ist die Anzahl aller die Summe der Reihe $n; n-1; n-2; \ldots 2; 1$.

Diese Summe ist $= \frac{n+1.n}{1.2}$ (arithm. Reihe 6.).

Die Binionen multiplicire man auf dieselbe Art wie die Unionen, nämlich erstlich alle durch a; dann die von der Ordnung b und den folgenden durch b; darauf die von der Ordnung c und den folgenden durch c, u. s. f. den Multiplicator immer vorangesetzt. So erhält man folgende Partialsummen der verschiedenen Ternionen nach ihren

Ordnungen: I. $\frac{n+1.n}{1.2}$; II. $\frac{n.n-1.}{1.2}$

III. $\frac{n-1.n-2.}{1.2}$ .... letzte $= \frac{2.1}{1.2}$. Die Summe dieser arithmetischen Reihe der zweyten Ordnung erhält man am leichtesten durch den binomischen Lehrsatz, (Binomial-Coefficienten. 6.). Das erste Glied ist der zweyte Binomial-Coefficient in der $(n+1)$ten Potenz. Die Summe aller Glieder ist der dritte Coefficient in der $(n+2)$ten Potenz $= \frac{n+2.n+1.n}{1.2.3}$. Mit den Ternionen verfahre man auf dieselbe Art, wie mit den Unionen und Binionen, so erhält man die Partial-Summen der Quaternionen nach ihren Ordnungen:

I. $\frac{n+2.n+1.n}{1.2.3}$; II. $\frac{n+1.n.n-1.}{1.2.3}$;

III. $\frac{n.n-1.n-2.}{1.2.3}$.... letzte $= \frac{3.2.1}{1.2.3}$

Die Summe dieser dritten Binomial-Coefficienten ist $= \frac{n+3.n+2.n+1.n}{1.2.3.4}$, als die Summe aller Quaternionen.

Auf diese Art erhellt deutlich, daß die Anzahl der Combinationen von m Elementen aus n, ohne und mit Wiederholungen, aber ohne Versetzungen, ist

$$\frac{n.n+1.n+2....n+m-1.}{1.2.3....m}.$$

26. Diese ist der mte Coefficient in der Potenz $(a+b)^{-n}$, den Coefficienten n das zweyten Gliedes als den ersten gerechnet, ohne Rücksicht auf die Vorzeichen. (Binomischer Lehrsatz. 11.). Die Anzahl der Combinationen von m Elementen aus n, ohne Wiederholun-

gen, nämlich $\frac{n \cdot n-1 \cdot n-2 \ldots n-m+1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots m}$, ist der mte Coefficient in der Potenz $(a+b)^n$. (a. a. O. 1.).

27. Die Anzahl aller Combinationen aus allen Classen, ohne und mit Wiederholungen, von den Unionen an bis zu der von m Elementen, aus n, ist $= \frac{n+1 : n+2 \ldots n+m}{1 \cdot 2 \ldots m} - 1$. Diese Summirung gründet sich auf den Satz, daß die Summe des rten und $(r+1)$ten Binomial-Coefficienten in einer Potenz dem $(r+1)$ten Coefficienten in der nächst höhern Potenz gleich ist; (Binominal Coeff. 5.):

Oder: es ist die Anzahl der Unionen $= n+1-1$; der Binionen $= \frac{n+1 : n}{1 \cdot 2}$; also die Summe beider $= \frac{n+2 \cdot n+1 :}{1 \quad 2} - 1$. Die Anzahl der Ternionen ist $\frac{n+2 \cdot n+1 \cdot n}{1 \cdot 2 \cdot 3}$, also die Summe jener und dieser $= \frac{n+3 \cdot n+2 \cdot n+1 :}{1 \quad 2 \quad 3} - 1$. u. s. f. Zur Erläuterung summire man in der Tafel a. a. O. 4. die Coefficienten nach einer Diagonale genommen.

28. Exempel. Man habe fünf cubische oder gemeine Würfel, es ist die Frage, wie vielerley Arten von Würfen, und wie viele Würfe jeder Art mit allen diesen Würfeln möglich sind. Bezeichnet man die Augen durch a, b, c, d, e, f, so sind die verschiedenen Arten des Wurfs: 1) abcde; 2) aabcd; 3) aabbc; 4) aaabc; 5) aaabb; 6) aaaab; 7) aaaaa, wo die Buchstaben jede Anzahl Augen von 1 bis 6 bedeuten,

aber jedes eine andere. Es ist aus (20.), wenn das vorgesetzte N die Anzahl der Combinationen in einer Gattung bedeutet, N. abcde = 6

N. aabcd = 60; N. aabbc = 60;

N. aaabc = 60; N. aaabb = 30;

N. aaaab = 30; N. aaaaa = 6.

Die Summe ist = 252 = $\frac{6.7.8.9.10.}{1.2.3.4.5.}$

Weil jede Anzahl verschiedener Augen mit andern Würfeln gebracht werden kann, so sind von jeder Combination so viele Variationen möglich als Versetzungen der Elemente. Diese sind 1) 720, 2) 3600, 3) 1800, 4) 1200, 5) 300, 6) 150, 7) 6; in Summa 7776, welches die fünfte Potenz von 6 ist, wie es seyn muß. Denn mit zwey Würfeln sind 6 mahl 6 Würfe möglich; nimmt man noch einen Würfel dazu, so kann zu jedem Wurfe mit zwey Würfeln eine Seite des dritten Würfels gebracht werden, welches 6 × 6 × 6 Würfe giebt, u. s. f.

29. Aufgabe. Wenn unter den gegebenen Elementen einige mehrmahls vorkommen, die Anzahl der Combinationen aus allen Classen, ohne Wiederholungen der übrigen, anzugeben.

Das Verfahren wird sich nur an einem Beyspiele zeigen lassen, Es seyn die wiederholten Elemente, a, a, a, a, b, b, b; c, c; die übrigen d, e, f, etc. Man suche zuerst die Anzahl der Combinationen von den wiederholten Elementen, a, b, c. Das erste für sich giebt 4, das zweyte 3, das dritte 2 Combinationen. Die Combinationen je zweyer derselben sind an der Zahl 4.3 + 4.2 + 3.2; die Combinationen aller drey sind an der Zahl 4.3.2. Die Summe aller dieser Combinationen ist 9 + 26 + 24 = 59.

Die Anzahl aller verschiedenen Elemente sey = n, so ist in unserm Falle die Anzahl der übrigen d, e, f, etc.

$= n - 3$; und die Anzahl ihrer Combinationen $= 2^{n-3} - 1$ nach (18.). Das Product dieser Zahl in die Anzahl der Combinationen aus a, b, c giebt die Anzahl der Combinationen, worin Elemente aus beiden Abtheilungen, der a, b, c, und der übrigen, d, e, f, etc. vorkommen. Dazu nehme man die Combinationen aus a, b, c allein, so ist die gesuchte Anzahl aller Combinationen aus a, a, a, a, b, b, b, c, c, d, e, f, etc.

$= 2^{n-5} - 1 + 59(2^{n-5} - 1) + 59 = 60 \times 2^{n-5} - 1.$

30. Exempel. Die Anzahl der verschiedenen Factoren der Zahl $831600 = 2.2.2.2.3.3.5.5.7.11$. zu finden. Hier ist $n = 5$, also die Anzahl der verschiedenen Factoren, die Zahl selbst und die Einheit ausgeschlossen, $= 60 \times 4 - 1 = 239$.

Die Anzahl aller Combinationen aus den Elementen, a, a, a, a, a; b, b, b, b; c, c, c; d, d ist die Summe der Unionen, Binionen, Ternionen und der Quaternion aus den Zahlen 5, 4, 3, 2, d. i. die Summe $14 + 71 + 154 + 120 = 359$. Die Anzahl der übrigen von einander durchgehends verschiedenen Elemente sey $n - 1\frac{1}{4}$, so ist die Anzahl aller Combinationen $= 359 + 2^{n-14} - 1 + 359(2^{n-1\frac{1}{4}} - 1) = 360 \times 2^{n-14}$.

III. Aufstellung aller einzelnen Combinationen mit und ohne Wiederholungen jeder Classe aus einer gegebenen Anzahl von Elementen.

31. Die Anzahl der Elemente, aus welchen die Combinationen gemacht werden, sey $= n$; die Elemente seyn a, b, c, d, etc. Die Classe der Binionen mit Wiederholungen desselben Elements, aber ohne Versetzungen, wird erhalten, wenn jeder Union erstlich das Element a; darauf der Union b und allen folgenden das Element b; ferner der Union c und allen folgenden das Element c, u. s. f. vorgesetzt wird. Die Classe der Ternionen, wenn die einzelnen Elemente a, b, c, d, etc. successiv denjenigen Binionen vorgesetzt werden, die sich mit dem vorzusetzen-

den Element oder einem folgenden anfangen. Auf i
Art werden die übrigen Classen nach einander vollstä
aufgestellt.

32. Die Combinationen ohne Wiederholungen zustellen, setzt man in jeder Classe jedes Element nach Reihe nur denjenigen Combinationen vor, die sich mi nem der folgenden Elemente anfangen.

33. Exempel für Combinationen mit Wiede lungen.

I.	a	b	c	d
II.	aa	ab	ac	ad
		bb	bc	bd
			cc	cd
				dd
III.	aaa	aab	aac	aad
		abb	abc	abd
			acc	acd
				add
		bbb	bbc	bbd
			bcc	bcd
				bdd
			ccc	ccd
				cdd
				ddd
IV.	aaaa	aaab	aaac	aaad
	etc.			

34. Exempel für Combinationen ohne Wiederholung.

I.	a	b	c	d	e
II.		ab	ac	ad	ae
			bc	bd	be
				cd	ce
					de
III.			abc	abd	abe
				acd	ace
					ade
				bcd	bce
					bde
					cde
IV.				abcd	abce
					abde
					acde
					bcde
V.					abcde

35. Die Variationen werden erhalten, wenn jeder einzelnen Combination die Zahl der Versetzungen vorgeschrieben wird. Das Total aller Variationen in einer Classe ist die Potenz des Polynomium a + b + c + d + e + f + etc. als der Summe der Elemente mit dem Exponenten, welcher der Zahl der Classe gleich ist.

36. Von Combinationen ohne Wiederholungen sind nur so viele Classen möglich, als Elemente vorhanden sind. Mit Wiederholungen ist die Anzahl der Classen willkührlich.

IV. Aufſtellung der Combinationen mit beſtimmter Summe der Stellenzahlen ihrer Elemente.

37. Den Elementen, die verbunden werden ſollen, gebe man jedem eine beſtimmte Stelle, die durch die beygeſetzte Zahl angezeigt wird, nämlich

1 2 3 4 5 6 7 . . . .

a b c d e f g . . . .

Dieſe Verbindung der Buchſtabenreihe mit der Zahlenreihe heißt der Zeiger (Index). Es ſollen alle diejenigen Combinationen mit Wiederholungen aufgeſtellt werden, in welchen die Summe der Stellenzahlen, oder die Localſumme, eine beſtimmte Zahl iſt. Dieſes kann auf mehr als eine Art geſchehen. Erſtlich laſſen ſich die Combinationen Claſſenweiſe darſtellen, mit Beobachtung der Folge der Elemente in jeder Claſſe. Zweytens kann man ſie lexikographiſch ordnen, ſo daß nach jeder Combination diejenige geſetzt wird, welche ihr in der Folge der bezeichnenden Buchſtaben am nächſten kommt. Ein Exempel wird beide Methoden hinlänglich erklären.

83. Die Summe der Stellenzahlen ſey = 7, weswegen von allen Elementen nur die erſten 7 in den Combinationen vorkommen.

Combinationen nach Classen.

g

af
be
cd

aae
abd
acc
bbc

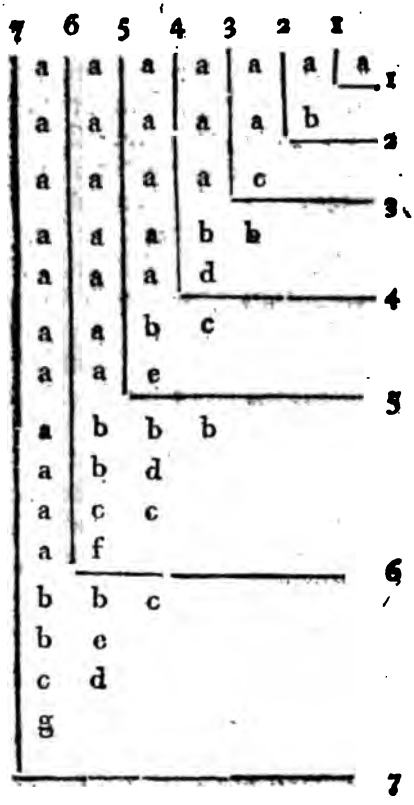
aaad
aabc
abbb

aaaac
aaabb

aaaaab

aaaaaaa

Combinationen in lexikographischer Folge.



Nach der erstern Methode setze man das 7te Element als Union in die erste Classe. Darauf setze man diesem successiv die Elemente a, b, etc. vor, und vertausche successive mit f, e, etc. gestatte aber keinen Rückgang in der Folge der Buchstaben. Aus der zweyten Classe bildet man die dritte durch successive Vorsetzung der Elemente a, b, etc., und Vertauschung des letzten Elements mit demjenigen, das so viele Stellen rückwärts liegt, als die Zahl der Stelle des vorgesetzten Elements Einer enthält, übergeht aber alle Combinationen, worin Rück-

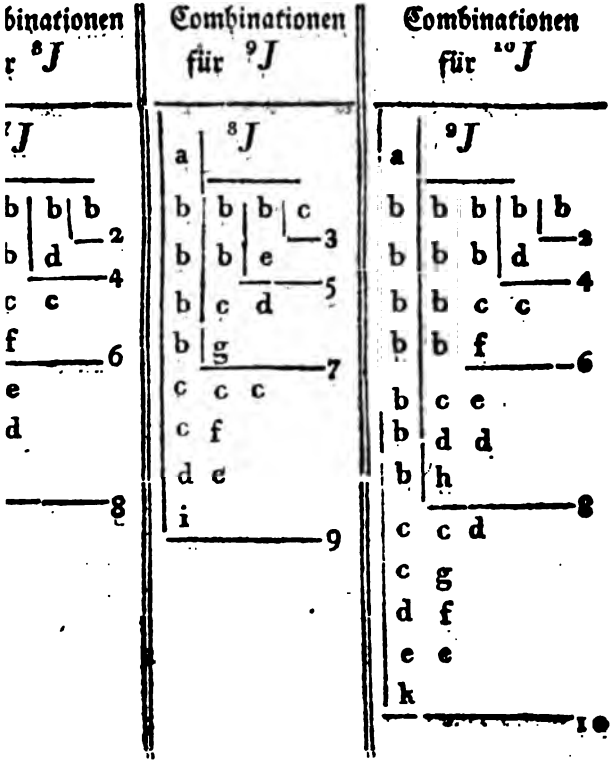
gänge vorkommen, weil diese nur Versetzungen scho
fundener Combinationen sind.

Nach der zweyten Methode setze man zuerst das
Element a, und sondere es durch einen Winkelhaken
Man setze a vor, und vertausche das a in dem Wink
ken mit dem nächsten Elemente b, welches unter das
gesetzte a geschrieben wird. Diese Combinationen so
man durch den Winkelhaken 2, 2 ab. Sie geben di
calsumme = 2. Weiter setze man den gefundenen (
binationen das Element a vor, vertausche in demselbe
erste Element linker Hand mit dem nächstfolgenden,
setze die daraus entstehenden Combinationen mit Au
lassung derer, die Rückgänge enthalten, zu dem mit
fangenden. Alle in dem Winkelhaken 3,3 eingeschlos
Combinationen geben die Localsumme = 3. Auf
Art verfahre man überhaupt, erstlich, daß man den (
binationen von der Summe m — 1 das Element a
setze, und daß man in denselben das erste Element l
Hand mit dem nächstfolgenden vertausche, und alle s
haltene Combinationen, die keine Rückgänge enthalte
jenen mit a anfangenden in denselben Winkelhaken
wodurch dieser alle Combinationen mit der Lokalsumm
liefert.

Setzte man in den obigen Combinationen nach
sen, statt der Buchstaben die zugehörigen Zahlen nach
Zeiger (37.) so würden alle Combinationen, von der e
g = 7, an bis zur letzten aaaaaaa = 1111111, a
mographisch (so wie die Buchstaben in der zw
Darstellung lexikographisch) fortgehen und auf eine
folgen. Auch in der arithmographischen Fortschre
der ersten Darstellung befolgen die Combinationen,
nur in den einzelnen Classen, die lexikograph
Ordnung.

39. Die zweyte sehr sinnreiche Darstellung, so m
combinatorischen Regeln und Verfahren für beyde,
von Hindenburg angegeben, (Archiv der Ma
IV. Heft. 392. S. und erste Samml. combin. Abh

13.). Die zweyte Darstellung ist involutorisch, sie liefert mit den Combinationen von der Local- m zugleich alle von jeder niedrigern Summe. Sie also die Genesis der Combinationen sehr sinnlich, icht dar; welches auf ähnliche Art auch bey den ein- Classen der ersten Darstellung geschehen kann, die uch involutorisch anordnen lassen (Erste Samml. S. 187.) Eine solche Darstellung gewährt daher en Vortheil, daß man sie leicht fortsetzen und für öhere Localsumme die Aufstellung der niedrigern be- kann. Z. B. die Combinationen für die Local- 7 seyn zusammen ^{7}J; für die Localsumme 8 sey J, u. s. f. so sind die



gänge vorkommen, weil diese nur Versetzungen schon gefundener Combinationen sind.

Nach der zweyten Methode setze man zuerst das erste Element a, und sondere es durch einen Winkelhaken ab. Man setze a vor, und vertausche das a in dem Winkelhaken mit dem nächsten Elemente b, welches unter das vorgesetzte a geschrieben wird. Diese Combinationen sondere man durch den Winkelhaken 2, 2 ab. Sie geben die Localsumme = 2. Weiter setze man den gefundenen Combinationen das Element a vor, vertausche in denselben das erste Element linker Hand mit dem nächstfolgenden, und setze die daraus entstehenden Combinationen mit Auslassung derer, die Rückgänge enthalten, zu dem mit a anfangenden. Alle in dem Winkelhaken 3,3 eingeschlossenen Combinationen geben die Localsumme = 3. Auf diese Art verfahre man überhaupt, erstlich, daß man den Combinationen von der Summe $n-1$ das Element a vorsetze, und daß man in denselben das erste Element linker Hand mit dem nächstfolgenden vertausche, und alle so erhaltene Combinationen, die keine Rückgänge enthalten, zu jenen mit a anfangenden in denselben Winkelhaken setze, wodurch dieser alle Combinationen mit der Localsumme n liefert.

Setzte man in den obigen Combinationen nach Classen, statt der Buchstaben die zugehörigen Zahlen nach dem Zeiger (37.) so würden alle Combinationen, von der ersten $g = 7$, an bis zur letzten $aaaaaaa = 1111111$, arithmographisch (so wie die Buchstaben in der zweyten Darstellung lexikographisch) fortgehen und auf einander folgen. Auch in der arithmographischen Fortschreitung der ersten Darstellung befolgen die Combinationen, aber nur in den einzelnen Classen, die lexikographische Ordnung.

39. Die zweyte sehr sinnreiche Darstellung, so wie die combinatorischen Regeln und Verfahren für beyde, sind von Hindenburg angegeben, (Archiv der Mathem. IV. Heft. 392. S. und erste Samml. combin. Abhandl

S. 183.). Die zweyte Darstellung ist involutorisch, d. h. sie liefert mit den Combinationen von der Localsumme m zugleich alle von jeder niedrigern Summe. Sie stellt also die Genesis der Combinationen sehr sinnlich und leicht dar; welches auf ähnliche Art auch bey den einzelnen Classen der ersten Darstellung geschehen kann, die sich auch involutorisch anordnen lassen (Erste Samml. a. A. S. 187.) Eine solche Darstellung gewährt daher auch den Vortheil, daß man sie leicht fortsetzen und für jede höhere Localsumme die Aufstellung der niedrigern benutzen kann. Z. B. die Combinationen für die Localsumme 7 seyn zusammen ^{7}J; für die Localsumme 8 sey sie ^{8}J, u. s. f. so sind die

Combinationen für ^{8}J

a	^{7}J			
b	b	b	b	2
b	b	d		4
b	c	c		
b	f			6
c	e			
d	d			
h				8

Combinationen für ^{9}J

a	^{8}J			
b	b	b	c	3
b	b	e		5
b	c	d		
b	g			7
c	c	c		
c	f			
d	e			
i				9

Combinationen für ^{10}J

a	^{9}J			
b	b	b	b	2
b	b	d		4
b	c	c		
b	f			6
b	c	e		
b	d	d		
b	h			8
c	c	d		
c	g			
d	f			
e	e			
k				10

Die Combinationen, welche hier zu denen, die a enthalten, hinzukommen, sind nach einem ähnlichen Gesetze, wie das in (38.) für die lexikographische Folge, aus den Elementen b, c, d, e, f, g, etc. zu den Local-Summen, 2, 4, 6, 8, etc. oder 3, 5, 7, 9, etc. gebildet. Den gefundenen Combinationen von einerley Localsumme wird das Element b vorgesetzt, und zweytens wird in denselben jedes der beiden ersten Elemente mit dem nächst folgenden vertauscht, und wo nur ein einziges vorhanden ist, das zweyte folgende dafür genommen, wobey alle diejenigen Combinationen bey Seite gesetzt werden, in welchen ein Rückgang der Buchstaben vorhanden ist. Diese Anwendung des obigen Gesetzes bemerklich zu machen, sind die Combinationen von gleichen Localsummen durch Winkelhaken abgesondert. Es kann nach diesem Verfahren keine Combination ausgelassen werden. Wenn eine in dem letzten Winkelhaken fehlte, so müßte auch eine in dem nächst vorher gehenden fehlen, daher auch eine in dem vor diesem vorher gehenden, u. s. f. bis zu dem letzten oder vorletzten von oben.

Die auf diese Art aus allen Combinationen der Elemente a, b, c, d, etc. ausgesonderten machen eine combinatorische Involution mit dem Exponenten m aus, wenn die höchste Localsumme = m ist. Werden diese Combinationen auf jede mögliche Art versetzt, so entsteht eine Involution der Variationen mit dem Exponenten m.

V. Abtheilung der Combinationen nach den Localsummen, und Anordnung nach den Wiederholungs-Exponenten eines der Elemente.

40. Es sind wiederum n Elemente, a, b, c, d, e, etc. gegeben, von welchen je m genommen werden. Die Stelle des ersten werde durch o bezeichnet, so daß der Zeiger ist

o 1 2 3 4 5 6 7 8 . .
a b c d e f g h i . .

Bey der Bestimmung der Localsumme für eine Combination wird a nicht mit gerechnet. Die Abtheilungen werden nach der Folge der Localsummen gemacht, und die Combinationen werden nach dem Wiederholungs-Exponenten von a geordnet, von dem größten angefangen.

10. Eine combinatorische Involution der Art, wie hier zunächst vorkommen werden, ist eine Aussonderung aller Combinationen oder Variationen, in welchen die Summe der Stellenzahlen der verbundenen Elemente von der Einheit bis zu einem gewissen Werthe steigt; s. unten 37. f. f.

I. Anzahl der Combinationen jeder Classe ohne Wiederholungen.

11. Die Anzahl der Verbindungen nach m aus n verschiedenen Elementen, mit Inbegriff aller Variationen, ist $= n(n-1)(n-2)\ldots(n-m+1)$.

Ein einzelnes läßt sich aus n Elementen n mahl verschiedentlich nehmen. Setzt man zu jedem derselben nach der Reihe eines der übrigen $n-1$, so entstehen $n(n-1)$ Verbindungen nach 2, dergleichen ab, ba, ac, de sind. Wird zu jeder dieser eines der übrigen $n-2$ Elemente gesetzt, so entstehen $n(n-1)(n-2)$ Verbindungen nach 3, dergleichen abc, bac, abd, ade, def sind. Aus der Verknüpfung jeder dieser Verbindungen entstehen $n(n-1)(n-2)(n-3)$ Verbindungen nach 4, wie abcd, bacd, abce, abef, aefg, efgh, u. s. w. Solchergestalt wird bey jeder Zufügung eines Elements die Anzahl der Verbindungen mit Inbegriff ihrer Variationen immer mit der nächst kleinern Zahl multiplicirt, und für m Elemente ist die Anzahl der Verbindungen, mit Rücksicht auf die Ordnung der Elememte, die angegebene.

Für $m = n$ ist nur eine Verbindung, aber mit $n(n-1)\ldots2.1$ Variationen.

12. Die Anzahl der Combinationen nach m aus n verschiedenen Elementen, ohne Variationen, ist

$$= \frac{n.n-1.n-2\ldots(n-m+1)}{1.2.3.\ldots m}.$$

Iſt das Polynomium $Z = a + bz + cz^2 + dz^3 + ez^4 + fz^5 + \text{etc.}$, ſo ſind die Glieder, wel fünfte Potenz von z enthalten.

aus Z	fz^5
aus Z^2	$(2af + 2be + 2cd)z^5$
aus Z^3	$(3a^2f + 3a(2be + 2cd) + 3bc^2)z^5$
aus Z^4	$(4a^3f + 6a^2(2be + 2cd) + 4a3b^2d + 3bc^2) + 4b^3c$
aus Z^5	$(5a^4f + 10a^3(2be + 2cd) + 10a^2(3b^2d + 3bc^2) + 5a.4b^5c +$
etc.	

In den Potenzen beider Polynomien gehören nigen Combinationen von a, b, c, d, e, etc. zi ſelben Potenz von z, deren Localſumme nach dem

0 1 2 3 4 . . .
a b c d e . . . dem Exponenten der Potenz von z iſt. Daher ſind aus den Potenzen des erſten, $a = o$ iſt, die zu z^r gehörigen Combinationen in de chern der rten Horizontalreihe nach ihrer Folge anz ſen, die Reihen oder Abtheilungen nach den höchſte tenzen von b gezählt. Hingegen ſind aus den Po des zweyten Polynomium alle Combinationen, die halten, noch beyzufügen. Aus Z^m gehören zu der P z^r alle Combinationen der rten Abtheilung mit den zu Verticalreihe gehörigen Potenzen von a verbunden a^{m-1} an bis zu a^o.

Die Potenzen von a ſind hier eigentlich Combi nen deſſelben wiederholten Elements. So wie i Reihe der Potenzen von a auch a^o aufgenommen wir wird auch hier a^o als Zeichen eines abweſenden Ele a gebraucht, und daher eine Nullion genannt w können.

15. Man kann n — m Dinge aus n Dingen gerade en so oft nehmen als m Dinge aus derselben Anzahl, B. 27 Karten aus 40 so oft als 13 aus 40 Karten.

16. Exempel. I. In dem Hazardspiele, welches otto heißt, werden 90 Nummern in einen Kasten ge- an, und daraus 5 gezogen. Die Binionen, Ternionen, uaternionen heißen hier Amben, Ternen, Quaternen. Aus allen 90 Nummern ist die Anzahl:

π Ambeu $= \frac{90\ 89}{1 \cdot 2} = 4005$

π Ternen $= \frac{90 \cdot 89 \cdot 88}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 117480$

π Quaternen $= \frac{90 \cdot 89 \cdot 88 \cdot 87}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} = 2555190.$

Aus den gezogenen Nummern sind nur 10 Ambeu, o Ternen und fünf Quaternen möglich. Wer eine Am- : besetzt, hofft auf einen Gewinn in einer Lotterie von 005 Loosen, mit 10 Gewinnen; bey einer Terne auf ei- en Gewinn in einer Lotterie von 117480 Loosen mit 10 ewinnen: und bey einer Quaterne auf einen Gewinn in ner Lotterie von 2555185 Nieten gegen 5 Gewinne.

17. Exempel. II. Im Lombre ist die Menge der in n Händen aller drey Spieler zusammen möglichen Spiele

$= \frac{40 \cdot 39 \ldots 28 \ldots 14}{1 \cdot 2 \ldots 13 \ldots 27} = \frac{40 \ldots 28}{1 \ldots 13} =$

2033 22280, weil 27 Karten aus 40 genommen, oder 3 aus 40 zurückgelegt werden.

Die Menge der in einer Hand möglichen Spiele, ist e Menge der Combinationen von 9 Karten aus 40, also

$= \frac{40 \cdot 39 \ldots 32}{1 \cdot 2 \ldots 9} = 273\ 438880.$

Die Menge der in einer Hand möglichen Spiele ohne Spadille und Basta ist die Menge der Combinationen von Karten aus 38, also $= \frac{38 \cdot 37 \ldots 30}{1 \cdot 2 \ldots 9} =$

63 011640.

41. In der beygefügten Tafel haben die Combinationen jeder horizontalen Abtheilung einerley Localsumme, und die in jeder Verticalreihe befindlichen mit den zu oberst stehenden a enthalten m Elemente. Die Tafel liefert, so weit sie reicht, in jeder Verticalreihe die Glieder der Potenz $(a + b + c + d \ldots)^m$, welche die zu oberst stehende Potenz von a zum Factor haben, wenn diese mit den darunter stehenden Producten verbunden wird, wozu noch die Versetzungszahl der Elemente als numerischer Factor oder Coefficient gesetzt werden muß. In jeder horizontalen Abtheilung sind die Factoren zu den vertical darüber stehenden Potenzen von a enthalten, die mit jenen verbunden die Literal-Coefficienten in der Potenz $(a + bz + cz^2 + dz^3 + \text{etc.})^m$, geben, so daß die rte horizontale Antheilung (ohne die Reihe der Potenzen von a) zu der rten Potenz von z gehört. Die Tafel gewährt also eine sehr deutliche Übersicht der Bildung der polynomischen Potenzen.

Die Combinationen jedes Faches werden aus denen in dem darüber zunächst befindlichen derselben Verticalreihe auf folgende Art hergeleitet. Für das letzte Element wird das nächstfolgende gesetzt. Ist das Element, welches vor dem letzten oder vor den letzten unter sich gleichen zunächst vorhergeht, in der Ordnung der Buchstabenzeichen auch das nächst vorhergehende (wie in b^2cd, b^2cd^2, bc^2d^2), so wird damit dieselbe Vertauschung vorgenommen, sonst aber nicht. Alle übrigen Elemente bleiben unvertauscht. Ist das letzte Element wiederholt, so wird die Vertauschung doch nur mit einem einzigen, dem letzten, vorgenommen. Eben so auch, wenn das nächst vorhergehende unterschiedene Element vertauscht wird.

Der Grund dieser Vertauschung ist leicht begreiflich. Durch sie wird, wie es seyn soll, die Localsumme in der Combination um Eins erhöht. Jede Combination, die sich auf ein einfaches oder nicht wiederholtes Element endigt, wird auf diese Art aus einer Combination

mit der nächſt niedrigern Localſumme hervorgebracht, z. B. bcdf aus bcde. Allein die Combinationen, in welchen das letzte Element wiederholt iſt, können nur durch Vertauſchung des nächſt vorhergehenden, von jenen verſchiedenen, Elements entſtehen. So entſteht bce^3 aus $bcde^2$, dieſes aus bcd^2e, und dieſes durch die erſtere Art der Vertauſchung aus bcd^3. Die fernere Folge der vertauſchten Combinationen rückwärts mit abnehmender Localſumme iſt $bccd^2$, bc^3d; bc^4, b^2c^3. bc^3, b^4c; b^5, Es kann daher bey dieſer Herleitung kein Glied in einem Fache fehlen, es müßte dann auch in dem nächſt obern fehlen, alſo auch in dem über dieſem befindlichen; alſo müßte in dem oberſten Fache die Combination der b allein auch nicht vorhanden ſeyn; auf welche doch zuletzt ſich jede Combination bringen läßt.

42. Die Tafel dient auch zu Subſtitutionen für die Potenzen einer vieltheiligen Größe, $bz+cz^2+dz^3+ez^4+fz^5+gz^5+$ etc.; wenn dieſe mit gegebenen Factoren verbunden werden, und daraus eine Größe zuſammengeſetzt wird, da dann diejenigen Glieder, welche in den verſchiedenen Potenzen des Polynomium einerley Potenz von z enthalten, in ein Glied zuſammengefaßt werden. Die Polynomialgröße ſey $=Z$, und es werden alle Glieder verlangt, welche die fünfte Potenz von z enthalten. Aus den Potenzen von z ſind ſie folgende:

Aus Z	fz^5
aus Z^2	$(2be+2cd)z^5$
aus Z^3	$(3b^2d+3bc^2)z^5$
aus z^4	$4b^3c.z^5$
aus Z^5	$b^5.z^5$

Die Verſetzungszahlen ſind den Combinationen beygefügt. Jedes Element kann nämlich aus jedem der gleichen polynomiſchen Factoren genommen werden.

Iſt das Polynomium $Z = a + bz + cz^2 + dz^3 + ez^4 + fz^5 + \text{etc.}$, ſo ſind die Glieder, welche die fünfte Potenz von z enthalten,

aus Z	fz^5
aus Z^2	$(2af + 2be + 2cd)z^5$
aus Z^3	$(3a^2f + 3a(2be + 2cd) + 3bc^2)z^5$
aus Z^4	$(4a^3f + 6a^2(2be + 2cd) + 4a(3b^2d + 3bc^2) + 4b$
aus Z^5	$(5a^4f + 10a^3(2be + 2cd) + 10a^2(3b^2d + 3bc^2) + 5a.4b^3c$
etc.	

In den Potenzen beider Polynomien gehö nigen Combinationen von a, b, c, d, e, etc. ſelben Potenz von z, deren Localſumme nach de

0 1 2 3 4 . . .
a b c d e . . . dem Exponenten der Potenz vo

iſt. Daher ſind aus den Potenzen des erſten $a = o$ iſt, die zu z^r gehörigen Combinationen in dern der rten Horizontalreihe nach ihrer Folge fen, die Reihen oder Abtheilungen nach den höch tenzen von b gezählt. Hingegen ſind aus den des zweyten Polynomium alle Combinationen, halten, noch beyzufügen. Aus Z^m gehören zu de z^r alle Combinationen der rten Abtheilung mit den Verticalreihe gehörigen Potenzen von a verbund a^{m-1} an bis zu a^o.

Die Potenzen von a ſind hier eigentlich Con nen deſſelben wiederholten Elements. So wi Reihe der Potenzen von a auch a^o aufgenommen wird auch hier a^o als Zeichen eines abweſenden a gebraucht, und daher eine Nullion genann können.

V. Relationen der Combinationen und der Summen der Potenzen von den combinirten Größen.

43. Satz. Es sey die Summe der Unionen, $a+b+c+d+e+$ etc. $=A$; die Summe der Binionen $=B$; der Ternionen $=C$; der Quaternionen $=D$; der Quinionen $=E$; der Senionen $=F$: u. s. f. alle ohne Wiederholungen. Ferner sey die Summe der a, b, c, d, etc. als Potenzen vom ersten Grade betrachtet, $=P$; ihrer Quadrate $=Q$; ihrer Cuborum $=R$; ihrer Biquadrate $=S$; ihrer fünften Potenzen $=T$ u. s. f. so ist

$$P=A$$
$$Q=AP-2B$$
$$R=AQ-BP+3C$$
$$S=AR-BQ+CP-4D$$
$$T=AS-BR+CQ-DP+5E$$
$$V=AT-BS+CR-DQ+EP-6F$$

etc. etc.

Bew. Man bezeichne die Summe der Combinationen einer gewissen Gattung durch das vorgesetzte Zeichen f. als $f.a^2$ die Summe aller Quadrate von den Größen a, b, c, etc.; $f.a^2b$ die Summe aller Combinationen von der Form a^2b; $f.abcd$ die Summe aller Quaternionen ohne Wiederholung, u. s. w. Erstlich ist $(a+b+c\ldots)(a+b+c\ldots)=f.a^2+2f.ab$, das ist, in den Zeichen des Satzes, $AP=Q+2B$, also $Q=AP-2B$.

Zweytens,

$(a+b+c\ldots)(a^2+b^2+c^2\ldots)=f.a^3+f.a^2b$, und $(ab+ac+bc\ldots)(a+b+c\ldots)=f.a^2b+3f.abc$. Der numerische Factor 3 ist der Summe, f. abc, vorgesetzt, weil eine Binion und eine Union aus den drey

Größen, a, b, c, jede auf dreyerley Art genommen werden können, nämlich abc, acb, bca. Aus den Gleichungen ergiebt sich

$$AQ - BP = R - 3C, \text{ und}$$
$$R = AQ - BP + 3C.$$

Drittens,

$(a + b + c...)(a^3 + b^3 + c^3...) = f.a^4 + f.a^3$

$(ab + ac + bc...)(a^2 + b^2 + c^2,..) = f.a^3b + f.a$

auch $(abc + abd + bcd.., (a + b + c...) = f.$

$+ 4 f.abcd$, wo der Factor 4 der Summe aller ternionen, wie abcd, vorgesetzt ist, weil eine T und eine Union aus 4 Größen auf viererley Arten g men werden können. Aus den drey Gleichungen z mengenommen folgt

$$AR - BQ + CP = S + 4D, \text{ und}$$
$$S = AR - BQ + CP - 4D.$$

Viertens,

$(a + b + c...)(a^4 + b^4 + c^4...) = f.a^5 +$

$(ab + ac + bc...)(a^3 + b^3 + c^3...) = f.a^4b + f$

$(abc + abd + bcd...)(a^2 + b^2 + c^2...) = f.$

$+ f.a^3$

$(abcd + bcde...)(a + b + c...) = f.a^2b$

$5 f.abcde$. Diese vier Gleichungen vereinigt geben Gleichung

$$AS - BR + CQ - DP = T - 5E, \text{ und}$$
$$T = AS - BR + CQ - DP + 5E.$$

Aus den Beweisen dieser vier Formeln erhellt allgemein,

$$f.a^{m-3} = f.a \times f.a^{m-1} - f.ab \times f.a^{m-2} + f.abc$$
$$- f.abcd \times f.a^{m-4} \ldots\ldots \pm m f.abcd.$$

wo in der letzten Combination m Factoren zu nehmen sind, und das obere Vorzeichen für ein ungerades m gilt.

44. Der Gang des Beweises zeigt, daß unter den Größen a, b, c, d, etc. auch subtractive vorhanden seyn können. Die Combinationen, welche eine ungerade Anzahl negativer Factoren enthalten, sind subtractiv.

45. Da in jeder Gleichung, $x^m - \alpha x^{m-1} + \beta x^{m-2} - \gamma x^{m-3} + \delta x^{m-4} \ldots \pm k = 0$, der Coefficient α die Summe der Wurzeln; β die Summe der Producte je zweyer; γ die Summe der Producte je dreyer, u. s. f. ist, so hat der Satz seine Anwendung in der Theorie der Gleichungen.

46. Die gefundenen Formeln für die Summen der Potenzen sind abhängige, indem in den Werth jeder Summe die vorhergehenden alle hineinkommen. Setzt man in jeder nach der Reihe die Werthe aus den vorhergehenden Formeln, so erhält man die unabhängigen Werthe. Doch wird dieses Verfahren in der Fortsetzung mühsam, und führt nicht leicht auf das Gesetz der Formation. In dem Artikel, combinatorische Analysis, (54.) sind die unabhängigen Werthe der Summen der Potenzen auf eine leichte Art aus gewissen combinatorischen Formeln mit Hülfe eines Satzes aus der Lehre von den Logarithmen hergeleitet.

47. In dem Artikel, Algebra, ist angeführt, daß Albert Girard in dem Buche, Invention nouvelle en l'Algebre etc. 1629, die unabhängigen Formeln für die Summen der Potenzen vorgetragen hat, jedoch ohne Beweis. Die abhängigen Formeln hat Newton in seiner Arithm. univers. p. 192. (edit. s'Gravef.) auch ohne Beweis angeführt, und sie benutzt, eine Gränze der größten Wurzel zu finden. Die Vorzeichen sind daselbst alle einerley, weil die Combinationen von einer ungeraden Anzahl Elemente negativ genommen sind. Man nennt die Formeln auch den Newtonischen Lehrsatz von dem Verhalten der Coefficienten in einer Gleichung zu den

Summen der Potenzen ihrer Wurzeln. Die abhängigen Formeln mag man so nennen; doch muß man dabey des alten Girard, als ursprünglichen Erfinders, nicht vergessen. Joh. Bernoulli gebraucht den Satz, welchen er elegantissimum theorema Newtonianum nennt, um die geraden Potenzen der Brüche $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{5}$, etc. in infin. zu summiren, und sagt, daß er einen Beweis des Satzes gefunden habe, den er aber nirgends mittheilt. (Joh. Bernoulli Opp. T. IV. n. 152.) Euler giebt in der Introd. in Anal. Inf. T. I. §. 166. die Formeln, so wie sie hier in dem Satze aufgestellt sind, und setzt hinzu, daß man sich von ihrer Richtigkeit leicht würde versichern können, daß aber in der Differentialrechnung der Satz in völliger Strenge würde dargethan werden. In seinen Institt. calc. diff. ist das nicht geschehen. Er hat aber zwey Beweise des Satzes in dem zweyten Bande der Opusculorum, p. 108 — 120. mitgetheilt, der auch den Titel hat: Conjectura physica circa propagationem soni ac luminis, cet. Berolini 1750. Der erstere wird durch die Differentialrechnung geführt, der andere wird aus einem Lehrsatze über die algebraischen Gleichungen hergeleitet. In den Comment. novis Petrop. T. XV hat Euler für die unabhängigen Formeln ein Gesetz ihrer Formation gezeigt, doch nur durch Induction. Bärmann hat im J. 1745 einen etwas verwickelten Beweis des Satzes geliefert in einem Programm: Demonstratio theorematis algebraici. Dieser veranlaßte Kästnern einen leichtern zu suchen, den er 1758 der Götting. Societät mittheilte. S. dessen Dissertt. mathem. et physicae, und seine Analysis endlicher Größen, S. 450. An jenem Orte zeigt er an, daß Landen in seinen Mathematical Lucubrations, London 1755. P. V. einen Beweis durch die Rechnung des Unendlichen geführt habe. In Tempelhofs Analysis endlicher Größen, Berlin 1769, §. 643 f. ist der Beweis aus algebraischen Gründen, verschieden von dem Eulerischen, geführt. Der Beweis, den la Grange in einer Abhandlung über die Gleichungen, Mem. de Berlin, pour 1768. p. 252.

$= n - 3$; und die Anzahl ihrer Combinationen $= 2^{n-3} - 1$ nach (18.). Das Product dieser Zahl in die Anzahl der Combinationen aus a, b, c giebt die Anzahl der Combinationen, worin Elemente aus beiden Abtheilungen, der a, b, c, und der übrigen, d, e, f, etc. vorkommen. Dazu nehme man die Combinationen aus a, b, c allein, so ist die gesuchte Anzahl aller Combinationen aus a, a, a, a, b, b, b, c, c, d, e, f, etc.

$= 2^{n-3} - 1 + 59(2^{n-3} - 1) + 59 = 60 \times 2^{n-3} - 1.$

30. Exempel. Die Anzahl der verschiedenen Factoren der Zahl $831600 = 2.2.2.2.3.3.5.5.7.11$. zu finden. Hier ist $n = 5$, also die Anzahl der verschiedenen Factoren, die Zahl selbst und die Einheit ausgeschlossen, $= 60 \times 4 - 1 = 239$.

Die Anzahl aller Combinationen aus den Elementen, a, a, a, a, a,; b, b, b, b; c, c, c; d, d ist die Summe der Unionen, Binionen, Ternionen und der Quaternion aus den Zahlen 5, 4, 3, 2, d. i. die Summe $14 + 71 + 154 + 120 = 359$. Die Anzahl der übrigen von einander durchgehends verschiedenen Elemente sey $n - 14$, so ist die Anzahl aller Combinationen $= 359 + 2^{n-14} - 1 + 359(2^{n-14} - 1) = 360 \times 2^{n-14}$.

III. Aufstellung aller einzelnen Combinationen mit und ohne Wiederholungen jeder Classe aus einer gegebenen Anzahl von Elementen.

31. Die Anzahl der Elemente, aus welchen die Combinationen gemacht werden, sey $= n$; die Elemente seyn a, b, c, d, etc. Die Classe der Binionen mit Wiederholungen desselben Elements, aber ohne Versetzungen, wird erhalten, wenn jeder Union erstlich das Element a; darauf der Union b und allen folgenden das Element b; ferner der Union c und allen folgenden das Element c, u. s. f. vorgesetzt wird. Die Classe der Ternionen, wenn die einzelnen Elemente a, b, c, d, etc. successiv denjenigen Binionen vorgesetzt werden, die sich mit dem vorzusetzen-

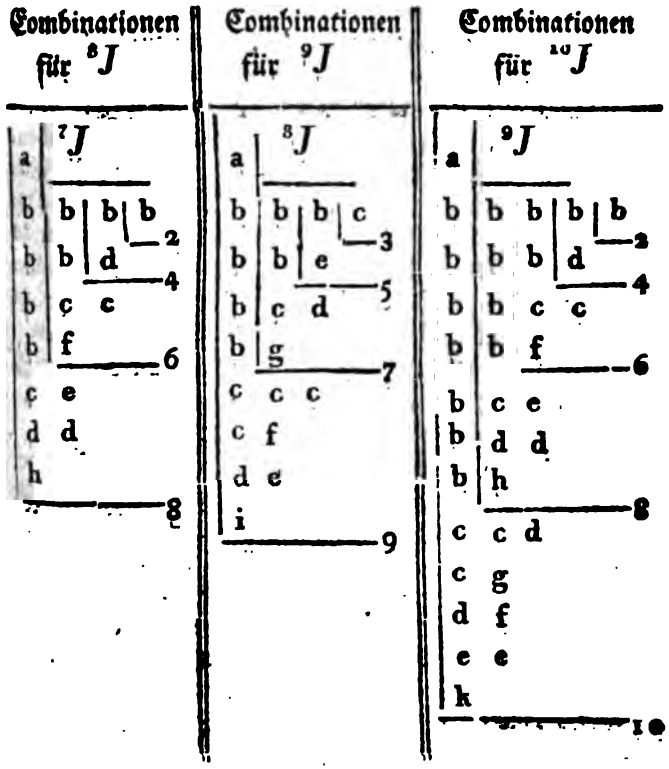
gänge vorkommen, weil diese nur Versetzungen schon gefundener Combinationen sind.

Nach der zweyten Methode setze man zuerst das erste Element a, und sondere es durch einen Winkelhaken ab. Man setze a vor, und vertausche das a in dem Winkelhaken mit dem nächsten Elemente b, welches unter das vorgesetzte a geschrieben wird. Diese Combinationen sondere man durch den Winkelhaken 2, 2 ab. Sie geben die Localsumme = 2. Weiter setze man den gefundenen Combinationen das Element a vor, vertausche in denselben das erste Element linker Hand mit dem nächstfolgenden, und setze die daraus entstehenden Combinationen mit Auslassung derer, die Rückgänge enthalten, zu dem mit a anfangenden. Alle in dem Winkelhaken 3,3 eingeschlossenen Combinationen geben die Localsumme = 3. Auf diese Art verfahre man überhaupt, erstlich, daß man den Combinationen von der Summe m — 1 das Element a vorsetze, und daß man in denselben das erste Element linker Hand mit dem nächstfolgenden vertausche, und alle so erhaltene Combinationen, die keine Rückgänge enthalten, zu jenen mit a anfangenden in denselben Winkelhaken setze, wodurch dieser alle Combinationen mit der Localsumme m liefert.

Setzte man in den obigen Combinationen nach Classen, statt der Buchstaben die zugehörigen Zahlen nach dem Zeiger (37.) so würden alle Combinationen, von der ersten g = 7, an bis zur letzten aaaaaaa = 1111111, arithmographisch (so wie die Buchstaben in der zweyten Darstellung lexikographisch) fortgehen und auf einander folgen. Auch in der arithmographischen Fortschreitung der ersten Darstellung befolgen die Combinationen, aber nur in den einzelnen Classen, die lexikographische Ordnung.

39. Die zweyte sehr sinnreiche Darstellung, so wie die combinatorischen Regeln und Verfahren für beyde, sind von Hindenburg angegeben, (Archiv der Mathem. IV. Heft. 392. S. und erste Samml. combin. Abhan[illegible]

S. 183.). Die zweyte Darſtellung iſt **involutoriſch**, d. h. ſie liefert mit den Combinationen von der Localſumme m zugleich alle von jeder niedrigern Summe. Sie ſtellt alſo die Geneſis der Combinationen ſehr ſinnlich und leicht dar; welches auf ähnliche Art auch bey den einzelnen Claſſen der erſten Darſtellung geſchehen kann, die ſich auch involutoriſch anordnen laſſen (Erſte Samml. a. A. S. 187.) Eine ſolche Darſtellung gewährt daher auch den Vortheil, daß man ſie leicht fortſetzen und für jede höhere Localſumme die Aufſtellung der niedrigern benutzen kann. Z. B. die Combinationen für die Localſumme 7 ſeyn zuſammen ^{7}J; für die Localſumme 8 ſey ſie ^{8}J, u. ſ. f. ſo ſind die



Die Combinationen, welche hier zu denen, die a enthalten, hinzukommen, sind nach einem ähnlichen Gesetze, wie das in (38.) für die lexikographische Folge, aus den Elementen b, c, d, e, f, g, etc. zu den Local-Summen, 2, 4, 6, 8, etc. oder 3, 5, 7, 9, etc. gebildet. Den gefundenen Combinationen von einerley Localsumme wird das Element b vorgesetzt, und zweytens wird in denselben jedes der beiden ersten Elemente mit dem nächst folgenden vertauscht, und wo nur ein einziges vorhanden ist, das zweyte folgende dafür genommen, wobey alle diejenigen Combinationen bey Seite gesetzt werden, in welchen ein Rückgang der Buchstaben vorhanden ist. Diese Anwendung des obigen Gesetzes bemerklich zu machen, sind die Combinationen von gleichen Localsummen durch Winkelhaken abgesondert. Es kann nach diesem Verfahren keine Combination ausgelassen werden. Wenn eine in dem letzten Winkelhaken fehlte, so müßte auch eine in dem nächst vorher gehenden fehlen, daher auch eine in dem vor diesem vorher gehenden, u. s. f. bis zu dem letzten oder vorletzten von oben.

Die auf diese Art aus allen Combinationen der Elemente a, b, c, d, etc. ausgesonderten machen eine combinatorische Involution mit dem Exponenten m aus, wenn die höchste Localsumme = m ist. Werden diese Combinationen auf jede mögliche Art versetzt, so entsteht eine Involution der Variationen mit dem Exponenten m.

V. Abtheilung der Combinationen nach den Localsummen, und Anordnung nach den Wiederholungs-Exponenten eines der Elemente.

40. Es sind wiederum n Elemente, a, b, c, d, e, etc. gegeben, von welchen je m genommen werden. Die Stelle des ersten werde durch o bezeichnet, so daß der Zeiger ist

o 1 2 3 4 5 6 7 8 . .
a b c d e f g h i . .

Bey der Bestimmung der Localsumme für eine Combination wird a nicht mit gerechnet. Die Abtheilungen werden nach der Folge der Localsummen gemacht, und die Combinationen werden nach dem Wiederholungs-Exponenten von a geordnet, von dem größten angefangen.

Tafel der Combinat. in den Potenzen eines Polynomium

a^m	a^{m-1}	a^{m-2}	a^{m-3}	a^{m-4}	a^{m-5}	a^{m-6}	a^{m-7}	a^{m-8}	a^{m-9}	a^{m-10}
	b									
	c	b^2								
	d	bc	b^3							
	e	$b\,d$ c^2	b^2c	b^4						
	f	$b\,e$ $c\,d$	b^2d bc^2	b^3c	b^5					
	g	$b\,f$ $c\,e$ d^2	b^2e $b\,c\,d$ c^3	b^3d b^2c^2	b^3c	b^5				
	h	$b\,g$ $c\,f$ $d\,e$	b^2f $b\,c\,e$ $b\,d^2$ c^2d	b^3e b^2cd bc^3	b^4d b^3c^2	b^5c	b^7			
	i	$b\,h$ $c\,g$ $d\,f$ e^2	b^2g $b\,c\,f$ $b\,d\,e$ c^2e $c\,d^2$	b^3f b^2ce b^2d^2 $b\,c^2d$ c^4	b^4e b^3cd b^2c^3	b^5d b^4c^2	b^6c	b^8		
	k	$b\,i$ $c\,h$ $d\,g$ $e\,f$	b^2h $b\,c\,g$ $b\,d\,f$ $b\,e^2$ c^2f $c\,d\,e$ d^3	b^3g b^2cf b^2de bc^2e $b\,c\,d^2$ c^3d	b^4f b^3ce b^3d^2 b^2c^2d bc^4	b^5e b^4cd b^3c^3	b^6d b^5c^2	b^7c	b^9	
	l	$b\,k$	b^2i	$b\,h^3$	b^4g	b^5f	b^5e	b^7d	b^8c	b^{10}

etc. etc.

41. In der beygefügten Tafel haben die Combinationen jeder horizontalen Abtheilung einerley Localsumme, und die in jeder Verticalreihe befindlichen mit den zu oberst stehenden a enthalten m Elemente. Die Tafel liefert, so weit sie reicht, in jeder Verticalreihe die Glieder der Potenz $(a + b + c + d \ldots)^m$, welche die zu oberst stehende Potenz von a zum Factor haben, wenn diese mit den darunter stehenden Producten verbunden wird, wozu noch die Versetzungszahl der Elemente als numerischer Factor oder Coefficient gesetzt werden muß. In jeder horizontalen Abtheilung sind die Factoren zu den vertical darüber stehenden Potenzen von a enthalten, die mit jenen verbunden die Literal-Coefficienten in der Potenz $(a + bz + cz^2 + dz^3 + \text{etc.})^m$, geben, so daß die rte horizontale Antheilung (ohne die Reihe der Potenzen von a) zu der rten Potenz von z gehört. Die Tafel gewährt also eine sehr deutliche Übersicht der Bildung der polynomischen Potenzen.

Die Combinationen jedes Faches werden aus denen in dem darüber zunächst befindlichen derselben Verticalreihe auf folgende Art hergeleitet. Für das letzte Element wird das nächst folgende gesetzt. Ist das Element, welches vor dem letzten oder vor den letzten unter sich gleichen zunächst vorhergeht, in der Ordnung der Buchstabenzeichen auch das nächst vorhergehende (wie in b^2cd, b^2cd^2, bc^2d^2), so wird damit dieselbe Vertauschung vorgenommen, sonst aber nicht. Alle übrigen Elemente bleiben unvertauscht. Ist das letzte Element wiederholt, so wird die Vertauschung doch nur mit einem einzigen, dem letzten, vorgenommen. Eben so auch, wenn das nächst vorhergehende unterschiedene Element vertauscht wird.

Der Grund dieser Vertauschung ist leicht begreiflich. Durch sie wird, wie es seyn soll, die Localsumme in der Combination um Eins erhöht. Jede Combination, die sich auf ein einfaches oder nicht wiederholtes Element endigt, wird auf diese Art aus einer Combination

der nächst niedrigern Localsumme hervorgebracht, z. bcdf aus bcde. Allein die Combinationen, in den das letzte Element wiederholt ist, können nur Vertauschung des nächst vorhergehenden, von jenen diedenen, Elements entstehen. So entsteht bce^3 $bcde^2$, dieses aus bcd^2e, und dieses durch die er Art der Vertauschung aus bcd^3. Die fernere Folge ertauschten Combinationen rückwärts mit abnehmen Localsumme ist $bccd^2$, bc^3d; bc^4, b^2c^3. bc^2, ; b^5, Es kann daher bey dieser Herleitung kein Glied nem Fache fehlen, es müßte dann auch in dem nächst n fehlen, also auch in dem über diesem befindlichen; müßte in dem obersten Fache die Combination der b r auch nicht vorhanden seyn, auf welche doch zuletzt jede Combination bringen läßt.

42. Die Tafel dient auch zu Substitutionen für die enzen einer vieltheiligen Größe, $bz+cz^2+dz^3$ $z^4+fz^5+gz^5+$ etc., wenn diese mit gegebenen oren verbunden werden, und daraus eine Größe zu neugesetzt wird, da dann diejenigen Glieder, welche en verschiedenen Potenzen des Polynomium einerley enz von z enthalten, in ein Glied zusammengefaßt den. Die Polynomialgröße sey $=Z$, und es werden Glieder verlangt, welche die fünfte Potenz von z ent en. Aus den Potenzen von z sind sie folgende:

Aus Z	fz^5
aus Z^2	$(2be+2cd)z^5$
aus Z^3	$(3b^2d+3bc^2)z^5$
aus z^4	$4b^3c.z^5$
aus Z^5	$b^5.z^5$

Versetzungszahlen sind bey Combinationen beyge Jedes Element kann nämlich aus jedem der glei polynomischen Factoren genommen werden.

Iſt das Polynomium $Z = a + bz + c$
$+ ez^4 + fz^5 +$ etc., ſo ſind die Glieder,
fünfte Potenz von z enthalten.

aus Z	fz^5
aus Z^2	$(2af + 2be + 2cd)z^5$
aus Z^3	$(3a^2f + 3a(2be + 2cd) + 3bc^2)z^5$
aus Z^4	$(4a^3f + 6a^2(2be + 2cd) + 4a3b^2d + 3bc^2) + 4$
aus Z^5	$(5a^4f + 10a^3(2be + 2cd) + 10a^2(3b^2d + 3bc^2) + 5a.4b^5$
etc.	

In den Potenzen beider Polynomien geh
nigen Combinationen von a, b, c, d, e, etc
ſelben Potenz von z, deren Localſumme nach d

0 1 2 4 . . .
a b c d e . . . dem Exponenten der Potenz v
iſt. Daher ſind aus den Potenzen des erſter
$a = o$ iſt, die zu z^r gehörigen Combinationen i
ſern der rten Horizontalreihe nach ihrer Folge
fen, die Reihen oder Abtheilungen nach den höc
tenzen von b gezählt. Hingegen ſind aus den
des zweyten Polynomium alle Combinationen,
halten, noch beyzufügen. Aus Z^m gehören zu d
z^r alle Combinationen der rten Abtheilung mit de
Verticalreihe gehörigen Potenzen von a verbun
a^{m-1} an bis zu a^o.

Die Potenzen von a ſind hier eigentlich Co
nen deſſelben wiederholten Elements. So w
Reihe der Potenzen von a auch a^o aufgenommen
wird auch hier a^o als Zeichen eines abweſenden
a gebraucht, und daher eine Nullion genann
können.

f. Relationen der Combinationen und der Summen der Potenzen von den combinirten Größen.

43. Satz. Es sey die Summe der Unionen, $a+b+c+d+e+$ etc. $=A$; die Summe der Binionen $=B$; der Ternionen $=C$; der Quaternionen $=D$; der Quinionen $=E$; der Senionen $=F$: u. s. f. alle ohne Wiederholungen. Ferner sey die Summe der a, b, c, d, etc. als Potenzen vom ersten Grade betrachtet, $=P$; ihrer Quadrate $=Q$; ihrer Cuborum $=R$; ihrer Biquadrate $=S$; ihrer fünften Potenzen $=T$ u. s. f. so ist

$$P=A$$
$$Q=AP-2B$$
$$R=AQ-BP+3C$$
$$S=AR-BQ+CP-4D$$
$$T=AS-BR+CQ-DP+5E$$
$$V=AT-BS+CR-DQ+EP-6F$$

etc. etc.

Bew. Man bezeichne die Summe der Combinationen einer gewissen Gattung durch das vorgesetzte Zeichen f. als $f.a^2$ die Summe aller Quadrate von den Größen a, b. c, etc.; $f.a^2b$ die Summe aller Combinationen von der Form a^2b; $f.abcd$ die Summe aller Quaternionen ohne Wiederholung, u. s. w. Erstlich ist

$(a+b+c\ldots)(a+b+c\ldots)=f.a^2+2f.ab$,

das ist, in den Zeichen des Satzes, $AP=Q+2B$, also $Q=AP-2B$.

Zweytens,

$(a+b+c\ldots)(a^2+b^2+c^2\ldots)=f.a^3+f.a^2b$,

und $(ab+ac+bc\ldots)(a+b+c\ldots)=f.a^2b+3f.abc$. Der numerische Factor 3 ist der Summe, f. a b c, vorgesetzt, weil eine Binion und eine Union aus den drey

Größen, a, b, c, jede auf dreyerley Art genommen den können, nämlich abc, acb, bca. Aus den den Gleichungen ergiebt sich

$$AQ - BP = R - 3C, \text{ und}$$
$$R = AQ - BP + 3C.$$

Drittens,

$(a + b + c...)(a^3 + b^3 + c^3...) = f.a^4 + f.a^3 b$

$(ab + ac + bc...)(a^2 + b^2 + c^2,..) = f.a^3 b + f.a^2$

auch $(abc + abd + bcd.., (a + b + c...) = f.a$

$+ 4 f.abcd$, wo der Factor 4 der Summe aller ternionen, wie abcd, vorgesetzt ist, weil eine Te und eine Union aus 4 Größen auf viererley Arten ge men werden können. Aus den drey Gleichungen zu mengenommen folgt

$$AR - BQ + CP = S + 4D, \text{ und}$$
$$S = AR - BQ + CP - 4D.$$

Viertens,

$(a + b + c...)(a^4 + b^4 + c^4...) = f.a^5 +$

$(ab + ac + bc...)(a^3 + b^3 + c^3...) = f.a^4 b + f.$

$(abc + abd + bcd...)(a^2 + b^2 + c^2...) = f.$

$+ f.a^2$

$(abcd + bcde...)(a + b + c...) = f.a^2 bc$

$5 f.abcde$. Diese vier Gleichungen vereinigt geb Gleichung

$$AS - BR + CQ - DP = T - 5E, \text{ und}$$
$$T = AS - BR + CQ - DP + 5E.$$

Aus den Beweisen dieser vier Formeln erhellt, allgemein,

$f.a^{m-3} = f.a \times f.a^{m-1} - f.ab \times f.a^{m-2} + f.abc$

$- f.abcd \times f.a^{m-4} \ldots\ldots \pm m f.abcd.$

wo in der letzten Combination m Factoren zu nehmen sind, und das obere Vorzeichen für ein ungerades m gilt.

44. Der Gang des Beweises zeigt, daß unter den Größen a, b, c, d, etc. auch subtractive vorhanden seyn können. Die Combinationen, welche eine ungerade Anzahl negativer Factoren enthalten, sind subtractiv.

45. Da in jeder Gleichung, $x^m - \alpha x^{m-1} + \beta x^{m-2} - \gamma x^{m-3} + \delta x^{m-4} \ldots \pm k = 0$, der Coefficient α die Summe der Wurzeln; β die Summe der Producte je zweyer; γ die Summe der Producte je dreyer, u. s. f. ist, so hat der Satz seine Anwendung in der Theorie der Gleichungen.

46. Die gefundenen Formeln für die Summen der Potenzen sind abhängige, indem in den Werth jeder Summe die vorhergehenden alle hineinkommen. Setzt man in jeder nach der Reihe die Werthe aus den vorhergehenden Formeln, so erhält man die unabhängigen Werthe. Doch wird dieses Verfahren in der Fortsetzung mühsam, und führt nicht leicht auf das Gesetz der Formation. In dem Artikel, combinatorische Analysis, (54.) sind die unabhängigen Werthe der Summen der Potenzen auf eine leichte Art aus gewissen combinatorischen Formeln mit Hülfe eines Satzes aus der Lehre von den Logarithmen hergeleitet.

47. In dem Artikel, Algebra, ist angeführt, daß Albert Girard in dem Buche, Invention nouvelle en l'Algebre etc. 1629, die unabhängigen Formeln für die Summen der Potenzen vorgetragen hat, jedoch ohne Beweis. Die abhängigen Formeln hat Newton in seiner Arithm. univers. p. 192. (edit. s'Gravef.) auch ohne Beweis angeführt, und sie benutzt, eine Gränze der größten Wurzel zu finden. Die Vorzeichen sind daselbst alle einerley, weil die Combinationen von einer ungeraden Anzahl Elemente negativ genommen sind. Man nennt die Formeln auch den Newtonischen Lehrsatz von dem Verhalten der Coefficienten in einer Gleichung zu den

Summen der Potenzen ihrer Wurzeln. Die abhängig
Formeln mag man so nennen; doch muß man dabey d
alten Girard, als ursprünglichen Erfinders, nicht verg
sen. Joh. Bernoulli gebraucht den Satz, welchen
elegantissimum theorema Newtonianum nennt, u
die geraden Potenzen der Brüche $\frac{1}{1}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, etc. :
infin. zu summiren, und sagt, daß er einen Beweis d
Satzes gefunden habe, den er aber nirgends mittheil
(Joh. Bernoulli Opp. T. IV. n. 158.) Euler gie
in der Introd. in Anal. Inf. T. I. §. 166. die Formel
so wie sie hier in dem Satze aufgestellt sind, und setzt hi
zu, daß man sich von ihrer Richtigkeit leicht würde ve
sichern können, daß aber in der Differentialrechnung d
Satz in völliger Strenge würde dargethan werden. S
seinen Institt. calc. diff. ist das nicht geschehen. Er h
aber zwey Beweise des Satzes in dem zweyten Bande d
Opusculorum, p. 108 — 120. mitgetheilt, der au
den Titel hat: Conjectura physica circa propagati
nem soni ac luminis, cet. Berolini 1750. Der erste
wird durch die Differentialrechnung geführt, der ande
wird aus einem Lehrsatze über die algebraischen Gleichung
hergeleitet. In den Comment. novis Petrop. T. X
hat Euler für die unabhängigen Formeln ein Gesetz ihr
Formation gezeigt, doch nur durch Induction. Bä
mann hat im J. 1745 einen etwas verwickelten Beweis d
Satzes geliefert in einem Programm: Demonstrati
theorematis algebraici. Dieser veranlaßte Kästner
einen leichtern zu suchen, den er 1758 der Götting. Sc
cietät mittheilte. S. dessen Dissertt. mathem. et phy
sicae, und seine Analysis endlicher Größen, S. 45
An jenem Orte zeigt er an, daß Landen in seinen Ma
thematical Lucubrations, London 1755. P. V
einen Beweis durch die Rechnung des Unendlichen geführ
habe. In Tempelhofs Analysis endlicher Größer
Berlin 1769, §. 643 f. ist der Beweis aus algebraische
Gründen, verschieden von dem Eulerischen, geführt. De
Beweis, den la Grange in einer Abhandlung über di
Gleichungen, Mem. de Berlin, pour 1768. p. 252

(Michelsens Sammlung betitelt, Theorie der Gleichungen, S. 191.) gegeben hat, bezieht sich zunächst auf die reciproken Wurzeln einer Gleichung. Er kommt mit dem vorher angeführten ersten Eulerischen im Wesentlichen überein. Arbogast hat in dem Calcul des derivations, 1800, nach seiner Methode, die sich auf den Taylorschen Lehrsatz gründet, einen sehr bequemen Weg zur Herleitung beiderley Formen des Lehrsatzes genommen. S. combinatorische Analysis, 54. 55.

Der Satz gehört nicht der Algebra, sondern der Combinationslehre zu, aus welcher man die eine Form desselben mit der kläresten Einsicht herleiten kann, woraus sich auch die zweyte und ihr Gesetz, durch Induction, herleiten läßt.

48. Satz. Es sey wiederum die Summe der Unionen $= A$; der Binionen $= B$; der Ternionen $= C$; u. s. f. ohne Wiederholungen. Nun nehme man die Quadrate der Combinationen jeder Gattung zusammen, und setze

$$P = a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + \text{etc.}$$

$$Q = a^2 b^2 + a^2 c^2 + a^2 d^2 + b^2 c^2 + \text{etc.}$$

$$R = a^2 b^2 c^2 + a^2 b^2 d^2 + a^2 b^2 e^2 + a^2 c^2 d^2 + \text{etc.}$$

$$S = a^2 b^2 c^2 d^2 + a^2 b^2 c^2 e^2 + a^2 b^2 d^2 e^2 + \text{etc.}$$

u. s. w.

so ist

$$P = AA - 2B$$

$$Q = BB - 2AC + 2D$$

$$R = CC - 2BD + 2AE - 2F$$

$$S = DD - 2CE + 2BF - 2AG + 2H$$

u. s. w.

Bey dem Beweise dieser Formeln kommt es [illegible] lich darauf an, die numerischen Coefficienten [illegible]

nationen, die durch die Multiplication zweyer Reihen v
Combinationen entstehen, zu bestimmen. Dazu dient t
folgende Bemerkung.

Wenn eine Reihe A von Combinationen der Elemer
a, b, c, d, etc. deren Exponent α ist, in eine Reihe
von Combinationen derselben Elemente, deren Exponent
ist, multiplicirt wird, so entstehen dadurch, wenn α kl
ner als β gesetzt wird, $\alpha + 1$ Formen von Partialpr
ducten, weil der Factor aus der Reihe A entweder α, od
$\alpha - 1$, oder $\alpha - 2$ ..., oder zwey, oder eines, od
gar keine Elemente mit dem Factor aus der Reihe
übereinstimmig hat. Die Anzahl der übereinstimmig
Factoren sey $= \gamma$, welche auch $= 0$ seyn kann, so enth
das Product γ Paare gleicher Factoren, und dal
$\alpha + \beta - 2\gamma$ verschiedene. Von den letztern gehör
$\alpha - \gamma$ dem Factor aus der Reihe A, und $\beta - \gamma$ dem F
tor aus der Reihe B zu. Nun suche man, wie oft
$\alpha - \gamma$ Elemente oder (welches auf eins hinaus komm
wie oft sich $\beta - \gamma$ aus $\alpha + \beta - 2\gamma$ Elementen nehm
lassen, so hat man die Anzahl der Producte von derselb
Form und mit denselben Elementen. Mit dieser Z
muß die Summe aller verschiedenen Combinationen der
ben Form multiplicirt werden.

Z. B. Wenn die Reihe der Ternionen in die Re
ber Quinionen multiplicirt wird, so nehme man aus d
Totalproducte das Partialproduct a^2b^2cdef heral
Hier ist $\alpha = 3$; $\beta = 5$; $\gamma = 2$, und $\alpha - \gamma = 1$, a
$\alpha + \beta - 2\gamma = 4$. Nun lassen sich 1 oder 3 Eleme
aus 4 Elementen nehmen 4 mahl; das ist, man kann
Product derselben Elemente a, b, c, d, e, f nach je
Form aus den Ternionen und Quinionen 4 mahl mach
nämlich aus abc in abdef, aus abd in abcef,
abe in abcdf, und aus abf in abcde.

Dieses wohl verstanden, hat die Multiplication zwe
Reihen von Combinationen keine Schwierigkeit. Die e
Formel ist dieselbe mit der ersten in (43.).

Die zweyte Formel wird folgendergestalt gefunden. Es ist

I. $(ab + ac + bc\ldots)(ab + ac + bc\ldots) = \int a^2b^2 + 2\int a^2bc + 6\int abcd$. Diese sind alle hier möglichen Formen mit den Zahlen, die anzeigen, wie oft sie Statt finden. Ferner ist II. $(a+b+c\ldots)(abc+abd+bcd\ldots) = \int a^2bc + 4\int abcd$. Aus beiden Gleichungen folgt

$$B^2 - 2AC = Q - 2D, \text{ also}$$
$$Q = B^2 - 2AC + 2D.$$

Die dritte Formel entsteht folgendergestalt. Es ist

I. $(abc+abd\ldots)(abc+abd\ldots) = \int a^2b^2c^2 + 2\int a^2b^2cd + 6\int a^2bcde + 20\int abcdef$.

II. $(ab + ac\ldots)(abcd + \ldots) = \int a^2b^2cd + 4\int a^2bcde + 15\int abcdef$.

III. $(a+b+c\ldots)(abcde+\ldots) = \int a^2bcde + 6\int abcdef$. Aus diesen drey Gleichungen folgt

$$C^2 - 2BD + 2AE = R + 2F,$$

das ist

$$R = C^2 - 2BD + 2AE - 2F.$$

Die vierte Formel ergiebt sich auf ähnliche Art: Es ist

I. $(abcd+\ldots)(abcd+\ldots) = \int a^2b^2c^2d^2 + 2\int a^2b^2c^2de + 6\int a^2b^2cdef + 20\int a^2bcdefg + 70\int abcdefgh$.

II. $(abc+\ldots)(abcde+\ldots) = \int a^2b^2c^2de + 4\int a^2b^2cdef + 15\int a^2bcdefg + 56\int abcdefgh$.

III. $(ab+\ldots)(abcdef+\ldots) = \int a^2b^2cdef + 6\int a^2bcdefg + 28\int abcdefgh$.

IV. $(a+b+\ldots)(abcdefg+\ldots) = \int a^2bcdefg + 8\int abcdefgh$.

Aus diesen vier Gleichungen folgt

$$D^2 - 2CE + 2BF - 2AG = S - 2H, \text{ also}$$
$$S = D^2 - 2CE + 2BF - 2AG + 2H.$$

Die Gleichförmigkeit in der Entwickelung der Producte aus den Combinations-Reihen berechtigt zu schließen, daß das Gesetz, welches sich in den gefundenen Formeln zeigt, allgemein gelte.

49. Der Satz steht in Eulers Institt. Calc diff. p. 702, ohne Beweis, nur mit dem Beyfügen, daß die Formeln sich aus der Natur der Combinationen ergeben. Er wird zur Entdeckung unmöglicher Wurzeln in einer algebraischen Gleichung gebraucht.

VII. Geschichte der Combinationslehre.

Die erste noch unvollkommene Bekanntschaft der Algebraisten des sechszehnten Jahrhunderts mit dem binomischen Lehrsatze führte schon auf Combinationen, oder konnte doch darauf aufmerksam machen. Johann Buteo löste in seiner Logistica, 1559 die Aufgabe auf, alle verschiedene mit vier Würfeln mögliche Würfe zu finden. Er stellt in einer Tabelle die viererley Verbindungen der Zahlen 1 bis 6 regelmäßig auf, so daß, wie er ausdrücklich vorschreibt, nie eine kleinere Zahl auf eine größere folgt, und leitet die Classen aus einander her auf die Art, wie oben in (33) geschehen ist. Bey einer andern Aufgabe dieser Art, wo er alle Variationen der vier ersten Classen von Verbindungen aus sechs Buchstaben sucht, setzt er, um es bequemer zu machen, Zahlen statt der Buchstaben. (Pfaffii disquisit. analyticae, p. 311.). In dem letzten Satze der Schrift von Vieta, de emendatione aequationum (1615), kommen Combinationen vor. Es seyn fünf Größen B, D, G, H, K, deren Summe ich a nenne, die Summe ihrer Binionen β, der Ternionen γ, der Quaternionen δ. Vieta druckt alles mit Worten aus. Sein Satz ist folgender: Wenn $A^5 - \alpha A^4 + \beta A^3 - \gamma A^2 + \delta A = B.D.G.H.K$, so sind B, D, G, H, K die Wurzeln dieser Gleichung, oder die Werthe von A; oder, wie Vieta es ausdruckt: A explicabilis est de aqualibet illarum quinque B, D, G, H, K.

Harriots ganze Algebra beruht auf Combinationen der Wurzeln der Gleichungen. Doch findet sich die Benennung noch nicht darin; auch ist nie die Frage von der Anzahl der Combinationen einer Classe, bey einer gegebenen Anzahl von Größen.

Pascal wechselte mit Fermat Briefe über verschiedene Fragen, die Combinationen und die Wahrscheinlichkeiten in Spielen betreffend, wobey er auf sein arithmetisches Dreyeck gerieth, in welchem die Zahlen zur Bestimmung der Anzahl der Combinationen einer gewissen Menge von Dingen aus einer gegebenen Anzahl dienen. S. arithmetisches Dreyeck. In Fermats Werken, S. 179 — 188 sind zwey Briefe von Pascal enthalten, worin Anwendungen der Combinationen auf Wahrscheinlichkeiten in Spielen vorkommen.

Um dieselbe Zeit beschäftigte sich der Pater Mersenne mit den Combinationen, und machte davon Anwendungen auf die Verbindungen der Töne. Er findet, daß 20 Dinge sich über zwey Trillionen (beinahe 2½ Trillionen) mahl versetzen lassen. Für 64 Dinge erhält die Versetzungszahl neunzig Ziffern. Cogit. phys. mathem. p. 296. und Harmonicorum L. 7, p. 116.

Guldin berechnete in einer Abhandlung über die Combinationen die Menge der Wörter, die aus 23 Buchstaben zusammen gesetzt werden können, und fand, daß sie über 25 Trillionen Bände von 1000 Seiten, jede Seite von 100 Zeilen, und jede Zeile zu 60 Buchstaben, anfüllen würden. Eine solche Berechnung machte nach ihm Prestet, der die Anzahl der Wörter von 2, von 3, von 4 bis zu 24 Buchstaben über 1391 Quinquillionen groß findet, von welchen aber ein großer Theil sich nicht aussprechen läßt.

Van Schooten trägt in dem 5ten Bd. seiner Exercitationum mathematicarum (1657) einige Aufgaben über die Combinationen vor. Er nennt sie Electiones ganz schicklich. Der Satz (18.), und die Aufgabe (29.) finden sich bey ihm. Auch giebt er eine Tafel der Combi-

gleich auch eine neue, ſchickliche und faßliche Bezeichnungsart in dem neuen Syſtem eingeführt hat.

Die Lehre von den Combinationen, wovon die combinatoriſche Analyſis eine Anwendung iſt, muß alſo von demjenigen, der dieſen fruchtbaren und intereſſanten Theil der höhern Arithmetik ſtudieren will, wohl gefaßt werden. Zu dem Ende iſt dieſe in dem Artikel, Combination, ausführlich vorgetragen und erläutert worden, doch in einer ſolchen Kürze, daß das Ganze noch gut zu überſehen iſt; zugleich unabhängig von andern analytiſchen Sätzen, und ohne eine beſondere Characteriſtik. Ferner muß man die Lehrſätze von den Permutationen oder Verſetzungen gegebener Elemente, und von der Zerlegung ganzer Zahlen in alle mögliche ganze Theile wohl inne haben. Die erſtern werden gebraucht, um die verſchiedenen Combinationen einer Art aus ihren Variationen, die ſich nur durch die Stellung der Elemente unterſcheiden, auszuſondern, nach einem dazu vorgeſchriebenen oder angenommenen Geſetze der Folge oder Ordnung, und auf der andern Seite für jede Combination die Anzahl ihrer Variationen anzugeben, auch die Anzahl der Combinationen einer gegebenen Art zu finden. Die Zerlegung der Zahlen dient auf mehr als eine Art zur Aufſtellung aller Combinationen von einer gewiſſen Beſchaffenheit, wovon in dem gedachten Artikel Beyſpiele vorkommen.

Bey den Zerlegungen der Zahlen hat Hindenburg ſich anfänglich der Zerfällung (diſcerptio) derſelben in ihre möglichen ganzen kleineren Theile bedient. Daher die beiden gewöhnlich ſo genannten Diſcerptionsprobleme (Inſtn. Dign. p. 73. ſeq, p. 129. ſeq.) für Combinationen und Variationen; unſtreitig die beiden wichtigſten in Abſicht auf ihren weitläuftigen Gebrauch in der combinatoriſchen Analyſis. Die Zerfällung der Zahlen in ihre Aggregattheile führt auf Summen und ihre Complemente, und iſt alſo nicht rein, ſondern arithmetiſch-combinatoriſch. Späterhin ſind daher von Hindenburg, auch die rein-combinatoriſche, arithme-

graphiſchen und lexikographiſchen, Zerlegungen und Ableitungen der Combinationen, ſowohl zu beſtimmten als unbeſtimmten Summen, durch Ordnungen aus Ordnungen eingeführt worden, die für Zahlen- und Buchſtaben-Combinationen gleich gerecht und bequem, auch wegen ihrer unvolutoriſchen Anordnung nach leichter ſind als jene ſucceſſiven Zerfällungen der größern Zahlen in ihre kleinern ſummatoriſchen Theile. (Erſte Samml. anal. comb. Abh. 177, 183, 187, 189, 191, 202, 204.).

I. Gegenſtände der combinatoriſchen Analyſis.

1. Die combinatoriſche Analyſis geht alſo von einfachen, rein- oder arithmetiſch-combinatoriſchen (gemiſchten) Operationen aus, von einer Zuſammenzählung und Zuſammenſtellung des Gleichartigen, wie es nach einer gewiſſen Regel genommen wird, nachdem man dabey auf die Anzahl der Elemente, mit oder ohne Verſchiedenheit, mit oder ohne Veränderung der Folge, oder in andern Fällen auf die Summe der Stellenzahlen (den Summenexponenten) mit oder ohne Rückſicht auf die Anzahl der Elemente ſieht. Der Weg zu ihr geht nicht durch die dornige Algebra, welcher ſie viel mehr Licht ertheilt, ja ihr zur Darſtellung der Wurzeln jeder Gleichung durch Reihen hilft, ſondern der Übergang zu ihr geſchieht gleich von der leichten elementariſchen Buchſtabenrechnung in den höhern und allgemeinern Aufgaben der Multiplication, Diviſion und Zerfällung in gleiche Factoren. Man hat ſie alſo als einen ſelbſtſtändigen Theil der Analyſis anzuſehen.

2. Der wichtigſte Fall der Multiplication vieltheiliger Größen iſt der, wenn alle Factoren gleich groß ſind. Dieſes giebt den polynomiſchen Lehrſatz, von welchem in einem beſondern Artikel gehandelt wird. Hier nur dieſes, um ein in die Augen fallendes Beyſpiel von der Anwendung der combinatoriſchen Analyſis zu geben. Der

Satz ist auch die Veranlassung zu der Erweiterung d Analysis durch ein System von combinatorischen Oper tionen gewesen.

3. Wenn die Reihe der unabhängigen formlosen Grö sen, $a+b+c+d+e+$ etc. deren Anzahl $=n$ se auf die mte Potenz erhoben werden soll, so ist dieses nicht anders als alle mögliche Combinationen von m Größe aus n Größen, ohne und mit Wiederholungen, machen Z. B. wenn die zweyte Potenz verlangt wird, erhält ma alle Producte je zweyer ungleichen (Binionen), mit de Versetzungen oder Variationen, und die Quadrate jede Theils (Wiederholung des einzelnen). Wird der Cubu gemacht, so erhält man alle Producte wie abc (Terni nen mit den Versetzungen); alle Producte wie a^2b (Com binationen mit Wiederholung), jedes so oft als sich d a, a, b versetzen lassen; dann noch alle Cubos, wie aaa (Conternationen mit Wiederholung des einzelnen).

4. Die vieltheilige Größe sey nach den Potenzen eine veränderlichen Größe geordnet, deren Coefficienten als unveränderlich angenommen werden. Sie sey $a+bz+cz^2+dz^3+ez^4+$ etc. $=p$. Die Potenz p^m werde ebenfalls nach den Potenzen von z geordnet. Nun besteht jeder Coefficient von z aus m Factoren, die alle verschieden, oder zum Theil dieselben, oder ganz und gar dasselbe seyn können. Bezeichnet man die Stellen der Glieder in p durch $0, 1, 2, 3, 4$, etc., so ist der Coefficient der Potenz z^n in p^m die Summe der Combinationen in welchen die Summe Stellenzahlen, ihrer Elemente (der Summenexponent) $=n$ ist, und besteht z. B. für $n=5$, aus den Combination, $a^{m-1}f$; $a^{m-2}be$; $a^{m-2}cd$; $a^{m-3}b^2d$; $a^{m-3}bc^2$; $a^{m-4}b^3c$; $a^{m-5}b^5$. Es ist nur noch nöthig die Zahlen beyzufügen, wie oft jede vorkommt.

Das (in 3 und 4) Gesagte dient blos als Nachweisung, wie leicht sich diese Producte, als die Bestandtheile jener Potenzen der Reihe, combinatorisch übersehen lassen. Übrigens giebt die Combinationslehre Regeln an die Hand,

vermöge welcher man die einzelnen Combinationen der Potenzen (in 3, 4), ohne an die Beſchaffenheit jener Producte weiter zu denken, gleich gut geordnet, mechaniſch hinſchreiben kann. Dieſe Bemerkung gilt auch für die folgenden als Beyſpiele aufgeführten, und andere Aufgaben. Die arithmegraphiſchen, lexikographiſchen und andere combinatoriſchen Anordnungen leiſten hierbey vortreffliche Dienſte.

5. Man ſoll das Product von mehrern Reihen, wie

$$a + bz + cz^2 + dz^3 + ez^4 + \text{etc.} = p$$
$$A + Bz + Cz^2 + Dz^3 + Ez^4 + \text{etc.} = q$$
$$\alpha + \beta z + \gamma z^2 + \delta z^3 + \varepsilon z^4 + \text{etc.} = r$$
$$\mathfrak{A} + \mathfrak{B}z + \mathfrak{C}z^2 + \mathfrak{D}z^3 + \mathfrak{E}z^4 + \text{etc.} = s$$

machen. Das wird dem erſten Anblicke nach nicht allein eine ſehr mühſame, ſondern auch dem Fehlen ſehr unterworfene Arbeit ſcheinen. Die combinatoriſche Analyſis aber macht es leicht und ſicher. Man hat nur in den Combinationen, woraus p^m nach (4.) beſteht, für jedes der darin vorkommenden Elemente eines an derſelben Stelle aus jeder der Reihen, p, q, r, s, zu ſetzen. Z. B. der Coefficient von z^2 in p^4 enthält die Combinationen a^3c und a^2b^2. Daher enthält die Coefficient von z^2 in dem Producte p q r s die Combinationen; $aA\alpha\mathfrak{C}$; $aA\mathfrak{A}\gamma$; $a\alpha\mathfrak{A}c$; $A\alpha\mathfrak{A}c$; und $a\Lambda\beta\mathfrak{B}$; $a\alpha B\mathfrak{B}$; $a\mathfrak{A}B\beta$; $A\alpha b\mathfrak{B}$; $A\mathfrak{A}b\beta$; $\alpha\mathfrak{A}bB$. Die Zahlcoefficienten in den Coefficienten von p^m geben die Anzahl der Combinationen jeder Gattung an.

6. Der Quotient aus der Diviſion einer Reihe, wie vorher p iſt, durch eine andere, wie q, beſteht aus Combinationen nach einem beſtimmten Geſetze. (Buchſtabenrechnung. V.). Die Zerfällung der Multiplication in Factoren iſt zwar das Umgekehrte der Multiplication, aber doch in analytiſcher Betrachtung etwas ähnliches, ſo daß der polynomiſche Lehrſatz für gebrochene Exponenten eben dieſelbe Form hat, wie für ganze.

7. Es ſey die veränderliche Größe y durch eine na den Potenzen der veränderlichen z geordneten Reihe g geben: und eine dritte veränderliche x durch eine Rei nach den Potenzen von y; man ſoll x durch eine Rei nach den Potenzen von z ausdrücken. Die beiden R hen ſeyn:

$$a + bz + cz^2 + dz^3 + ez^4 \ldots = y.$$

$$A + By + Cy^2 + Dy^3 + Ey^4 \ldots = x.$$

Man hat hier die Potenzen des Polynomium y zu mache und dieſe in der Reihe für x zu ſubſtituiren. Die Co ficienten in der neuen Reihe für x werden aus den Coef cienten in den Polynomialpotenzen, die zu einer gegeb nen Potenz von z gehören, zuſammengeſetzt, nachdem mit den Coefficienten B, C, D, etc. der Folge na multiplicirt ſind. Z. B. der Coefficient von z^3 i $= Bd + C(2ad + 2bc) + D(3a^2d + 6abc + b + E(4a^3d + 12a^2bc + 4ab^3) + F(5a^4d + 20a^3b + 10a^2b^3) + G(6a^5d + 30a^4bc + 20a^3b^3) +$ et S. Combination, 42.

8. Die beiden Reihen ſeyn.

$$az + bz^2 + cz^3 + dz^4 + ez^4 + \text{etc.} = y,$$

$$Ay + By^2 + Cy^3 + Dy^4 + Ey^5 + \text{etc.} = x,$$

und es ſoll x durch eine nach z geordnete Reihe darg ſtellt werden. In den Potenzen von y ſind die Thei des Coefficienten von z^n Producte aus denen Coefficienten i der Reihe y, deren Stellen für den Zeiger $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5. \\ a & b & c & d & e. \end{pmatrix}$ die Summe n geben. In der Tafel (Combination, 41. geben die Combinationen in einer horizontalen Abtheilun auch dieſelbe Localſumme, aber für einen andern Zeiger, w rin b, c, d, e, etc. zu den Stellen 1, 2, 3, 4, etc. g hören. Setzt man daher für jeden Buchſtaben in der T fel den nächſt vorhergehenden, ſo erhält man die Comb nationen zu jeder Potenz in der neuen Reihe für x in de horizontalen Abtheilungen. Z. B. der Coefficient zu z^6 i

$+ B(2ae + 2bd + c^2) + C(3a^2d + 6abc + b^3)$
$D(4a^3c + 3a^2b^2) + E.5a^4b + Fa^6$, wo noch
Verſetzungszahlen den Combinationen beygefügt ſind.
a. a. O. 42.

9. Die Umkehrung der Reihen iſt eine wichtige com-
atoriſche Operation. Es ſey

$$z = A + By + Cy^2 + Dy^3 + \text{etc.}$$

raus ſoll eine Reihe

$$y = a + bz + cz^2 + dz^3 + \text{etc.}$$

eleitet werden.

Man ſetze in der erſtern Reihe für die Potenzen von y
Werthe mittelſt der zweyten, auf die vorher gewieſene
, ſo erhält man den Werth von z durch eine Reihe,
nach Potenzen von z fortſchreitet, und deren Coeffi-
ten aus den Coefficienten beider Reihen zuſammenge-
ſind. Wenn nun gleich a, b, c, etc. nicht bekannt
, ſo ergeben ſich doch aus den Coefficienten in der um-
andelten Reihe eben ſo viele Gleichungen zur Be-
mmung der Coefficienten in der Reihe für y, (ſ. Umkeh-
g der Reihen.)

10. Iſt $z = Ay + By^2 + Cy^3 + Dy^4 + \text{etc.}$

$$y = az + bz^2 + cz^3 + dz^4 + \text{etc.}$$

ndet man auf dieſelbe Art eine Reihe für z, die nach
Potenzen von z ſelbſt geordnet iſt, deren Coefficienten
Beſtimmung der unbekannten a, b, c, etc. dienen.

11. Man kann eben ſo gut die Werthe von z (in 10,
) in die Reihe für y ſetzen, wodurch eine Reihe für y
ch y ſelbſt erhalten wird, aus deren Coefficienten die
ßen a, b, c, etc. beſtimmt werden.

Dies letztere Verfahren giebt wie das erſtere recurri-
de Ausdrücke für die unbekannten a, b, c, d . . .
en Entwickelung aber leichter iſt, als in dem erſten
lle Die beyderley Formen dieſer Coefficienten, im
v. Syſt. Perm. Comb. p. XXX, XXXI. Andere

combinatoriſche, nicht recurrirende Formeln für die a, b, c, d . . . in der Folge.

12. Durch eben dieſes Verfahren findet man eine Reihe für eine Potenz von y, als y^m, der Exponens ſey, was man wolle. Es kommt aber noch darauf an, das Geſetz der Formation der Reihe, es ſey für y oder y^m zu entdecken, (ſ. Umkehrung der Reihen.)

13. Iſt die Frage, irgend eine Function von y durch z mittelſt der für z gegebenen Reihe auszudrucken, ſo wird dieſes Geſchäft durch die combinatoriſche Analyſis und ihre Charakteriſtik ſehr erleichtert.

14. Bey dem Gebrauche des Taylorſchen Lehrſatzes, die Veränderung einer Function durch ihre ſucceſſiven Differentialquotienten, und durch die zu der Functionalgröße hinzugefügten, von ihr unabhängigen Größen auszudrucken, leiſtet die combinatoriſche Analyſis vortreffliche Dienſte, um die ganze Operation leicht und ſicher zu machen. Hier ſchließt ſich die Derivations-Rechnung an ſie an.

15. Bey Eliminationen, bey Transformationen und Interpolationen der Reihen, bey der Summirung der Potenzen irgend welcher Größen, bey Entwickelung continuirlicher Brüche, und cykliſchen Perioden, kommen Combinationen vor.

II. Charakteriſtik der combinatoriſchen Analyſis.

16. Um die Glieder, welche aus den Combinationen zuſammengeſetzter Größen oder unendlicher Reihen entſtehen, da dieſe Glieder oft ſehr zuſammengeſetzt ſind, deutlich und kurz darzuſtellen, und das Geſetz der ganzen combinatoriſchen Anordnung offenbar zu machen, iſt eine neue Bezeichnungsart nöthig, welche man ſich geläufig machen muß, um in dieſem Geſchäft ohne Anſtoß fortzukommen. Hindenburg hat dieſe Charakteriſtik mit ſolcher

Geſchicklichkeit eingerichtet, daß man kaum etwas in einzelnen Bezeichnungen zu erinnern finden wird. Seine combinatoriſchen Ausdrücke ſtellen Formen von bekannter und faßlicher Structur dar, die man alſo mit der größten Klarheit ſogleich anwenden kann; welches bey Subſtitutionen, die bald auf dieſe, bald auf jene Art gemacht werden, nicht der Fall iſt.

17. Ganze Reihen, wie $a + b + c + d +$ etc. oder $az^m + bz^{m+1} + cz^{m+2} +$ etc. werden, wie es auch ſonſt üblich iſt, durch einzelne Buchſtaben als p, q; z, π; u. dgl. bezeichnet, um anzugeben, von welcher Reihe die Rede iſt.

18. Das mte Glied einer Reihe p wird bezeichnet durch $p \rceil m$; das mte Glied des Products der Reihen p] q, durch $pq \rceil m$; des Products dreyer Reihen p, q, r durch $pqr\ m$; der nten Potenz der Reihe p durch $p^n \rceil m$; des Quotienten $\frac{p}{q}$, durch $\frac{p}{q} \rceil m$

19. Iſt die Reihe p nach den Potenzen einer veränderlichen Größe z geordnet, ſo wird der Coefficient des mten Gliedes bezeichnet durch $p \times m$, des $(m+1)$ten durch $p \times (m+1)$. Dieſe Bezeichnung iſt beſonders nützlich, wenn die Coefficienten aus den Gliedern mehrerer Reihen zuſammen genommen werden ſollen, um den unbeſtimmten Coefficienten in einer neuen Reihe zu bilden. Alſo iſt $p \times m + q \times (m-1) + r \times (m-2) + s \times (m-3)$ das Aggregat von dem mten der Reihe p; dem $(m-1)$ten der Reihe q; dem $(m-2)$ten in der Reihe r, dem $(m-3)$ten in der Reihe s, woraus der Coefficient zu einer gemeinſchaftlichen Potenz von z zuſammengeſetzt wird. — Dieſe Bezeichnungen der Glieder und Coefficienten heißen Localzeichen, und eine daraus zuſammengeſetzte Formel heißt eine Localformel. Z. B. die Localformel des polynomiſchen Lehrſatzes iſt

$$p^n = p^n \times 1 + p^n \times 2.z + p^n \times 3.z^2 + p^n \times 4.z^3$$
$$\ldots\ldots + p^n \times (m+1).z^m + \ldots$$

wenn $p = a + bz + cz^2 + dz^3 + \text{etc.}$ ist. Man ka
nach Rothe, noch die Scale der Coefficienten in jed
Reihe nebst dem Zeichen der Reihe beyfügen, als h
p(a, b, c, d . . . .), welches wegen der Combinat
nen der Coefficienten nützlich ist.

20. Die Coefficienten werden aber auch auf die
wöhnliche Art durch Buchstaben bezeichnet, nämlich
den Functionen, die combinirt werden. Für jede Fu
tion oder Reihe müssen Buchstaben aus einem beso
dern Alphabet genommen werden, wenn man sie nach d
Ordnung vom Anfange an nehmen will. Die unbekan
ten Coefficienten, welche noch erst durch Vergleichung d
Coefficienten in den gleichnamigen Potenzen einer neu
Reihe, oder auf andere Art gefunden werden sollen, u
terscheidet Hindenburg durch darüber gesetzte Punc

als $\dot{a}$, $\ddot{A}$, $\dot{A}$. Doch scheint dieses nicht nöthig zu sey
wenn es einmahl angemerkt ist, daß sie noch zu finden sin
welche Bemerkung diese Puncte ersparen sollen. Bey d
analytischen Operationen wird zwischen den gegeben
und gesuchten Größen weiter kein Unterschied gemacht, a
nur in so fern man bey den letztern zum Zweck hat, sie u
vermischt bloß durch gegebene darzustellen.

21. Zuweilen ist es nützlich, einen Coefficienten dur
seinen Abstand von einem gegebenen anzudeuten. Es s
z. E. dieser letztere $= g$, die vorhergehenden, nach d
Folge von g an seyn f, e, d, etc. die nachfolgenden, h
i, k, etc.

so ist $f = g^{-1}$; $e = g^{-2}$; $d = g^{-3}$, etc.

und $h = g^{+1}$; $i = g^{+2}$; $k = g^{+3}$, etc. indem de
Abstand von dem gegebenen durch die über das Buchstaben
zeichen des gegebenen Gliedes gesetzte Zahl bemerkt wird
mit dem Vorzeichen — für die vorhergehenden Glieder
und dem Zeichen + für die folgenden. Diese Zahle
heißen Distanz-Exponenten.

vermöge welcher man die einzelnen Combinationen der Potenzen (in 3, 4), ohne an die Beſchaffenheit jener Producte weiter zu denken, gleich gut geordnet, mechaniſch hinſchreiben kann. Dieſe Bemerkung gilt auch für die folgenden als Beyſpiele aufgeführten, und andere Aufgaben. Die arithmographiſchen, lexikographiſchen und andere combinatoriſchen Anordnungen leiſten hierbey vortreffliche Dienſte.

5. Man ſoll das Product von mehrern Reihen, wie

$$a + bz + cz^2 + dz^3 + ez^4 + \text{etc.} = p$$
$$A + Bz + Cz^2 + Dz^3 + Ez^4 + \text{etc.} = q$$
$$\alpha + \beta z + \gamma z^2 + \delta z^3 + \varepsilon z^4 + \text{etc.} = r$$
$$\mathfrak{A} + \mathfrak{B}z + \mathfrak{C}z^2 + \mathfrak{D}z^3 + \mathfrak{E}z^4 + \text{etc.} = s$$

machen. Das wird dem erſten Anblicke nach nicht allein eine ſehr mühſame, ſondern auch dem Fehlen ſehr unterworfene Arbeit ſcheinen. Die combinatoriſche Analyſis aber macht es leicht und ſicher. Man hat nur in den Combinationen, woraus p^m nach (4.) beſteht, für jedes der darin vorkommenden Elemente eines an derſelben Stelle aus jeder der Reihen, p, q, r, s, zu ſetzen. Z. B. der Coefficient von z^2 in p^4 enthält die Combinationen a^3c und a^2b^2. Daher enthält die Coefficient von z^2 in dem Producte p q r s die Combinationen; $aA\alpha\mathfrak{C}$; $aA\mathfrak{A}\gamma$; $a\alpha\mathfrak{A}c$; $A\alpha\mathfrak{A}c$; und $aA\beta\mathfrak{B}$; $a\alpha B\mathfrak{B}$; $a\mathfrak{A}B\beta$; $A\alpha b\mathfrak{B}$; $A\mathfrak{A}b\beta$; $\alpha\mathfrak{A}bB$. Die Zahlcoefficienten in den Coefficienten von p^m geben die Anzahl der Combinationen jeder Gattung an.

6. Der Quotient aus der Diviſion einer Reihe, wie vorher p iſt, durch eine andere, wie q, beſteht aus Combinationen nach einem beſtimmten Geſetze. (Buchſtabenrechnung. V.). Die Zerfällung der Multiplication in Factoren iſt zwar das Umgekehrte der Multiplication, aber doch in analytiſcher Betrachtung etwas ähnliches, ſo daß der polynomiſche Lehrſatz für gebrochene Exponenten eben dieſelbe Form hat, wie für ganze.

Buchſtaben aus der Mitte des Alphabets mit Schwabacher Schrift, damit man ihn nicht für einen beſtimmten nach der Stellenzahl des Buchſtaben, nehme. Inzwiſchen wird dieſe Unterſcheidung, die in der Handſchrift beſchwerlich iſt, kaum nöthig ſeyn. In der Reihe mit andern zeigen die Trennungspuncte zwiſchen den Gliedern ſchon an daß die zuletzt hingeſetzten Glieder eine unbeſtimmte Stell haben, und nur bloß die Form angeben. Man darf nu anzeigen, daß die Buchſtaben, M, N, etc. m, n, etc allemahl unbeſtimmte Werthe haben, wenn nicht da Gegentheil ausdrücklich erinnert wird. Das wird in die ſem Wörterbuche angenommen, und eben ſo in allen ähnlichen Fällen.

25 Die Combinationen der Elemente a, b, c, d .. oder der Zahlen 1, 2, 3, 4 . . . werden nach der Folge d Claſſen mit Wiederholungen, durch 'A, 'B, 'C 'D... ohne Wiederholungen, durch, A, B, C D, . . . bezeichnet. Z. B. C = abc + abd + ac + bcd, als die Ternionen ohne Wiederholung aus a, b c, d. Für beiderley Combinationen werden ſowohl di Ordnung der Elemente in den einzelnen Complexionen, al auch die Folge der leztern in den einzelnen Claſſen nach be ſtimmten Regeln feſtgeſezt. Sie heißen Claſſes complexionum (combinationum) ſimpliciter, im Gegenſatze gegen diejenigen, die eine beſtimmte Summe der Stellenzahlen haben.

26. Wenn die Combinationen in einer Claſſe, nach einer beſtimmten Regel geordnet ſind, ſo wird jede einzelne Combination (Complexion) durch eine rechter Hand zugefügte Zahl angezeigt, als 'C 4 bedeutet die vierte Complexion in der dritten Combinationsclaſſe, wo Wiederholungen verſtattet ſind.

27. Die Buchſtaben des deutſchen kleinen Alphabets mit den Claſſenzeichen verbunden zeigen an, daß jede Combination mit der zugehörigen Verſetzungszahl multiplicirt werden ſoll. Die Stelle des deutſchen Buchſtaben und des Claſſenzeichens ſind dieſelben. Z. B. wenn vier Elemente

a, b, c, d, je drey mit Wiederholungen verbunden werden, ist die Summe der Variationen (der Combinationen mit den Versetzungen).

$$c'C = aaa + 3aab \ldots\ldots + 6abc,$$

wo der Kürze wegen nur die verschiedenen Arten der Combinationen angegeben sind, worin c verschiedene Werthe erhält.

28. Die Combinationen der Elemente a, b, c, d, etc. worin die Summe der Stellenzahlen, n, bestimmt ist, (Classes complexionum numeri propositi), werden nach der Folge der Classen durch ${}^{n}A$, ${}^{n}B$, ${}^{n}C$, ${}^{n}D$, etc. angezeigt. Die Stellen seyn, wie in dem Zeiger bemerkt ist,

1 2 3 4 5 . . .
a b c d e . . .

so ist, wenn $n = 5$ ist,

und Wiederholungen genommen werden ${}^{5}A = e$; ${}^{b}B = ad + bc$; ${}^{5}C = aac + abb$; ${}^{6}D = a^3b$; ${}^{6}E = aaaaa$.

29. Wenn diesen Classenzeichen mit bestimmten Summen die Zeichen der Versetzungszahlen (Polynomial-Coefficienten) vorgesetzt werden, so bedeutet dieses, daß jede in der Classe enthaltene Combination mit der ihr zugehörigen Versetzungszahl multiplicirt werden soll. Z. B. $a\,{}^{5}A = 1.e$; $b\,{}^{5}B = 2ad + 2bc$; $c\,{}^{5}C = 3aac + 3abb$; $b\,{}^{6}D = 4a^3b$; $e\,{}^{5}E = 1.aaaaa$. Die Versetzungszahlen sind oft in derselben Classe verschieden, wenn sie gleich in diesen Beyspielen gleich groß sind. Z. B. $e\,{}^{7}E = 5a^4c + 10a^3b^2$.

30. Hieraus folgen nachstehende Relationen der Classen für Combinationen an sich und solche zu bestimmten Summen:

$$'A = {}^1A + {}^2A + {}^3A + {}^4A \ldots \text{(d. i. } a+b+c+d$$
$$'B = {}^2B + {}^3B + {}^4B \ldots \text{(d. i. } aa+ab+b$$
$$'C = {}^3C + {}^4C \ldots \text{(d. i. } aaa+aab$$
$$'D = {}^4D \ldots \text{(d. i. } aaaa+aa$$

etc. etc.

wenn nämlich das erste Element a die Stelle 1, etwa o hat.

31. Die Classen der Variationen schlechtweg (sir citer) ohne Rücksicht auf die Summe der Stellen; werden durch die Buchstaben des großen lateinische phabets aus der Cursivschrift angedeutet, mit Stri oben, wie $'A$, $'B$, $'C$, etc. wenn Wiederholunger stattet sind; A', B', C' . . . wenn keine verstattet Anstatt derselben mag man auch die obigen Classenz mit dem Zeichen der Versetzungszahlen verbinden. D in der Handschrift diese Unterscheidung der Cursiv-A staben von den gewöhnlichen keine Mühe mache, ob Verwechselungen Anlaß gebe, kann man jene von auf eine leichte, willkührliche, aber festgesetzte Art, (z durch einen kleinen Strich unterwärts) u scheiden.

32. Die involutorischen Aggregate, (s. Combin 20, 38, 39.) von andern combinatorischen Ausdrück unterscheiden, bezeichnet man sie durch J, mit Beyfügur Summenexponenten der Involution oben linker Hand ^7J, welches anzeigt, daß alle Combinationen aller sen für die Lokalsumme 7 zusammen genommen werde len. Es ist also

$$^7J = {}^7A + {}^7B + {}^7C + {}^7D + {}^7E + {}^7F +$$

für den Zeiger

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ a & b & c & d & e & f & g \end{pmatrix}$$

Die einzelnen Combinationen sind in dem Artikel, Combination, (38.) in der Aufstellung nach Classen arithmographisch angegeben, so daß $^{7}A = g$; $^{7}B = af + be + cd$ ist, u. s. f.

Wenn die Involution Variationen enthält, so werden die Buchstaben J; A, B, C . . . aus der Cursiv-Schrift genommen.

Die Abtheilungen der lexikographischen Involutionen nach den Anfangsbuchstaben der Combinationen bezeichnet Hindenburg durch Buchstaben aus einem verzierten Alphabet, s. Sammlung combin. analyt. Abh. Th. I. S. 177. Im Druck unterscheiden sich diese Buchstaben sehr auszeichnend von den andern; in der Handschrift kann die Verzierung jedes andere ganz leichte Abzeichen (z. B. ein Strich durch den Buchstaben) vertreten.

33. Wenn mehreren Reihen, wie

a , b , c , d , e . . . (p
A , B , C , D , E . . . (q
α , β , γ , δ , ε . . . (r
u. s. f.

gegeben sind, so bedeutet ^{pq}B das Aggregat aller Combinationen aus den beiden Reihen p, q, indem aus jeder derselben ein Element genommen wird. Gleichfalls ist ^{pqr}C das Aggregat aller Combinationen aus den drey Reihen p, q, r, aus jeder Reihe ein Element genommen. So auch mit den Combinationen mehrerer Reihen.

34. Wenn Combinationen aus zwey oder mehreren Reihen eine bestimmte Summe der Stellenzahlen ihrer Elemente haben; so wird dieses mittelst der beygefügten Summenzahl angedeutet, wie in $^{m}B^{pq}$; $^{m}C^{pqr}$, u. dgl. wo m die Summe der Stellenzahlen von den Elementen ist.

Die Anfangsglieder der Reihen haben zur Stellenzahl Eins.

Diese neue combinatorische Charakteristik kann anfänglich weitläuftig und verwickelt, und daher schwierig scheinen; ein Vorwurf, den man ihr auch zuweilen wirklich gemacht hat. Aber die Sache verhält sich ganz anders, wenn man zur wirklichen Anwendung fortschreitet. Was von den Zeichen hier gesagt worden ist, gilt auch von ihrer combinatorischen Auflösung. Man wird ihre Vorschriften durchaus leicht finden, wenn man die Regeln in der Anwendung anfänglich (wenigstens für ein Paar Beyspiele) nicht bloß mit den Augen, sondern mit der Feder in der Hand, verfolgt. Die hier zunächst (in III) folgenden Aufgaben mit den dortigen Exempeln können dazu Veranlassung geben, und so die Behauptung rechtfertigen.

III. Beyspiele von der Anwendung der combinatorischen Analysis.

35. Es sey $a + bz + cz^2 + dz^3 + \text{etc.} = p$, so ist, wenn die Combinationszeichen, A, B, C ... M ... sich auf die Elemente a, b, c, etc. beziehen. oder

für den Zeiger $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \dots \\ a & b & c & d & e & f \dots \end{pmatrix}$

$$p = a({}^1A + {}^2Az + {}^3Az^2 + {}^4Az^3 + \text{etc.})$$
$$p^2 = b({}^2B + {}^3Bz + {}^4Bz^2 + {}^5Bz^3 + \text{etc.})$$
$$p^3 = c({}^3C + {}^4Cz + {}^5Cz^2 + {}^6Cz^3 + \text{etc.})$$

$$p^m = m({}^mM + {}^{m+1}Mz + {}^{m+2}Mz^2 + {}^{m+3}Mz^3 + \text{etc.}$$

Die Coefficienten dieser Potenzen der Reihe p hängen also von der ganz leichten combinatorischen Anordnung und

Darstellung der Complexionen zu bestimmten Summen 1, 2, 3, 4, 5, 6, . . . m, m + 1, m + 2 etc. in Combinationsclassen A, B, C . . M, nach vorstehendem Zeiger, mit Vorsetzung der zugehörigen Versetznngszahlen, ab. Insbesondere ist hier M ein Aggregat von Producten aus m Factoren, die aus a, b, c, d, etc. mit und ohne Wiederholungen genommen werden, und deren Local-Summen sind m; m + 1; m + 2; m + 3; etc. nach der Folge der Glieder.

Ein solches Product allgemein dargestellt ist $a^{\alpha} b^{\beta} c^{\gamma} d^{\delta}$, wo die Summe der Exponenten = m ist, und b, c, d . . irgend welche Coefficienten aus der Reihe p, ausser a, bedeuten. Für ein solches Product ist die Versetzungszahl =

$$\frac{m.m-1.m-2\ldots.3.2.1.}{\alpha.\alpha-1\ldots1\times\beta.\beta-1\ldots1\times\gamma.\gamma-1\ldots1\times\delta.\delta-1\ldots1\times\text{etc.}}$$

$$= \frac{m.m-1.m-2\ldots\alpha+2.\alpha+1.}{\beta.\beta-1\ldots1\times\gamma.\gamma-1\ldots1\times\delta.\delta-1\ldots\times\text{etc.}}$$

da die Factoren $1.2\ldots\alpha-1.\alpha$ im Nenner sich gegen eben solche in Zähler aufheben. Man setze $m = \alpha + r$, also $\alpha = m - r$, und multiplicire Zähler und Nenner mit $1.2.3\ldots r-1.r$, so ist die Versetzungszahl =

$$\frac{m.m-1\ldots m-r+1}{1.2\ldots r}\times$$

$$\frac{r.r-1\ldots2.1}{\beta.\beta-1\ldots1\times\gamma.\gamma-1\ldots1\times\delta.\delta-1\ldots1\times\text{etc.}}$$

Hier ist der erstere Factor der rte Binomial-Coefficient in der mten Potenz, und der zweyte die Versetzungszahl für die Factoren des Products $b^{\beta} c^{\gamma} d^{\delta}\ldots$, deren Anzahl = r ist. Darum sondere man in den Aggregaten M von jedem Theile die darin enthaltene Potenz des Factors a ab, und bezeichne den übrig bleibenden Factor durch A, B, C, D. etc. je nachdem er aus einem, zwey, drey, vier Elementen, wie b, c, d, e, u. a. besteht. Diese

Classenzeichen beziehen sich nun auf

den Zeiger	1	2	3	4	5	. . .
	b	c	d	e	f	. . .

Die Localsummen in p^m sind jetzt nach der Folge Glieder 0, 1, 2, 3, 4, 5, etc. weil die Stellenzah des Elements, wie a, b, c, etc. um 1 vermindert Nämlich in ^mM ist bloß der Factor a^m enthalten; ^{m+1}M sind enthalten a^{m-1} nebst b; in ^{m+2}M sind en ten a^{m-1}, a^{m-2}, nebst c und b^2; in ^{m+3}M sind enth a^{m-1}; a^{m-2}; a^{m-3}, nebst d; bc; b^3, u. s. f. So der Exponent von z um 1 wächst, kommt ein folge Factor aus der Reihe b, c, d, e, etc. hinzu, wog in der Combination mit diesem ein Factor von a abg Die Versetzungszahlen jedes Theils jeder Classe bezei man gemeinschaftlich durch den mit dem Buchstabenzei der Classe gleich lautenden Buchstaben des kleinen d schen Alphabets, und es erhält nun die mte Potenz, folgende combinatorische Form,

$$p^m = a^m + {}^mA\,a^{m-1}\,a^1A\,z + {}^mA\,a^{m-1}\,a^2A + {}^mB\,a^{m-2}\,b^2B \mid z^2$$

$$+ {}^mA\,a^{m-1}\,a^3A + {}^mB\,a^{m-2}\,b^3B + {}^mC\,a^{m-3}\,c^3C \mid z^3 \quad + {}^mA\,a^{m-1}\,a^4A + {}^mB\,a^{m-2}\,b^4B + {}^mC\,a^{m-3}\,c^4C + {}^mD\,a^{m-4}\,b^4D \mid z^4$$

$$+ \quad . \quad . \quad . \quad . \quad .$$

$$+ {}^mA\,a^{m-1}\,a^nA + {}^mB\,a^{m-2}\,b^nB + {}^mC\,a^{m-3}\,c^nC \mid z^n + \text{etc.}$$

$$\vdots$$

$$+ {}^mN\,a^{m-n}\,n^nN \mid$$

Die combinatorische Anordnung der Classen zu bemten Summen, wie hier vorkommen, läßt sich invorisch ausführen. Auch liefert die Tafel (Combination,) die Classen A, B, C, etc. In der ersten Verticalie ist die Classe A, in der zweyten die Classe B, in der ten die Classe C, u. s. f. mit zunehmender Localsumme dem Abschnitte enthalten.

Exempel. Für $m = 3$ und $n = 7$, ist der Coefficient $z^7 = 3a^2h + 3a(2bg + 2cf + 2de) + a^0(3b^2f + 6bce + 3bd^2 + 3c^2d)$. Der te Binomial-Coefficient nebst den folgenden ist $= 0$ $m = 3$.

Für $m = 8$ und $n = 6$ ist der Coefficient von $= 8a^7g + 28a^6(2bf + 2ce + d^2)$ $56a^5(3b^2e + 6bcd + c^3) + 70a^4(4b^3d + 6b^2c^2)$ $56a^3.5b^4c + 28a^2b^6$.

36. Es seyn zwey, drey, oder mehrere Reihen;

$$a + bz + cz^2 + dz^3 + \text{etc.} = p$$
$$A + Bz + Cz^2 + Dz^3 + \text{etc.} = q$$
$$\alpha + \beta z + \gamma z^2 + \delta z^3 + \text{etc.} = r$$

ist ihr Product combinatorisch ausgedruckt, von zwey hen:

$$pq = {}^{pq}_{2}B + {}^{pq}_{3}Bz + {}^{pq}_{4}Bz^2 + {}^{pq}_{5}Bz^3 + \text{etc.}$$

drey Reihen:

$$pqr = {}^{pqr}_{3}C + {}^{pqr}_{4}Cz + {}^{pqr}_{5}Cz^2 + {}^{pqr}_{6}Cz^3 + \text{etc.}$$

Binionen erhalten aus jeder der beiden Reihen p, q, n Coefficienten; die Ternionen aus jeder der drey Reip, q, r, einen. Die Summe der Stellenzahlen der nente ist den Classenzeichen beygefügt. Die Anfangser der Reihen haben zur Stellenzahl Eins. Die liche Entwickelung in dem Artikel, Multiplication der hen.

37. Es ſey die gebrochne Function,

$$\frac{a + bz + cz^2 + dz^3 + ez^4 + \text{etc.}}{1 - \beta z - \gamma z^2 - \delta z^3 - \varepsilon z^4 - \text{etc.}}$$

in eine nach den Potenzen von z geordnete Reihe Q zu verwandeln, und zwar mit combinatoriſchen Bezeichnungen.

Man ſetze $\beta z + \gamma z^2 + \delta z^3 + \varepsilon z^4 + \text{etc.} = y$, ſo iſt

$$\begin{aligned} Q = {} & a\,(1 + y + y^2 + y^3 + y^4 + \text{etc.}) \\ & + bz\,(1 + y + y^2 + y^3 + \text{etc.}) \\ & + cz^2(1 + y + y^2 + \text{etc.} \\ & + dz^3(1 + y + \text{etc.}) \\ & + \text{etc.} \end{aligned}$$

Nun iſt, zufolge (35.), wenn daſelbſt ſtatt a, b, c. etc. geſetzt wird β, γ, δ, etc. und die dortige Reihe p mit z multiplicirt wird, mit Zuziehung

des Zeigers $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & \ldots \\ \beta & \gamma & \delta & \varepsilon & \ldots \end{pmatrix}$

$$\begin{aligned} y &= a({}^1\mathrm{A}z + {}^2\mathrm{A}z^2 + {}^3\mathrm{A}z^3 + \text{etc.}) \\ y^2 &= b({}^2\mathrm{B}z^2 + {}^3\mathrm{B}z^3 + {}^4\mathrm{B}z^4 + \text{etc.}) \\ y^3 &= c({}^3\mathrm{C}z^3 + {}^4\mathrm{C}z^4 + {}^5\mathrm{C}z^5 + \text{etc.}) \end{aligned}$$

u. ſ. f.

Durch die Subſtitution dieſer Werthe der Potenzen von y wird erhalten.

$$\begin{aligned} Q = {} & a \\ & + [b + aa^1\mathrm{A}]z \\ & + [c + ba^1\mathrm{A} + a(a^2\mathrm{A} + b^2\mathrm{B})]z^2 \\ & + [d + ca^1\mathrm{A} + b(a^2\mathrm{A} + b^2\mathrm{B}) + a(a^3\mathrm{A} + b^3\mathrm{B} + c^3\mathrm{C})]z^3 \\ & + [e + da^1\mathrm{A} + c(a^2\mathrm{A} + b^2\mathrm{B}) + b(a^3\mathrm{A} + b^3\mathrm{B} + c^3\mathrm{C}) \\ & \qquad + a(a^4\mathrm{A} + b^4\mathrm{B} + c^4\mathrm{C} + b^4\mathrm{D})]z^4 \\ & + \text{etc.} \end{aligned}$$

Die Combinationen mit derſelben Localſumme findet in der Tafel, (Combination, 41.) in den horizontaſchnitten. wenn für die dortigen b, c, d, e, etc. , γ, δ, ε, etc. geſetzt werden. So ſind die Comonen in dem lezten Gliede des Coefficienten von z^4 fol: ε; $\beta\delta + \gamma^2$; $\beta^2\gamma$; β^4. Der Coefficient ſelbſt : $e + d\beta + c(\gamma + \beta^2) + b(\delta + 2\beta\gamma + \beta^3)$ $+ 2\beta\delta + \gamma^2 + 3\beta^2\gamma + \beta^4)$.

Hiermit vergleiche man die Auflöſung in dem Arſ Buchſtabenrechnung, (27). Wenn das Anfangsdes Diviſors nicht 1 ſondern α iſt, ſo hat man alle cienten im Dividendus und Diviſor durch α zu divi

Haben β, γ, δ, etc. das Vorzeichen +, ſo werde Combinationen derſelben, die eine ungerade Anzahl ente enthalten, negativ. Sind einige derſelben, unter den Coefficienten des Dividendus, negativ, zu verſtehen, in Rückſicht auf die hier gemachte hme der Vorzeichen), ſo werden die Combinationen b, worin eine ungerade Anzahl von Factoren oder nten vorhanden iſt. Die Vorzeichen von β, γ, δ, ind hier — genommen, damit in der entwickelten el alle Glieder daſſelbe Zeichen + erhalten. Subiſt hier nicht als negativ zu verſtehen.

8. Es ſeyn gegeben die beiden Reihen:

$$a + bz + cz^2 + dz^3 + ez^4 + \text{etc.} = y$$

$$\alpha + \beta y + \gamma y^2 + \varepsilon y^3 + \delta y^4 + \text{etc.} = x,$$

oll x durch eine nach den Potenzen von z geordnete combinatoriſch darſtellen.

lt Zuziehung des Zeigers $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & \cdots \\ a & b & c & d & e & \cdots \end{pmatrix}$.

so ist

$$\log \text{nat.}\,(1 + az + bz^2 + cz^3 + dz^4 + \text{etc.})$$
$$= az + (b - \tfrac{1}{2}a^2)z^2 + (c - \tfrac{1}{2}\cdot 2ab + \tfrac{1}{3}a^3)z^3$$
$$+ (d - \tfrac{1}{2}(2ac + bb) + \tfrac{1}{3}\cdot 3a^2b - \tfrac{1}{4}a^4)z^4 + \text{etc}$$

Mehr Exempel in der Hindenburgischen Abhandlung de infinitinomii dignitatibus exponentis indeterminati pag. 103 seqq; und in den beyden Sammlungen a. comb. Abhandl. Auch in dem folgenden Abschnitte selbst.

IV. Verbindung der combinatorischen und Differenzen-Rechnung.

41. Bey dem Gebrauch des Taylorschen Lehrsatzes, die Veränderung einer Function zu finden, wird die combinatorische Rechnungsmethode sehr brauchbar, um das Geschäft kurz, einleuchtend und sicher auszuführen.

42. Es sey φu irgend eine Function der veränderlichen Größe u, z. B. ihr Logarithme, oder der Sinus, wenn u ein Winkel ist, oder der Bogen, wenn u ein Sinus ist. Das Zeichen φ zeigt die Art der Function, aber unbestimmter Weise, an. Man setze zu u die polynomische Größe, $az + bz^2 + cz^3 + dz^4 + ez^5 + \text{etc.}$ worinn z eine von u ganz unabhängige willkührliche Größe ist. Nun soll dieselbe Function der zusammengesezten Größe, nämlich $\varphi(u + az + bz^2 + cz^3 + dz^4 + \text{etc.})$ durch φu, und eine nach den ganzen bejahten Potenzen von z geordnete Reihe dargestellt werden, so daß diese Reihe die Veränderung der Function φu, zufolge der Veränderung von u angebe.

43. In dem Artikel, Differenzenrechnung, wird gezeigt, daß die Veränderung einer Function sich durch die Potenzen der Veränderung der Functionalgröße mit ganzen bejahten Exponenten ausdrucken läßt. Daselbst wird gelehrt wie die Coefficienten dieser Potenzen bestimmt werden.

ieſe giebt in der bequemſten Form der Taylorſche Lehrſatz.
s iſt nähmlich, wenn y die Veränderung der Functionals
öße u iſt,

$$(u+y)=\varphi u+\frac{d\varphi u}{1.du}y+\frac{d^2\varphi u}{1.2.du^2}y^2$$
$$+\frac{d^3\varphi u}{1.2.3.du^3}y^3+\frac{d^4\varphi u}{1..4du^4}y^4+\text{etc.}$$

o das Differential du unveränderlich iſt, ſo daß u ſich
ichförmig verändert. Hier iſt $y=az+bz^2+cz^3+dz^4$ etc. Setzt man für y dieſe Reihe, ſo wird die
unction, $\varphi(u+y)$, oder $\varphi(u+az+bz^2+cz^3+\text{etc.})$ durch φu und eine nach z gebrochete Reihe ei-
lten.

Man ſetze der Kürze halber $\frac{d\varphi u}{1.du}=\alpha$; $\frac{d^2\varphi u}{1.2du^2}=\beta$;

$$\frac{d^3\varphi u}{1.2.3du^3}=\gamma;\ \frac{d^4\varphi u}{1..4du^4}=\delta;$$

f. f. ſo daß

$$(u+y)=\varphi u+\alpha y+\beta y^2+\gamma y^3+\delta y^4+\text{etc.}$$

ib die ganze Rechnung iſt ſchon in (39.) gemacht, theils
r Form nach, theils ſchon für die vier erſten Coefficien-
n entwickelt. Man bezeichne die Coefficienten der Reihe
r beſſern Unterſcheidung durch A, B, C, D, etc.
daß

$$\varphi(u+az+bz^2+cz^3+dz^4+\text{etc.})=$$
$$\varphi u+Az+Bz^2+Cz^3+Dz^4+\text{etc.}$$

o man die Symbole A, B, C, etc. mit den Claſſen-
ichen der Combinationen nicht wird verwechſeln können.

ist

$x =$	$\lfloor z$	$\lfloor z^2$	$\lfloor z^3$	
$+\beta a^1 A$	$+\beta a^2 A$	$+\beta a^3 A$	$+\beta a^4 A$	+
$+\gamma b^2 B$	$+\gamma b^3 B$	$+\gamma b^4 B$	$+\gamma b^5 B$	
$+\delta c^3 C$	$+\delta c^4 C$	$+\delta c^5 C$	$+\delta c^6 C$	
$+\varepsilon d^4 D$	$+\varepsilon b^5 D$	$+\varepsilon b^6 D$	$+\varepsilon b^7 D$	
$+$ etc.	$+$ etc.	$+$ etc.	$+$ etc.	

Die Coefficienten werden auf die Art, wie in Artikel, Combination (42.) für das Polynomium a. $+cz^2 +$ etc. gewiesen ist, entwickelt, und aus der daselbst (41.) genommen. Es ist nämlich der C cient

. . von $z = \beta b + \gamma . 2ab + \delta . 3a^2 b + \varepsilon . 4a^3 b$
$+ \zeta . 5a^4 b +$

. von $z^2 = \beta c + \gamma(2ac + b^2) + \delta(3a^2 c + 3$
$+ \varepsilon(4a3c + 6a^2 b^2) + \zeta(5a^4 c + 1ca$
$+$ etc.

. von $z^3 = \beta d + \gamma(2ad + 2bc) + \delta(3a^2 d + 6abc$
$+ \varepsilon(4a^3 d + 12a^2 bc + 4ab^3)$
$+ \zeta(5a^4 d + 2ca^3 bc + 10a^2 b^3) +$

. . von $z^4 = \beta e + \gamma(2ae + 2bd + c^2)$
$+ \delta(3a^2 e + 6abd + 3ac^2 + 3$
$+ \varepsilon(4a^3 e + 12a^2 bd + 6a^2 c^2 + 12ab^2 c$
$+ \zeta(5a^4 e + 20a^3 bd + 10a^3 c^2 + 30a^2 b^2 + 5$
$+$ etc.

Die Combinationen zu z^5 sind mit den Versetzungsza doch ohne die hier beyzufügenden β, γ, δ, etc. in de Combination (42.) aufgestellt. Bey einiger Aufmerk keit wird man ein Gesetz der Herleitung für die Coeff ten durch Vertauschungen der Elemente, durch M

plication mit den Exponenten des letzten Elements, und Diviſion mit dem Exponenten des letzten veränderten wahrnehmen, ſ. unten (45.).

Ein ganz leichtes Verfahren, wie man (wie hier erfordert wird) aus ^{n}A könne ^{n+1}B, und daraus ^{n+3}C, und daraus ferner ^{n+3}D, u. ſ. w. involutoriſch ableiten, zeigt (Erſte Samml. c. a. Abh. S. 187) an ^{10}D als einem Beyſpiele.

39. Die beiden Reihen ſeyn:

$$az + bz^2 + cz^3 + dz^4 + ez^5 + \text{etc.} = y,$$
$$\alpha y + \beta y^2 + \gamma y^3 + \delta y^4 + \varepsilon y^5 + \text{etc.} = x,$$

ſo iſt mit Zuziehung des Zeigers $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & \cdots \\ a & b & c & d & \cdots \end{pmatrix}$

$$x = \begin{array}{l|l|l|l} z & z^2 & z^3 & z^4 \\ \hline \alpha a\,{}^1A + & \alpha a\,{}^2A & + \alpha a\,{}^3A & + \alpha a\,{}^4A \\ & \beta b\,{}^2B & + \beta b\,{}^3B & + \beta b\,{}^4B \\ & & + \gamma c\,{}^3C & + \gamma c\,{}^4C \\ & & & + \delta d\,{}^4D \end{array} + \text{etc.}$$

Dieſe Entwickelung iſt eben ſo einfach als die vorhergehende, nach der zuletzt angeführten involutoriſchen Regel. Die Combinationen haben hier in jedem Coefficienten dieſelbe Localſumme. Daher finden ſie ſich für jeden in einem horizontalen Abſchnitte der Tafel, Combination (41.) bey einander, wenn daſelbſt die Buchſtaben mit den nächſt vorhergehenden vertauſcht werden. Es iſt

$$x = \alpha az + (\alpha b + \beta a^2)z^2 + (\alpha c + \beta . 2ab + \gamma . a^3)z^3$$
$$+ (\alpha d + \beta\,(2ac + b^2) + \gamma . 3a^2 b + \delta a^4)z^4$$
$$+ \text{etc.}$$

40. Exempel. Es ſey $x = \log. \text{nat}\,(1 + y)$, ſo iſt $x = y - \frac{1}{2}y^2 + \frac{1}{3}y^3 - \frac{1}{4}y^4 + \frac{1}{5}y^5 - \text{etc.}$
Ferner ſey $y = az + bz^2 + cz^3 + dz^4 + \text{etc.}$

so ist

log nat. $(1 + az + bz^2 + cz^3 + dz^4 + \text{etc.})$

$= az + (b - \frac{1}{2}a^2)z^2 + (c - \frac{1}{2}.2ab + \frac{1}{3}$

$+ (d - \frac{1}{2}(2ac + bb) + \frac{1}{3}.3a^2b - \frac{1}{4}a^4)z^4$.

Mehr Exempel in der Hindenburgischen Abhan
de infinitinomii dignitatibus exponentis indet
nati pag. 103 seqq; und in den beyden Sammlun
comb. Abhandl. Auch in dem folgenden Abschnitte

IV. Verbindung der combinatorischen u Differenzen-Rechnung.

41. Bey dem Gebrauch des Taylorschen
satzes, die Veränderung einer Function zu finden,
die combinatorische Rechnungsmethode sehr brauchba
das Geschäft kurz, einleuchtend und sicher
führen.

42. Es sey φu irgend eine Function der verände
Größe u, z. B. ihr Logarithme, oder der Sinus,
u ein Winkel ist, oder der Bogen, wenn u ein Sin
Das Zeichen φ zeigt die Art der Function, aber unbe
ter Weise, an. Man setze zu u die polynomische G
$az + bz^2 + cz^3 + dz^4 + ez^5 + \text{etc.}$ worinn
von u ganz unabhängige willkührliche Größe ist.
soll dieselbe Function der zusammengesezten Größe, n
$\varphi(u + az + bz^2 + cz^3 + dz^4 + \text{etc.})$ durc
und eine nach den ganzen bejahten Potenzen von z
nete Reihe dargestellt werden, so daß diese Reihe di
änderung der Function φu, zufolge der Veränd
von u angebe.

43. In dem Artikel, Differenzenrechnung, wird g
daß die Veränderung einer Function sich durch die
zen der Veränderung der Functionalgröße mit ganz
jahten Exponenten ausdrucken läßt. Daselbst wird g
wie die Coefficienten dieser Potenzen bestimmt w

ieſe giebt in der bequemſten Form der Taylorſche Lehrſatz. s iſt nähmlich, wenn y die Veränderung der Functionals öße u iſt,

$$(u+y)=\varphi u+\frac{d\varphi u}{1.du}y+\frac{d^2\varphi u}{1.2.du^2}y^2$$
$$+\frac{d^3\varphi u}{1.2.3.du^3}y^3+\frac{d^4\varphi u}{1..4du^4}y^4+\text{etc.}$$

o das Differential du unveränderlich iſt, ſo daß u ſich ichförmig verändert. Hier iſt $y=az+bz^2+cz^3+dz^4$ etc. Setzt man für y dieſe Reihe, ſo wird die unction, $\varphi(u+y)$, oder $\varphi(u+az+bz^2+ez^3$ etc.) durch φu und eine nach z gebrochete Reihe er alten.

Man ſetze der Kürze halber $\frac{d\varphi u}{1.du}=\alpha$; $\frac{d^2\varphi u}{1.2du^2}=\beta$;

$$\frac{d^3\varphi u}{1.2.3du^3}=\gamma;\ \frac{d^4\varphi u}{1..4du^4}=\delta;$$

. ſ. f. ſo daß

$$(u+y)=\varphi u+\alpha y+\beta y^2+\gamma y^3+\delta y^4+\text{etc.}$$

ib die ganze Rechnung iſt ſchon in (39.) gemacht, theils r Form nach, theils ſchon für die vier erſten Coefficien n entwickelt. Man bezeichne die Coefficienten der Reihe ir beſſern Unterſcheidung durch A, B, C, D, etc. daß

$$\varphi(u+az+bz^2+cz^3+dz^4+\text{etc.})=$$
$$\varphi u+Az+Bz^2+Cz^3+Dz^4+\text{etc.}$$

o man die Symbole A, B, C, etc. mit den Claſſen eichen der Combinationen nicht wird verwechſeln können.

Es ist

$$A = \alpha a$$

$$B = \alpha b + \beta a^2$$

$$C = \alpha c + \beta . 2ab + \gamma a^3$$

$$D = \alpha d + \beta(2ac + b^2) + \gamma . 3a^2 b + \delta a^4$$

$$E = \alpha e + \beta(2ad + 2bc) + \gamma(3a^2 c + 3ab^2) + \delta . 4a^3 b + \varepsilon a^5$$

$$F = \alpha f + \beta(2ae + 2bd + c^2) + \gamma(3a^2 d + 6abc + \ldots + \delta(4a^3 c + 6a^2 b^2) + \varepsilon . 5a^4 b + \zeta a^6$$

$$G = \alpha g + \beta(2af + 2be + 2cd) + \gamma(3a^2 e + 6abd + 3ac^2 + 3b^2 c) + \delta(4a^3 d + 12a^2 bc + 4ab^3) + \varepsilon(5a^4 c + 10a^3 b^2) + \zeta . 6a^5 b + \eta a^7$$

u. s. f.

44. Das Gesetz, wie diese Coefficienten unabhängig v einander gefunden werden, ist offenbar. Der mte Coeffici enthält m Glieder, so fern die Quotienten α, β, γ, e unbestimmt gelassen, oder nicht null werden. Wenn d (m — n)te derselben = o ist, so hat der Coefficient n m — n — 1 Glieder. Aus den m Größen, a, b, c, etc. werden alle Combinationen mit der Lokalsumme m d den Zeiger 1, 2, 3, 4, 5, etc, zu a, b, c, d, e, e gemacht, und die Classen derselben nach der Folge von d ersten an, mit jenen α, β, γ, etc. verbunden, mit B fügung der Versetzungszahlen.

45. Die Combinationen der a, b, c, d, etc. las sich auch aus denen in den nächst vorhergehenden Coeffici ten zugleich mit den numerischen Factoren folgenderm sen herleiten. Wenn der letzte Buchstab in einem T minus einfach ist, so wird dafür der im Alphabet näch folgende gesetzt. Ist der letzte Literalfactor eine Pote so multiplicirt man den Terminus mit dem Exponenten, v

mindert den Exponenten der Potenz um Eins, und ſetzt ſtatt des weggenommenen Factors den nächſtfolgenden Buchſtaben. Iſt der zweyte Literalfactor vom Ende der Buchſtab, welcher im Alphabet vor dem letzten vorhergeht, einfach oder eine Potenz, ſo verfährt man mit dieſem auf eine ähnliche Art, dividirt aber zugleich mit dem erhöhten Exponenten des letzten Literalfactors. Iſt der vorletzte Literalfactor nicht ein ſolcher, ſo wird keine Veränderung als die mit dem letzten vorgenommen. Der dritte Literalfactor vom Ende, wenn ein ſolcher vorhanden iſt, und noch entferntere bleiben unverändert. Das letzte Glied in dem Coefficienten muß noch für ſich hinzugefügt werden.

Der Grund dieſer Herleitung, was die Elemente der Combinationen betrifft, iſt in dem Artikel, Combination, §. 41. angegeben. Die Verwandlung der numeriſchen Factoren wird aus der Beſchaffenheit der Verſetzungszahlen leicht hergeleitet. Enthält ein Product ω einfache Factoren, ſo iſt die Verſetzungszahl das Product $1.2.3..\omega$, wenn ſie alle verſchieden ſind. Für α gleiche wird dieſes Product durch $1.2..\alpha$ dividirt, für andre an der Zahl β unter ſich gleiche durch $1.2..\beta$, u. ſ. f. Iſt nun der letzte Factor in einer Combination q^{ν}, ſo kommt für denſelben der Diviſor $1.2...\nu$; in der abgeleiteten, die ſich auf $q^{\nu-1}r$ endigt, aber der Diviſor $1.2..(\nu-1)$. Folglich wird die Verſetzungszahl der letztern durch die Multiplication mit ν erhalten. Endigt ſich die Combination auf $p^{\mu}q^{\nu}$, ſo iſt wegen dieſer Factoren des Product $1.2.3....\omega$ durch $1.2...\mu \times 1.2...\nu$ zu dividiren, dagegen in der einen der abgeleiteten, die ſich auf $p^{\mu-1} \times q^{\nu+1}$ endigt, daſſelbe durch $1.2...(\mu-1) \times 1.2..(\nu+1)$ zu dividiren iſt. Die Verſetzungszahl der letztern Combination wird alſo aus der für die erſtere durch die Multiplication mit μ und Diviſion durch $\nu+1$ erhalten.

46. Eine merkwürdige, vollſtändige Derivation jedes Coefficienten aus dem nächſt vorhergehenden geſchieht folgendergeſtalt. Für a, b, c, d, e, etc. wird folg-

weise gesetzt 2b, 3c, 4d, 5e, 6f, etc. für α, β, γ, δ, ε, etc. folgweise 2βa, 3γa, 4δa, 5εa, 6ζa etc. und für A, B, C, D, E, F, etc. folgweise 2B, 3C, 4D, 5E, 6F, etc. In den Producten und Potenzen wird diese Vertauschung mit jedem einfach Factor vorgenommen. Der Grund dieser Herleitung wird in dem Artikel, Derivations-Rechnung, sich geben.

47. Exempel I. Es sey $\varphi u = \log. nat. u$,

ist $\alpha = \frac{1}{u}$; $\beta = -\frac{1}{2u^2}$; $\gamma = +\frac{1}{3u^3}$;

$\delta = -\frac{1}{4u^4}$; $\varepsilon = +\frac{1}{5u^5}$; u. s. f.

Folglich sind für log nat. $(u + az + bz^2 + cz^3 + dz^4 + etc.) = \log nat\, u + Az + Bz^2 + Cz^3 + Dz^4$ etc. die Werthe der Coefficienten:

$$A = \frac{a}{u}$$

$$B = \frac{b}{u} - \frac{a^2}{2u^2}$$

$$C = \frac{c}{u} - \frac{2ab}{2u^2} + \frac{a^3}{3u^3}$$

$$D = \frac{d}{u} - \frac{2ac + b^2}{2u^2} + \frac{3a^2b}{3u^3} - \frac{a^4}{4u^4}$$

$$E = \frac{e}{u} - \frac{2ad + 2bc}{2u^2} + \frac{3a^2c + 3ab^2}{3u^3} - \frac{4a^3b}{4u^4} + \frac{a^5}{5u^5}.$$

u. s. f.

48. Die Relationen zwischen diesen Coefficienten und allen vorhergehenden sind in folgenden Gleichungen enthalten:

$u = a$

$1 + Aa = 2b$

$1 + 2Ba + Ab = 3c$

$u + 3Ca + 2Bb + Ac = 4d$

$1 + 4Da + 3Cb + 2Bc + Ad = 5e$

$1 + 5Ea + 4Db + 3Cc + 2Bd + Ae = 6f$

u. s. f.

e dieser Gleichungen entsteht aus der nächst vorherge-
nden, wenn die Größen der beiden Reihen A, B,
D, etc, und a, b, c, d, etc. auf die in (46) an-
iger Art jede mit der folgenden vertauscht werden, und
eich für u die in der Functionalgröße darauf folgende
ohne die veränderliche z, gesetzt wird. Es gehört näm-
u mit in die Reihe a, b, c, d, etc. vor a als Coef-
nt von z^0 oder von 1, und nach dem Gesetze der Ver-
chung für diese muß u mit a vertauscht werden.

49. Exempel II. Es sey $\varphi u = e^u$, wo e die
sis der natürlichen Logarithmen ist. Nun sey . . .
$1 + az + bz^2 + cz^3 + dz^4 + \text{etc.}) =$
$^u + Az + Bz^2 + Cz^3 + Dz^4 + \text{etc.}$
$u + az + bz^2 + \text{etc.}$ der natürliche Logarithme
Zahl $e^u + Az + Bz^2 + \text{etc.}$ ist. Da $\varphi u = e^u$,
$d\varphi u = e^u du$; $d^2\varphi u = e^u du^2$; $d^3\varphi u = e^u du^3$;
$\varphi u = e^u du^4$; u. s. f. (s. Exponential-Rechnung).
her $\alpha = \varphi u = e^u$; $\beta = \frac{1}{2}\alpha$; $\gamma = \frac{1}{3}\alpha$; $\delta = \frac{1}{2\cdot 4}\alpha$;
. f. Demnach ist

$e^u = \alpha$

$A = \alpha a$

$B = \alpha b + \frac{\alpha}{2} \cdot a^2$

$C = \alpha c + \frac{\alpha}{2} \cdot 2ab + \frac{\alpha}{6} \cdot a^3$

$D = \alpha d + \frac{\alpha}{2} (2ac + b^2) + \frac{\alpha}{6} \cdot 3a^2 b + \frac{\alpha}{24} \cdot a^4$

$E = \alpha e + \frac{\alpha}{2} (2ad + 2bc) + \frac{\alpha}{6} (3a^2 c + 3ab^2)$

$+ \frac{\alpha}{24} \cdot 4a^3 b + \frac{\alpha}{120} \cdot a^5$

u. s. f.

50. Die Coefficienten durch eine rücklaufende Reihe auszudrucken, mache man die in (46.) angewiesenen Vertauschungen zwischen den Größen der Reihe a, b, c, d, etc. und der Reihe A, B, C, D, etc. Da e^u mit in die Reihe der A, B, C, D, etc. als Coefficient von z^0 gehört, so ist e^u, wofür man bequemer α schreibt, mit A zu vertauschen, nach dem Gesetze der Vertauschung für A, B, C, etc. Aus der Gleichung $A = \alpha a$ werden nun alle folgenden hergeleitet.

Es ist

$A = \alpha a$

$2B = Aa + 2\alpha b$

$3C = Ba + 2Ab + 3\alpha c$

$4D = Ca + 2Bb + 3Ac + 4\alpha d$

$5E = Da + 2Cb + 3Bc + 4Dd + 5\alpha e$

u. s. f.

51. Exempel III. Es sey $\varphi u = \sin u$, so ist $d\varphi u = \cos u . du$; $d^2\varphi u = -\sin u . du^2$; $d^3\varphi u =$

$-\cos u.du^3$; $d^4\varphi u = +\sin u.du^4$, u. s. f. Also ist $\alpha = \cos u$; $\beta = -\frac{1}{2}\sin u$; $\gamma = -\frac{1}{6}\cos u$; $= +\frac{1}{24}\sin u$; etc. Mittelst dieser Werthe werden die Coefficienten in der Reihe für

$$\sin(u + az + bz^2 + cz^3 + dz^4 + \text{etc.}) =$$
$$\sin u + Az + Bz^2 + Cz^3 + Dz^4 + \text{etc.}$$

gefunden, wenn in den allgemeinen Werthen derselben (43.) für α, β, γ, etc. die hier gefundenen Werthe gesetzt werden.

52. Exempel IV. Die Coefficienten in der entwickelten Potenz, $(u + az + bz^2 + cz^3 + dz^4 + \text{etc.})^m = u^m + Az + Bz^2 + Cz^3 + Dz^4 + \text{etc.}$ können mittelst des in (46.) angegebenen Derivations-Processes sehr leicht durch eine rücklaufende Reihe gefunden werden. Es ist hier $\varphi u = u^m$, also $\alpha = mu^{m-1}$ woraus $Au = mu^m a$. In die Reihe a, b, c, d, etc. gehört auch vor a die Größe u, und in die Reihe A, B, C, D, etc. gehört auch vor A die Größe u^m. Nach dem Gesetze der Vertauschung für jene Größen muß u mit a, und u^m mit A vertauscht werden. Durch diese und die andern in (46.) angegebenen Vertauschungen werden aus der ersten Grundgleichung alle folgende erhalten, nämlich

$$Au = mu^m a$$
$$2Bu = (m-1)Aa + 2mu^m b$$
$$3Cu = (m-2)Ba + (2m-1)Ab + 3mu^m c$$
$$4Du = (m-3)Ca + (2m-2)Bb + (3m-1)Ac + 4mu^m d$$
$$5Eu = (m-4)Da + (2m-3)Cb + (3m-2)Bc + (4m-1)Ad + 5mu^m e$$

u. s. f.

Summirung der Potenzen irgend welcher Grössen durch die Combinationen derselben.

53. Man formire das Product aus einer bestimmten Anzahl binomischer Factoren,

$$(1+az)\,(1+bz)\,(1+cz)\,(1+dz)\ \text{etc.}$$

und setze es $=$

$$1 + Az + Bz^2 + Cz^3 + Dz^4 + Ez^5 + \text{etc.}$$

so ist A die Summe aller Factoren, a, b, c, d, etc.; B die Summe der Producte je zweyer, wie ab, ac, bc; C die Summe der Producte je dreyer, wie abc, abd, bcd; D die Summe der Producte je vierer, wie abcd, abce, u. s. f.; sämmtlich ohne Wiederholungen, (Buchstabenrechnung, 19.). Nimmt man von dem Producte und von der Reihe die Logarithmen, so ist

$$l(1+az) + l(1+bz) + l(1+cz) + l(1+dz) + \text{etc.}$$
$$= l(1 + Az + Bz^2 + Cz^3 + Dz^4 + \text{etc.})$$

Jeder Logarithme werde in eine Reihe verwandelt, so ist, bey Anwendung der natürlichen Logarithmen, der erste Theil jener Gleichung $=$

$$+ az - \tfrac{1}{2}a^2z^2 + \tfrac{1}{3}a^3z^3 - \tfrac{1}{4}a^4z^4 + \text{etc.}$$
$$+ bz - \tfrac{1}{2}b^2z^2 + \tfrac{1}{3}b^3z^3 - \tfrac{1}{4}b^4z^4 + \text{etc.}$$
$$+ cz - \tfrac{1}{2}c^2z^2 + \tfrac{1}{3}c^3z^3 - \tfrac{1}{4}c^4z^4 + \text{etc.}$$
$$+ dz - \tfrac{1}{2}d^2z^2 + \tfrac{1}{3}d^3z^3 - \tfrac{1}{4}d^4z^4 + \text{etc.}$$
$$+ \text{etc.}$$

Der zweyte Theil der Gleichung, nämlich der Logarithmus von $1 + Az + Bz^2 + cz^3 + \text{etc.}$ werde in die Reihe,

$$Pz - \tfrac{1}{2}Qz^2 + \tfrac{1}{3}Rz^3 - \tfrac{1}{4}Sz^4 + \tfrac{1}{5}Tz^5 - \tfrac{1}{6}Vz^6 + \text{etc.}$$

verwandelt, so ist aus (47), wenn daselbst $u = 1$ gesetzt

wird, wodurch log nat u = 1 ist, bey gehöriger Vertauschung der Bezeichnungen,

$$P = A$$
$$\tfrac{1}{2}Q = \tfrac{1}{2}A^2 - \tfrac{1}{1}.B$$
$$\tfrac{1}{3}R = \tfrac{1}{3}A^3 - \tfrac{1}{2}.2AB + \tfrac{1}{1}C$$
$$\tfrac{1}{4}S = \tfrac{1}{4}A^4 - \tfrac{1}{3}.3A^2B + \tfrac{1}{2}(2AC + B^2) - \tfrac{1}{1}D$$
$$\tfrac{1}{5}T = \tfrac{1}{5}A^5 - \tfrac{1}{4}.4A^3B + \tfrac{1}{3}(3A^2C + 3AB^2) - \tfrac{1}{2}(2AD + 2BC) + \tfrac{1}{1}E$$
$$\tfrac{1}{6}V = \tfrac{1}{6}A^6 - \tfrac{1}{5}.5A^4B + \tfrac{1}{4}(4A^3C + 6A^2B^2) - \tfrac{1}{3}(3A^2D + 6ABC + B^3) + \tfrac{1}{2}(2AE + 2BD + C^2) - \tfrac{1}{1}F.$$

u. s. f.

Hier ist P die Summe der a, b, c, d, etc. als Potenzen vom ersten Grade betrachtet, Q die Summe ihrer Quadrate, R der Cuborum, S der Biquadrate, u. s. f. Das Gesetz der Formation ist sehr klar. In der Summe der nten Potenzen sind alle Classen der Combinationen von A, B, C, D, E, enthalten, deren Localsumme = n ist, mit Aufnahme der Wiederholungen. Jede Combination ist mit der Versetzungszahl ihrer Elemente begleitet. Jede Classe wird durch die Anzahl ihrer Elemente dividirt. Die Vorzeichen der Classe wechseln ab. Das Aggregat giebt den nten Theil der Summe der Potenzen von a, b, c, d, e, etc.

Die Form, welche Euler in den Comm. Petr. novis, T. XV. diesen Summen giebt, ist nicht so einleuchtend. Er ordnet die Haupttheile der Formeln nach der Anzahl der Elemente aus der Reihe A, B, C, D, E, F, etc. Dadurch wird das Gesetz der numerischen Coefficienten verwickelt.

54. Die rücklaufenden Formeln werden aus (48.) erhalten, wenn die gehörige Vertauschung der Bezeichnungen gemacht wird,

Methode eines andern sich zuzueignen, sie unbequemer macht.

Burckhardt Methodus combinatorio-analytica evolvendis fractionum continuarum valoribus idonea, 1794.

Dieses und andere combinatorische Verfahren, von Hindenburg, Rothe, Töpfer, im mathem. Arch. 1stem Band.

Hindenburg, terminorum ab infinitinomii dignitatibus coefficientes Moivreanos sequi ordinem Lexicographicum, 1795.

Hier wird gezeigt, daß Moivre's Verfahren auf lexikographische Anordnung dieser Coefficienten führt. Die von Hindenburg (Infin. Dign.) gegebene ist arithmographisch, nach Classen.

Mathematisches Archiv, herausgegeben von Hindenburg, angefangen 1794.

Darin sind viele hierher gehörige Abhandlungen enthalten. Mit diesem ist zu verbinden:

Sammlung combinatorisch-analytischer Abhandlungen, herausgegeben von Hindenburg, erste Samml. 1796, zweyte 1800. Die erste kam unter dem Titel: der polynomische Lehrsatz, das wichtigste Theorem der ganzen Analysis, heraus. In diesen Sammlungen werden vornehmlich rein-combinatorische Operationen, und die damit in Verbindung stehenden Involutionen gebraucht.

Rothe, theorema binomiale universaliter demonstratum, 1796; vermittelst Variationen und Combinationen.

De Prasse usus Logarithmorum infinitinomii in theoria aequationum, 1796.

Hierin eine deutliche Anleitung zu dem combinatorischen Calcül.

In Pfaffs Disquisitionibus analyticis ist in

dem tractatu de reverſione ſerierum ein Abſchnitt p. 260 — 321. de theoremate polynomiali combinatorie tractato, ejusque applicatione ad reverſionem ſerierum, ein ſehr lehrreicher Commentar über die Hindenburgiſche Combinationslehre.

Stahls Grundriß der Combinationslehre nebſt Anwendung derſelben auf die Analyſis, 1800. Mit Fleiß ausgearbeitet.

Deſſelben Einleitung in das Studium der Combinationslehre. 1801.

Weingärtners Lehrbuch der combinatoriſchen Analyſis, 2 Theile. 1800.

Im erſten, die Theorie der Hindenburgiſchen Combinationslehre; im zweyten, die Anwendung derſelben auf mehrere analytiſche Aufgaben. Der Vortrag deutlich.

Columnarzahl iſt das Product einer Polygonalzahl in ihre Seite, oder in ihre Stellenzahl. Die Namenzahl einer Polygonalzahl ſey $= n$ (für Trigonalzahlen $= 3$, für Tetragonalzahlen $= 4$, u. ſ. f.), die Seite $= m$, ſo iſt die Polygonalzahl $= \frac{1}{2}m((m-1)(n-2)+2)$, und die Columnarzahl $= \frac{1}{2}m^2((m-1)(n-2)+2)$. Man hat dieſe Form, wie manche andere, jetzt bey Seite gelegt. S. Marpurgs Progreſſionalcalcul. S. 300 ff.

Commenſurabel wird von Gröſſen geſagt, die ſich durch einen und denſelben Theil ohne Reſte meſſen oder theilen laſſen. Alle ganze Zahlen ſind commenſurabel durch die gemeinſchaftliche Einheit; doch nennt man insbeſondere Zahlen commenſurabel, die einen andern gemeinſchaftlichen Theiler als die Einheit haben. Alle Brüche, deren Zähler und Nenner ganze Zahlen ſind, oder darauf gebracht werden können, ſind commenſurabel. Bringt man ſie auf einen gemeinſchaftlichen Nenner n, ſo iſt der Bruch $\frac{1}{n}$ das gemeinſchaftliche Maaß, z. B. $\frac{3}{4}$ und $\frac{2}{7}$ haben das

Summirung der Potenzen irgend welcher Größen durch die Combinationen derselben.

53. Man formire das Product aus einer bestimmten Anzahl binomischer Factoren,

$$(1+az)(1+bz)(1+cz)(1+dz)\text{ etc.}$$

und setze es =

$$1 + Az + Bz^2 + Cz^3 + Dz^4 + Ez^5 + \text{etc.}$$

so ist A die Summe aller Factoren, a, b, c, d, etc.; B die Summe der Producte je zweier, wie ab, ac, bc; C die Summe der Producte je dreyer, wie abc, abd, bcd; D die Summe der Producte je vierer, wie abcd, abce, u. s. f. sämmtlich ohne Wiederholungen, (Buchstabenrechnung, 29.). Nimmt man von dem Producte und von der Reihe die Logarithmen, so ist

$$l(1+az) + l(1+bz) + l(1+cz) + l(1+dz) + \text{etc.}$$
$$= l(1 + Az + Bz^2 + Cz^3 + Dz^4 + \text{etc.})$$

Jeder Logarithme werde in eine Reihe verwandelt, so ist, bey Anwendung der natürlichen Logarithmen, der erste Theil jener Gleichung =

$$+az - \tfrac{1}{2}a^2z^2 + \tfrac{1}{3}a^3z^3 - \tfrac{1}{4}a^4z^4 + \text{etc.}$$
$$+bz - \tfrac{1}{2}b^2z^2 + \tfrac{1}{3}b^3z^3 - \tfrac{1}{4}b^4z^4 + \text{etc.}$$
$$+cz - \tfrac{1}{2}c^2z^2 + \tfrac{1}{3}c^3z^3 - \tfrac{1}{4}c^4z^4 + \text{etc.}$$
$$+dz - \tfrac{1}{2}d^2z^2 + \tfrac{1}{3}d^3z^3 - \tfrac{1}{4}d^4z^4 + \text{etc.}$$
$$+ \text{etc.}$$

Der zweyte Theil der Gleichung, nämlich der Logarithmus von $1 + Az + Bz^2 + Cz^3 + \text{etc.}$ werde in die Reihe,

$$Pz - \tfrac{1}{2}Qz^2 + \tfrac{1}{3}Rz^3 - \tfrac{1}{4}Sz^4 + \tfrac{1}{5}Tz^5 - \tfrac{1}{6}Vz^6 + \text{etc.}$$

verwandelt, so ist aus (47), wenn daselbst $u = 1$ gesetzt

ird, wodurch log nat u = 1 ist, bey gehöriger Vertauschung der Bezeichnungen,

$$P = A$$
$$Q = \tfrac{1}{2}A^2 - \tfrac{1}{1}.B$$
$$R = \tfrac{1}{3}A^3 - \tfrac{1}{2}.2AB + \tfrac{1}{1}C$$
$$S = \tfrac{1}{4}A^4 - \tfrac{1}{3}.3A^2B + \tfrac{1}{2}(2AC + B^2) - \tfrac{1}{1}D$$
$$T = \tfrac{1}{5}A^5 - \tfrac{1}{4}.4A^3B + \tfrac{1}{3}(3A^2C + 3AB^2) - \tfrac{1}{2}(2AD + 2BC) + \tfrac{1}{1}E$$
$$V = \tfrac{1}{6}A^6 - \tfrac{1}{5}.5A^4B + \tfrac{1}{4}(4A^3C + 6A^2B^2) - \tfrac{1}{3}(3A^2D + 6ABC + B^3) + \tfrac{1}{2}(2AE + 2BD + C^2) - \tfrac{1}{1}F.$$

u. s. f.

Hier ist P die Summe der a, b, c, d, etc. als Potenzen vom ersten Grade betrachtet, Q die Summe ihrer Quadrate, R der Cuborum, S der Biquadrate, u. s. f. Das Gesetz der Formation ist sehr klar. In der Summe der nten Potenzen sind alle Classen der Combinationen von A, B, C, D, E, enthalten, deren Localsumme = n ist, mit Aufnahme der Wiederholungen. Jede Combination ist mit der Versetzungszahl ihrer Elemente begleitet. Jede Classe wird durch die Anzahl ihrer Elemente dividirt. Die Vorzeichen der Classe wechseln ab. Das Aggregat giebt den nten Theil der Summe der Potenzen von a, b, c, d, e, etc.

Die Form, welche Euler in den Comm. Petr. novis, T. XV. diesen Summen giebt, ist nicht so einleuchtend. Er ordnet die Hauptheile der Formeln nach der Anzahl der Elemente aus der Reihe A, B, C, D, E, F, etc. Dadurch wird das Gesetz der numerischen Coefficienten verwickelt.

54. Die rücklaufenden Formeln werden aus (48.) erhalten, wenn die gehörige Vertauschung der Bezeichnungen gemacht wird,

$y + \frac{1}{2}u\Delta x : y$, iſt auch $= 1 : 1$, daher auch die d
den vorangehenden Gliedern dieſer Verhältniſſe.

Die von dem Bogen AM beſchriebene Oberfläche f
$= S$, die von dem Bogen MN beſchriebene $= \Delta S$. I
bey einem concaven Bogen ΔS zwiſchen die von der Chor
und von Mn beſchriebenen Oberflächen fällt, und di
ſich ohne Ende einander nähern, ſo iſt auch das Grä
verhältniß von ΔS und der von der Chorde MN beſchr
benen Kegelfläche das Verhältniß der Gleichheit. B
einem converen Bogen iſt die von demſelben beſchriebe
Oberfläche größer als jede der von den beiden geraden Lini
beſchriebenen. Dieſe können ſich aber nicht einander näher
ohne zugleich jener ſich zu nähern, und zuletzt ihr gleich
werden. Folglich iſt, die für Gränzverhältniſſe gehörig
Bezeichnungen gebraucht, $dS = 2\pi y \sqrt{(dx^2 + dy^2}$

oder, weil $dx : \sqrt{(dx^2 + dy^2)} = 1 : \sqrt{\left(1 + \frac{dy^2}{dx^2}\right.}$

iſt, $\frac{dS}{dx} = 2\pi y \sqrt{\left(1 + \frac{dy^2}{dx^2}\right)}$. Dividirt man a
beiden Seiten mit einer willkührlichen, aber beſtimm
ten Größe h, um das Differential der Oberfläche m
dem Differential einer Fläche zu vergleichen, ſo i

$\frac{dS}{h\,dx} = \frac{2\pi y}{h} \sqrt{\left(1 + \frac{dy^2}{dx^2}\right)}$. Doch braucht die
Größe h nur in Gedanken zugeſetzt zu werden.

Der Bogen AM ſey $= s$, ſo iſt $ds = \sqrt{(dx^2 + dy^2}$

oder $\frac{ds}{dx} = \sqrt{\left(1 + \frac{dy^2}{dx^2}\right)}$; alſo iſt $dS = 2\pi y d$

Die Oberfläche eines runden Körpers zu finden, h
man nun folgendergeſtalt zu verfahren. Aus der Gleic
ung zwiſchen den rechtwinklichten Coordinaten x, y, ſuc
man den Differentialquotienten $-\frac{dy}{dx} = p$, ſo iſt
$dS = 2\pi y\,dx \sqrt{(1 + p^2)}$. Wird in dieſer Functio

y durch x ausgedruckt, so wird durch die Integration S erhalten.

Oder man nenne $\frac{dx}{dy} = q$, so ist

$dS = 2\pi y dy \sqrt{(1 + q^2)}$, worin alles durch y ausgedruckt werden muß.

Exempel. I. Es sey AM ein Kreisbogen mit dem Halbmesser a beschrieben. Die Gleichung für den Kreis ist $2ax - xx = yy$; also $adx - xdx = ydy$,

und $p = \frac{a-x}{y}$; daher $1 + p^2 = \frac{yy+aa-2ax+xx}{yy}$

$= \frac{a^2}{y^2}$. Also ist $dS = 2\pi a dx$, und $S = 2\pi ax$,

wenn die Oberfläche mit x zugleich anfängt.

Der Abschnitt der Kugelfläche von A bis M ist dem Sinusversus AP proportional; die Kugelzone zwischen zwey mit PM, QN in irgend einem Abstande von einander beschriebenen Kreisen dem zugehörigen Unterschiede der Sinusversus AP und AQ.

Man ziehe die Chorde AM, so ist (am Kreise) $2ax = AM^2$, also ist der Kugelfläche Abschnitt $S = \pi . AM^2$, das ist dem Kreise mit dem Halbmesser AM. Die Oberfläche der Halbkugel ist also $= 2\pi aa$; der ganzen Kugel $= 4\pi aa$.

Exempel. II. Die beschreibende Linie sey eine Parabel, die sich um ihre Axe dreht. Die Gleichung ist $ax = yy$, wenn a der Parameter ist. Die Differentialgleichung ist

$adx = 2ydy$, also $p = \frac{a}{2y}$; $1 + p^2 = \frac{4yy+aa}{4yy}$

$= \frac{4ax+aa}{4yy}$: also $dS = \pi dx \sqrt{(4ax + aa.)}$ Daraus ist $S = \frac{\pi(4ax+aa)^{\frac{3}{2}}}{6a} +$ Const. (Integralfor-

meln, 4.). Das Integral sey = o; wenn x = o ist. Der veränderliche Theil des Integrals ist = $\frac{1}{3}\pi aa$, für x = o, also ist Const = $-\frac{1}{3}\pi aa$, und demnach die Oberfläche des paraboliſchen Konoids,

$$S = \frac{1}{3}\pi \left(\frac{(4ax + aa)^{\frac{3}{2}}}{a} - aa\right).$$

Exempel. III. Die beſchreibende Linie ſey wiederum eine Parabel, aber die Axe der Drehung ſey die Linie AY, welche die Parabel in dem Scheitel A berührt. Die Abſciſſe auf der Drehungs-Axe genommen iſt AR = y, die Ordinate MR = x. Daher iſt das Differential der von AM um AR beſchriebenen Oberfläche, $dS = 2\pi x \sqrt{(dx^2 + dy^2)} = 2\pi x\, dx \sqrt{(1 + p^2)} = \pi dx \sqrt{(4x^2 + ax)}$. Man ſetze a = 8b, ſo iſt $dS = 2\pi dx \sqrt{(2bx + x^2)}$. Die Integration giebt

$$S = \pi(b+x)\sqrt{(2bx+x^2)} - \pi b^2 \int \frac{dx}{\sqrt{(2bx+xx)}} + C.$$

(Integralformel. 37.). Es iſt $\int \frac{dx}{\sqrt{(2bx + xx)}} = \log \text{nat} \frac{b + x + \sqrt{(2bx + xx)}}{\text{conſt.}}$. (Integral-Form. 35.). Die Conſt. in dem logarithmiſchen Integral iſt = b. damit für x = o die Zahl zu dem Logarithmen = 1, und der Logarithme dadurch = o werde. Das algebraiſche Integral bedarf keiner Conſtans. Alſo iſt

$$S = \pi (b + x)\sqrt{(2bx + x^2)} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad .$$
$$- \pi b^2 \log \text{nat} \frac{b + x + \sqrt{(2bx + x^2)}}{b}.$$

Man ſetze $b + x = \frac{b}{\cos \varphi}$, ſo iſt $\sqrt{(2bx + xx)}$

$= b \text{ tang } \varphi$, und $b + x + \sqrt{(2bx + xx)} = \frac{b(1 + \sin \varphi)}{\cos \varphi} = b \text{ tang } (45° + \frac{1}{2}\varphi)$; auch . . .

$(b+x)\sqrt{(2bx + xx)} = \frac{bb \text{ tang } \varphi}{\cos \varphi}$

$= bb \text{ tang } \varphi . \sec \varphi$. Also ist

$S = \pi b^2 (\text{tang } \varphi . \sec \varphi - \log \text{nat tang } (45° + \frac{1}{2}\varphi))$

oder auch

$S = \pi b^2 (\text{tang } \varphi . \sec \varphi + \log \text{nat tang } (45° - \frac{1}{2}\varphi))$,

weil das Product der Tangenten von Winkeln, deren Summe 90 Grad ausmacht, die Einheit giebt, daher hier ihre Logarithmen gleich und entgegen gesetzt sind.

Die Rechnung in Kästners Analysis des Unendlichen S. 696 ff. hat eine andre Form als die hier geführte. Zuletzt ist ein Fehler begangen, und $\frac{1}{4}$ statt $\frac{1}{2}$ gesetzt. Daher muß der logarithmische Theil das Vorzeichen + erhalten.

Exempel. IV. Die Linie AZ sey eine Hyperbel, die sich um ihre Axe AX drehet; es wird die Oberfläche des konoidischen Körpers gesucht.

Die halbe Haupt-Axe der Hyperbel sey $= a$, die halbe conjugirte $= b$; die Abscisse von dem Mittelpuncte aus genommen sey $= x$, die Ordinate $= y$; so ist die Gleichung für beide, $a^2 y^2 = b^2 x^2 - a^2 b^2$.

Daraus folgt die Differentialgleichung $a^2 y\, dy = b^2 x\, dx$,

und $p = \frac{b^2 x}{a^2 y}$, also $1 + p^2 = \frac{a^4 y^2 + b^4 x^2}{a^2 y^2}$

$= \frac{(a^2 + b^2) b^2 x^2 - a^4 b^2}{a^4 y^2}$.

Setzt man $a^2 + b^2 = c^2$, so ist $1 + p^2 = \frac{b^2 (c^2 x^2 - a^4)}{a^4 y^2}$,

und $dS = \frac{2\pi b}{aa} dx \sqrt{(c^2x^2 - a^4)}$.

Es ist $\int dx \sqrt{(c^2x^2 - a^4)} = \frac{1}{2}x\sqrt{(c^2x^2 - a^4)}$ $- \frac{1}{2}a^4 \int \frac{dx}{\sqrt{(c^2x^2 - a^4)}}$, und $\int \frac{dx}{\sqrt{(c^2x^2 - a^4)}}$

$= \int \frac{dx}{c\sqrt{(x^2 - a^4 : c^2)}} = \frac{1}{c}$ log. nat. $\frac{x + \sqrt{(x^2 - a^4 : c^2)}}{\text{const}} =$

$\frac{1}{c}$ log. nat. $\frac{cx + \sqrt{(c^2x^2 - a^4)}}{c.\,\text{const}}$ (Integr Formel, 36.30)

Beide Integrale sollen für $x = o$ Null seyn, also ist die Constans des algebraischen Integrals $= -\frac{1}{2}a\sqrt{(c^2a^2 - a^4)} = -\frac{1}{2}a^2b$. In dem logarithmischen Integral muß für $x = a$ die Zahl $= 1$ seyn, also ist $\frac{ca + ab}{c} =$ const. Folglich ist

$$S = \frac{\pi b}{aa}(x\sqrt{(c^2x^2 - a^4)} - a^2b)$$

$$- \frac{\pi a^2 b}{c} \text{log nat.} \frac{cx + \sqrt{(c^2x^2 - a^4)}}{a(b + c)} \sqrt{}$$

Man setze $\frac{cx}{aa} = \sec\varphi$, so ist $\frac{c^2x^2 - a^4}{a^4}$

$= \sec\varphi^2 - 1 = \text{tang}\,\varphi^2$, und $cx + \sqrt{(c^2x^2 - a^4)}$ $= aa\,(\sec\varphi + \text{tang}\,\varphi) = aa\,\text{tg}(45° + \frac{1}{2}\varphi)$, nach Gonimetrie (43.). Also ist

$$S = \frac{\pi b}{c}(a^2 \text{tg}\,\varphi \sec\varphi - bc) - \frac{\pi a^2 b}{c} \text{l. n.} \frac{a\,\text{tg}(45° + \frac{1}{2}\varphi)}{b + c}$$

Man setze den Winkel der Asymptoten mit der Axe $= \alpha$, so ist $\frac{b}{a} = \text{tang}\,\alpha$; $\frac{c}{a} = \sec\alpha$;

$\frac{be}{ia}$ tang α. sec α; $\frac{b+c}{a}$ = tang α + sec α

= tang $(45° + \frac{1}{2}\alpha)$; $-\frac{b}{c}$ = sin α. Daraus iſt nun

$$S = \pi a^2 \sin\alpha \,(\sec\varphi . \tan\varphi - \sec\alpha . \tan\alpha)$$
$$- \pi a^2 \sin\alpha . \log \text{nat} \frac{\text{tg}(45° + \frac{1}{2}\varphi)}{\text{tg}(45° + \frac{1}{2}\alpha)}.$$

Exempel V. Der hyperboliſche Bogen AM drehe ſich um AY, die berührende im Scheitel. Nun iſt $dS = 2\pi x \sqrt{(dx^2 + dy^2)} = 2\pi x\, dy \sqrt{(1 + q^2)}$, wo $q = \frac{dx}{dy}$ iſt. Es iſt $q = \frac{a^2 y}{b^2 x}$, und . . . .

$$1 + q^2 = \frac{a^4 y^2 + b^4 x^2}{b^4 x^2} = \frac{a^4 y^2 + a^2 b^2 y^2 + a^2 b^4}{b^4 x^2}$$

$= \frac{a^2 (c^2 y^2 + b^4)}{b^4 x^2}$. Demnach $dS = \frac{2\pi a\, dy}{b^2} \sqrt{(c^2 y^2 + b^4)}$.

Es iſt $dy\,(c^2 y^2 + b^4) = \frac{1}{2} y \sqrt{(c^2 y^2 + b^4)}$

$+ \frac{1}{2} b^4 \int \frac{dy}{\sqrt{(c^2 y^2 + b^4)}}$; und $\int \frac{dy}{\sqrt{(c^2 y^2 + b^4)}}$

$= \frac{1}{c} \log \text{nat} \frac{y + \sqrt{(y^2 + b^4 : c^2)}}{\text{conſt}} \sqrt{}$

Alſo iſt

$$s = \frac{\pi a y}{b^2} \sqrt{(c^2 y^2 + b^4)} + \frac{\pi a b^2}{c} \text{l. n.} \frac{cy + \sqrt{(c^2 y^2 + b^4)}}{b^2}$$

wo die Conſt. in dem logarithmiſchen Integral gehörig beygefügt iſt.

Man ſetze $\frac{cy}{bb} = \tan\omega$, ſo iſt $\frac{c^2 y^2 + b^4}{b^4}$

$= \tan\omega^2 + 1 = \sec\omega^2$; auch ſey wiederum der Winkel der Aſymptoten mit der Axe $= \alpha$, ſo

gemeinschaftliche Maaß $\frac{1}{28}$. Größen sind noch co
mensurabel, wenn ihr gemeinschaftliches Maaß eine Ir
tionalzahl ist, oder sich mit der Einheit nicht vergleich
läßt, wie, $3\sqrt{2}$, $5\sqrt{2}$, $10\sqrt{2}$, wo $\sqrt{2}$ das gemei
schaftliche Maaß ist, daher sich diese Zahlen wie 3, 5, 1
verhalten.

Commensurabel in der Potenz nennt Euklid (X. 3. Erkl.) gerade Linien, deren Quadrate von eine und demselben Flächenraume gemessen werden, z. B. Za len statt der Linien genommen, die Zahlen $\sqrt{3}$, $\sqrt{}$ deren Quadrate, 3, 5, commensurabel sind. So au $2\sqrt{3}$, $7\sqrt{5}$, deren Quadrate 12 und 245 sind.

Complanation, Ebnung, ist die Vergleichun des Inhalts einer krummen Fläche mit einer ebenen.

Die Alten haben nur die Oberflächen eines senkrechte Cylinders und Kegels, einer Kugel und eines Kugela schnittes mit Kreisflächen vergleichen können. S. Arch medes von Kugel und Cylinder. B. I. Satz 14. 15. 1 30. 38. Huygens fand im J. 1657. die Ebnung de paraboliſchen Konoids, und in dem folgenden Jahre di Vergleichung der Oberfläche des hyperboliſchen Konoids un der Sphäroiden mit Kreisflächen. S. Horol oscill P. III. prop. 9. Er gab davon einigen Geometer Nachricht, unter andern auch Wallis, der ihm bal darauf seine Methode, diese Vergleichungen zu machen mittheilte, (Operum T. I. p. 555; 562), und auch di hohle Oberfläche fand, welche eine Parabel durch die Um drehung um die berührende am Scheitel beschreibt, (a. a O. S. 562.). Diese gründet sich auf seine Arithmeti unendlicher Größen, und ist beschwerlich. Huygens ha nur die Constructionen, ohne Beweise, gegeben. Durch die neuere Infinitesimal-Rechnung wird die Oberfläch derer Körper, die durch Umdrehung um eine Axe entstehen nach einem allgemeinen Verfahren gefunden.

Es ist AZ (Fig. 74. Tab. V.) eine gerade Linie, di

bey der Umdrehung der Winkelfläche ZAX um die gerade AX eine Kegelfläche beschreibe. Man setze AP = x; PQ = Δx; die auf AX senkrechten MP = y; NQ = y + Δy; die Seite des von M beschriebenen Kegels AM = z, und MN = Δz. Nun ist die von AM beschriebene Kegelfläche gleich einem Dreyecke, dessen Grundlinie der von PM beschriebene Kreisumfang, und Höhe AM ist, also = πyz, wo 1 : π das Verhältniß des Durchmessers eines Kreises zum Umfange ist. Die von AN beschriebene Kegelfläche ist = π(y + Δy)(z + Δz), also die Fläche des von MN beschriebenen Kegelstücks = π(zΔz + yΔz + Δy.Δz) = 2πΔz(y + ½Δy), weil y : z = Δy : Δz ist. Da $\Delta z^2 = \Delta x^2 + \Delta y^2$, so ist die Fläche des Kegelstücks $= \pi(y + \frac{1}{2}\Delta y)\sqrt{(\Delta x^2 + \Delta y^2)}$.

Es sey nun AZ (Fig. 75) eine krumme Linie in der Ebene ZAX, welche sich um die gerade AX drehet, wodurch AZ die Oberfläche eines runden Körpers beschreibt. Man ziehe PM, QN senkrecht auf AX, und Mm parallel mit PQ, ferner die Chorde MN, und die berührende TM in M, welche QN in n schneidet. Ist MN gegen AX concav, so fällt n in die Verlängerung von QN; ist MN conver, so liegt n zwischen N und m. Es sey AP = x; PQ = Δx; MP = y; Nm = Δy; und mn = uΔx, wo u eine Zahl ist, der Exponens des Verhältnisses PT : PM, wenn PT die Subtangente für den Punct M ist. Die von der Chorde MN beschriebene Fläche ist $= 2\pi(y + \frac{1}{2}\Delta y)\sqrt{(\Delta x^2 + \Delta y^2}$; die von der Linie Mn beschriebenen ist $= 2\pi(y + \frac{1}{2}u\Delta x)\sqrt{(\Delta x^2 + u^2\Delta x^2)}$. Beide verhalten sich wie

$$(y + \tfrac{1}{2}\Delta y)\sqrt{\left(1 + \frac{\Delta y^2}{\Delta x^2}\right)} : (y + \tfrac{1}{2}u\Delta x)\sqrt{(1 + u^2)}.$$

Die Gränze dieses Verhältnisses ist das von 1 : 1. Denn die Gränze von $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ ist = u, (berührende Linie, 12.), und die Gränze der Verhältnisse, $y + \frac{1}{2}\Delta y : y$, und

$y + \frac{1}{2}u\Delta x : y$, ist auch $= 1 : 1$, daher auch die
den vorangehenden Gliedern dieser Verhältnisse.

Die von dem Bogen AM beschriebene Oberfläche
$= S$, die von dem Bogen MN beschriebene $= \Delta S$.
bey einem concaven Bogen ΔS zwischen die von der Ch
und von Mn beschriebenen Oberflächen fällt, und
sich ohne Ende einander nähern, so ist auch das Gr
verhältniß von ΔS und der von der Chorde MN besch
benen Kegelfläche das Verhältniß der Gleichheit.
einem convexen Bogen ist die von demselben beschrie
Oberfläche größer als jede der von den beiden geraden Li
beschriebenen. Diese können sich aber nicht einander näh
ohne zugleich jener sich zu nähern, und zuletzt ihr gleich
werden. Folglich ist, die für Gränzverhältnisse gehör
Bezeichnungen gebraucht, $dS = 2\pi y \sqrt{(dx^2 + dy$

oder, weil $dx : \sqrt{(dx^2 + dy^2)} = 1 : \sqrt{\left(1 + \frac{dy}{dx}\right.}$

ist, $\frac{dS}{dx} = 2\pi y \sqrt{\left(1 + \frac{dy^2}{dx^2}\right)}$. Dividirt man
beiden Seiten mit einer willkührlichen, aber bestim
ten Größe h, um das Differential der Oberfläche
dem Differential einer Fläche zu vergleichen, so

$\frac{dS}{h\,dx} = \frac{2\pi y}{h} \sqrt{\left(1 + \frac{dy^2}{dx^2}\right)}$. Doch braucht
Größe h nur in Gedanken zugesetzt zu werden.

Der Bogen AM sey $= s$, so ist $ds = \sqrt{(dx^2 + dy$

oder $\frac{ds}{dx} = \sqrt{\left(1 + \frac{dy^2}{dx^2}\right)}$; also ist $dS = 2\pi y$

Die Oberfläche eines runden Körpers zu finden,
man nun folgendergestalt zu verfahren. Aus der Gle
ung zwischen den rechtwinklichten Coordinaten x, y, s
man den Differentialquotienten $-\frac{dy}{dx} = p$, so ist
$dS = 2\pi y\,dx \sqrt{(1 + p^2)}$. Wird in dieser Funct

y durch x ausgedruckt, so wird durch die Integration S erhalten.

Oder man nenne $\frac{dx}{dy} = q$, so ist . . . .

$dS = 2\pi y dy \sqrt{(1 + q^2)}$, worin alles durch y ausgedruckt werden muß.

Exempel. I. Es sey AM ein Kreisbogen mit dem Halbmesser a beschrieben. Die Gleichung für den Kreis ist $2ax - xx = yy$; also $adx - xdx = ydy$, und $p = \frac{a-x}{y}$; daher $1 + p^2 = \frac{yy+aa-2ax+xx}{yy}$ $= \frac{a^2}{y^2}$. Also ist $dS = 2\pi a dx$, und $S = 2\pi ax$, wenn die Oberfläche mit x zugleich anfängt.

Der Abschnitt der Kugelfläche von A bis M ist dem Sinusversus AP proportional; die Kugelzone zwischen zwey mit PM, QN in irgend einem Abstande von einander beschriebenen Kreisen dem zugehörigen Unterschiede der Sinusversus AP und AQ.

Man ziehe die Chorde AM, so ist (am Kreise) $2ax = AM^2$, also ist der Kugelfläche Abschnitt $S = \pi . AM^2$, das ist dem Kreise mit dem Halbmesser AM. Die Oberfläche der Halbkugel ist also $= 2\pi aa$, der ganzen Kugel $= 4\pi aa$.

Exempel. II. Die beschreibende Linie sey eine Parabel, die sich um ihre Axe dreht. Die Gleichung ist $ax = yy$, wenn a der Parameter ist. Die Differentialgleichung ist $adx = 2ydy$, also $p = \frac{a}{2y}$; $1 + p^2 = \frac{4yy+aa}{4yy}$ $= \frac{4ax+aa}{4yy}$: also $dS = \pi dx \sqrt{(4ax + aa.)}$ Daraus ist $S = \frac{\pi(4ax+aa)^{\frac{3}{2}}}{6a} +$ Conſt. (Integralfor-

meln, 4.). Das Integral sey = o; wenn x = a ist
Der veränderliche Theil des Integrals ist = $\frac{1}{3}\pi aa$
für x = o, also ist Const = $-\frac{1}{3}\pi aa$, und den
nach die Oberfläche des paraboliſchen Konoids

$$S = \frac{1}{3}\pi \left(\frac{(4ax + aa)^{\frac{3}{2}}}{a} - aa\right).$$

Exempel. III. Die beſchreibende Linie ſey wied
rum eine Parabel, aber die Axe der Drehung ſey die L
nie AY, welche die Parabel in dem Scheitel A berühr
Die Abſciſſe auf der Drehungs-Axe genommen iſt AR =
die Ordinate MR = x. Daher iſt das Differenti
der von AM um AR beſchriebenen Oberfläch
$dS = 2\pi x \sqrt{(dx^2 + dy^2)} = 2\pi x\, dx \sqrt{(1 + p^2}$
$= \pi\, dx \sqrt{(4x^2 + ax)}$. Man ſetze a = 2b, ſo i
$dS = 2\pi\, dx \sqrt{(2bx + x^2)}$. Die Integratio
giebt

$$S = \pi(b+x)\sqrt{(2bx+x^2)} - \pi b^2 \int \frac{dx}{\sqrt{(2bx+xx)}} + C$$

(Integralformel. 37.). Es iſt $\int \frac{dx}{\sqrt{(2bx + xx)}}$
$= \log \text{nat} \frac{b + x + \sqrt{(2bx + xx)}}{\text{conſt.}}$. (Integra
form. 35.). Die Conſt. in dem logarithmiſchen Int
gral iſt = b. damit für x = o die Zahl zu dem Log
rithmen = 1, und der Logarithme dadurch = o werd
Das algebraiſche Integral bedarf keiner Conſtan
Alſo iſt

$$S = \pi (b + x) \sqrt{(2bx + x^2)} \quad . \quad . \quad . \quad .$$
$$- \pi b^2 \log \text{nat} \frac{b + x + \sqrt{(2bx + x^2)}}{b}.$$

Man ſetze $b + x = \frac{b}{\cos\varphi}$, ſo iſt $\sqrt{(2bx + xx}$

$= b \text{ tang } \Phi$, und $b + x + \sqrt{(2bx + xx)} = \frac{b(1 + \sin \varphi)}{\cos \varphi} = b \text{ tang } (45° + \frac{1}{2}\varphi)$; auch ...

$(b+x)\sqrt{(2bx + xx)} = \frac{bb \text{ tang } \Phi}{\cos \varphi}$

$= bb \text{ tang } \varphi . \sec \varphi$. Also ist

$S = \pi b^2 (\text{tang } \varphi . \sec \varphi - \log \text{nat tang } (45° + \frac{1}{2}\varphi))$

oder auch

$S = \pi b^2 (\text{tang } \varphi . \sec \varphi + \log \text{nat tang } (45° - \frac{1}{2}\varphi))$,

weil das Product der Tangenten von Winkeln, deren Summe 90 Grad ausmacht, die Einheit giebt, daher hier ihre Logarithmen gleich und entgegen gesetzt sind.

Die Rechnung in Käſtners Analyſis des Unendlichen S. 696 ff. hat eine andre Form als die hier geführte. Zuletzt iſt ein Fehler begangen, und $\frac{1}{4}$ ſtatt $\frac{1}{2}$ geſetzt. Daher muß der logarithmiſche Theil das Vorzeichen + erhalten.

Exempel. IV. Die Linie AZ ſey eine Hyperbel, die ſich um ihre Axe AX drehet; es wird die Oberfläche des konoidiſchen Körpers geſucht.

Die halbe Haupt-Axe der Hyperbel ſey $= a$, die halbe conjugirte $= b$; die Abſciſſe von dem Mittelpuncte aus genommen ſey $= x$, die Ordinate $= y$; ſo iſt die Gleichung für beide, $a^2 y^2 = b^2 x^2 - a^2 b^2$.

Daraus folgt die Differentialgleichung $a^2 y\, dy = b^2 x\, dx$,

und $p = \frac{b^2 x}{a^2 y}$, alſo $1 + p^2 = \frac{a^4 y^2 + b^4 x^2}{a^2 y^2}$

$= \frac{(a^2 + b^2) b^2 x^2 - a^4 b^2}{a^4 y^2}$.

Setzt man $a^2 + b^2 = c^2$, ſo iſt $1 + p^2 = \frac{b^2 (c^2 x^2 - a^4)}{a^4 y^2}$.

und $dS = \frac{2\pi b}{aa} dx \sqrt{(c^2x^2 - a^4)}$.

Es ist $\int dx \sqrt{(c^2x^2 - a^4)} = \frac{1}{2}x\sqrt{(c^2x^2 - a^4)} - \frac{1}{2}a^4 \int \frac{dx}{\sqrt{(c^2x^2 - a^4)}}$, und $\int \frac{dx}{\sqrt{(c^2x^2 - a^4)}}$

$= \int \frac{dx}{c\sqrt{(x^2 - a^4 : c^2)}} = \frac{1}{c}$ log. nat. $\frac{x + \sqrt{(x^2 - a^4 : c^2)}}{\text{const}} =$

$\frac{1}{c}$ log. nat. $\frac{cx + \sqrt{(c^2x^2 - a^4)}}{c.\,\text{const}}$ (Integr Formel, §6.30)

Beide Integrale sollen für $x = o$ Null seyn, also ist die Constans des algebraischen Integrals $= -\frac{1}{2}a\sqrt{(c^2a^2 - a^4)} = -\frac{1}{2}a^2b$. In dem logarithmischen Integral muß für $x = a$ die Zahl $= 1$ seyn, also ist $\frac{ca + ab}{c} =$ const. Folglich ist

$$S = \frac{\pi b}{aa}(x\sqrt{(c^2x^2 - a^4)} - a^2b)$$

$$- \frac{\pi a^2 b}{c} \text{log nat.} \frac{cx + \sqrt{(c^2x^2 - a^4)}}{a(b + c)} \sqrt{}$$

Man setze $\frac{cx}{aa} = \sec\varphi$, so ist $\frac{c^2x^2 - a^4}{a^4}$

$= \sec\varphi^2 - 1 = \tan g\varphi^2$, und $cx + \sqrt{(c^2x^2 - a^4)}$

$= aa\,(\sec\varphi + \tan g\varphi) = aa\,\text{tg}(45° + \frac{1}{2}\varphi)$, nach Gonimetrie (43.). Also ist

$$S = \frac{\pi b}{c}(a^2 \text{tg}\varphi \sec\varphi - bc) - \frac{\pi a^2 b}{c} \text{l. n.} \frac{a\,\text{tg}(45° + \frac{1}{2}\varphi)}{b + c}$$

Man setze den Winkel der Asymptoten mit der Axe $= \alpha$, so ist $\frac{b}{a} = \tan g\,\alpha$; $\frac{c}{a} = \sec\alpha$;

$\frac{\text{le}}{\text{la}}$ tang α. sec α; $\frac{b+c}{a}$ = tang α + sec α

= tang $(45° + \frac{1}{2}\alpha)$; $\frac{b}{c}$ = sin α. Daraus ist nun

$$S = \pi a^2 \sin\alpha \,(\sec\varphi . \tan\varphi - \sec\alpha . \tan\alpha)$$

$$- \pi a^2 \sin\alpha . \log \text{nat} \frac{\text{tg}(45° + \frac{1}{2}\varphi)}{\text{tg}(45° + \frac{1}{2}\alpha)}.$$

Exempel V. Der hyperbolische Bogen AM drehe sich um AY, die berührende im Scheitel. Nun ist $dS = 2\pi x \sqrt{(dx^2 + dy^2)} = 2\pi x\, dy \sqrt{(1 + q^2)}$, wo $q = \frac{dx}{dy}$ ist. Es ist $q = \frac{a^2 y}{b^2 x}$, und . . . .

$$1 + q^2 = \frac{a^4 y^2 + b^4 x^2}{b^4 x^2} = \frac{a^4 y^2 + a^2 b^2 y^2 + a^2 b^4}{b^4 x^2}$$

$= \frac{a^2 (c^2 y^2 + b^4)}{b^4 x^2}$. Demnach $dS = \frac{2\pi a\, dy}{b^2} \sqrt{(c^2 y^2 + b^4)}$.

Es ist $dy\,(c^2 y^2 + b^4) = \frac{1}{2} y \sqrt{(c^2 y^2 + b^4)}$

$+ \frac{1}{2} b^4 \int \frac{dy}{\sqrt{(c^2 y^2 + b^4)}}$; und $\int \frac{dy}{\sqrt{(c^2 y^2 + b^4)}}$

$= \frac{1}{c} \log \text{nat} \frac{y + \sqrt{(y^2 + b^4 : c^2)}}{\text{const}} \sqrt{}$

Also ist

$$S = \frac{\pi a y}{b^2} \sqrt{(c^2 y^2 + b^4)} + \frac{\pi a b^2}{c} \text{l. n.} \frac{cy + \sqrt{(c^2 y^2 + b^4)}}{b^2}$$

wo die Const. in dem logarithmischen Integral gehörig beygefügt ist.

Man setze $\frac{cy}{bb} = \tan\omega$, so ist $\frac{c^2 y^2 + b^4}{b^4}$

$= \tan\omega^2 + 1 = \sec\omega^2$; auch sey wiederum der Winkel der Asymptoten mit der Axe $= \alpha$, so

ist $\frac{ay}{b^2} = \frac{a}{c} \text{ tang } \omega = \text{cos } \alpha . \text{ tang } \omega$. Dadurch wird

$S = \pi b^2 \text{ cos } \alpha (\text{tang } \omega . \text{ sec } \omega + \text{log nat } (\text{tang } \omega + \text{sec } \omega))$

oder

$S = \pi b^2 \text{ cos } \alpha (\text{tang } \omega . \text{ sec } \omega + \text{log nat . tang } (45^\circ + \frac{1}{2}\omega))$.

Von der Complanation eines Sphäroids, sowohl des gedruckten als des gestreckten, mit der Anwendung auf die Erde, in dem Artikel Sphäroid.

Man ziehe auf die berührende MT die senkrechte MN, welche die Abscissenlinie in N schneidet. Die Subnormale PN ist $= \frac{y\,dy}{dx}$ (berührende Linie, 42.); also

$MN = \sqrt{(y^2 + \frac{y^2\,dy^2}{dx^2})} = y\sqrt{(1 + p^2)}$. Man setze $MN = z$, so ist das Differential der von AM beschriebenen runden Oberfläche $= 2\pi z\,dx$. Man verlängere jede Ordinate PM der krummen Linie AMZ, bis sie der Normale MN gleich ist, so entsteht aus den Endpuncten der auf die Abscissenlinie solchergestalt gestellten MN eine zweyte krumme Linie, von deren Area das Differential $= z\,dx$ ist. Für dieselbe Abscisse beider Curven verhält sich die von AM beschriebene Oberfläche zu der Area der zweyten Curve, wie $2\pi : 1$, oder wie der Umfang eines Kreises zu dessen Halbmesser.

Dieser Satz ist für die Geschichte der Mathematik merkwürdig. Leibnitz erzählt, daß derselbe ihn auf die Differentialrechnung geleitet habe. Ganz in dem Anfange seines mathematischen Studiums, sagt er, sey ihm bey dem Anblick eines gewissen Beweises vom der Größe einer Kugelfläche plötzlich ein großes Licht aufgegangen. Er habe eingesehen, daß überhaupt eine Figur, die von den Normalen einer Curve, wenn sie auf die Are senkrecht gestellt werden, erzeugt wird, (wie am Kreise von den Halbmessern), der Oberfläche des runden, durch die Umdrehung

ſener Figur um ihre Axe entſtandenen Körpers proportional ſey. Dieſer Satz habe ihm ſehr viel Vergnügen gemacht, und er habe ſogleich das charakteriſtiſche Dreyeck erdacht, deſſen Seiten indiviſibilia, oder genauer zu reden unendlich kleine, oder Differentialgrößen ſind, woraus er eine Menge Lehrſätze ohne Mühe hergeleitet habe. De Geometria recondita, cet. Acta Er. 1686. Opp. Tom. III. p. 193.

Complement, Ergänzung, iſt überhaupt, was einer Größe zugeſetzt werden muß, um ein gewiſſes Ganzes derſelben auszumachen.

Complement eines eigentlichen Bruchs iſt der Unterſchied deſſelben von der Einheit.

Arithmetiſches Complement eines Logarithmen iſt der Unterſchied deſſelben von 1 oder von 10. z. B. das Complement von log. 4,75 = 0,6766936 iſt 0,3233064. Das Complement von log. 475 = 2,6766936 iſt 7,3233064. Man mag auch das Complement eines Logarithmen, der größer als 1 iſt, in Beziehung auf die Einheit nehmen, wenn dieſer 10 geliehen werden, die man aber als ſubtractiv hinter dem Logarithmen anzeichnen, oder ſich als geliehen gedenken muß. So iſt das Complement des Logarithmen 2,6766936 dieſes; 7,3233064 — 10, oder ſchlechtweg 7,3233064. Der Logarithme eines eigentlichen Bruchs wird am bequemſten als das Complement des umgekehrten uneigentlichen angeſehen, und auf die angezeigte Art geſchrieben. So iſt $\log \frac{69}{8567} = 7{,}9060203 - 10$ da $\log \frac{8567}{69} = 2{,}0939797$ iſt. Die beiden Brüche mit einander multiplicirt geben zum Producte die Einheit; die Summe ihrer Logarithmen iſt = 0 = log. 1. Der Logarithme der Cotangente eines Winkels iſt das

2. Man ziehe auf die berührenden die Normalen MR, mR, welche sich in R schneiden, so ist der Bogen Mm nach AB hin concav, wenn der Durchschnittspunct R nach derselben Seite, wie AB, hin liegt; conver, wenn beide auf entgegengesetzten Seiten des Bogens liegen.

3. Die Normalen schneiden die Abscissenlinie in Q und q. Werden die Abscissen von A her genommen, und folgt die größere Ordinate auf die kleinere, so ist für einen concaven Bogen (Fig. 76.) der spitze Winkel AQM kleiner als Aqm. Nimmt man die Abscissen von B her, wobey die größere Ordinate vor der kleinern vorhergeht, so ist ebenfalls der vorhergehende stumpfe Winkel Bqm kleiner als der nachfolgende BQM. Die Tangente des kleinern stumpfen Winkels ist zwar, absolut genommen, größer als die des größern stumpfen, allein da beide negativ sind (Goniometrie, 8.), so wird tang Bqm als die kleinere, und tang BQM als die größere betrachtet (s. entgegengesetzte Größen), daher auch hier die Tangente des vorhergehenden Winkels der Abscissenlinie mit der Normale, auf der Seite des Anfangspunctes der Abscissen, kleiner ist als die Tangente des nachfolgenden Winkels, eben so wie für spitze Winkel.

Für einen convexen Bogen (Fig 77.) ist hingegen die Tangente des vorhergehenden Winkels der Abscissenlinie mit der Normale, auf der Seite des Anfangspunctes der Abscissen, größer als die Tangente des nachfolgenden Winkels, in beiden Fällen, die Veränderungen der Coordinaten mögen gleichnamig oder ungleichnamig seyn.

4. Damit der mögliche Wechsel des Concaven und Convexen an einem endlichen Bogen nicht in die Frage komme, so muß der Bogen unendlich klein genommen werden Die Frage, ob die krumme Linie in einem Puncte M concav oder conver sey, zu beantworten, muß man untersuchen, ob das Differential der Tangente des Winkels, welchen die Normale mit der Abscissenlinie, nach dem Anfangspunete der Abscissen hin macht, positiv oder negativ ist.

duct der Auswahl anzeigt. Leibnitz hat den Ausdruck, Complexion, aufgebracht in der Abhandlung de arte combinatoria, Lipsiae 1668. Er ist etymologisch richtiger als Combination, wiewohl er doch nicht die Unionen mit anzeigt. In dem Artickel, Combination, habe ich, wegen der nahen Beziehung auf die combinatorische Analysis, bloß den Ausdruck, Combination, für die Verbindung mehrerer Dinge aus einer gegebenen Anzahl, mit Einschluß der einzelnen und aller zusammen, gebraucht. Die deutschen neuern Analysten gebrauchen häufig den Ausdruck, Complexion; die Ausländer nur, Combination, (s. Combination.).

Compositio ist I. dasselbe, was mit einem griechischen Worte Synthesis heißt, s. Analysis als Methode, und, Synthetische Methode. II. compositio motus, die Erzeugung einer Bewegung durch zwey oder mehrere besondere Bewegungen, s. Bewegung. in der zweyten Abtheilung III. Compositio rationum, die Entstehung eines Verhältnisses aus zwey oder mehreren, gleichen oder ungleichen, Verhältnissen, s. Verhältniß.

Concav und **Conver, hohl** und **erhaben,** sind verbundene Begriffe, da was nach einer Gegend hin hohl ist, nach der andern hin erhaben ist. Ein Bogen einer krummen Linie ist concav nach einer Gegend, wenn der Durchschnitt der berührenden an den Endpuncten nach der entgegengesetzten hin liegt, und dieses für je zwey Puncte dieses Bogens statt findet. Der Bogen ist conver, nach einer Gegend, wenn der Durchschnitt der berührenden nach eben derselben hin liegt.

Es sey Mm (Fig. 76 und 77. Tab. V.) ein Bogen einer krummen Linie Ll, und AB die Abscissenlinie. Die Berührende in M ist Dd, in m ist es Ee, ihr Durchschnittspunct ist F. In Fig. 76 ist der Bogen Mm concav gegen AB, in Fig. 77. ist Mm conver gegen AB.

2. Man ziehe auf die berührenden die Normale MR, mR, welche sich in R schneiden, so ist der Boge Mm nach AB hin concav, wenn der Durchschnitt punct R nach derselben Seite, wie AB, hin liegt; con ver, wenn beide auf entgegengesetzten Seiten des Bogen liegen.

3. Die Normalen schneiden die Abscissenlinie in und q. Werden die Abscissen von A her genommen, un folgt die größere Ordinate auf die kleinere, so ist für eine concaven Bogen (Fig. 76.) der spitze Winkel A Q M klein als A q m. Nimmt man die Abscissen von B her, wobe die größere Ordinate vor der kleinern vorhergeht, so i ebenfalls der vorhergehende stumpfe Winkel B q m klein als der nachfolgende B Q M. Die Tangente des kle nern stumpfen Winkels ist zwar, absolut genommen größer als die des größern stumpfen, allein da beid negativ sind (Goniometrie, 8.), so wird tang B q m al die kleinere, und tang B Q M als die größere betrachte (s. entgegengesetzte Größen), daher auch hier die Tangent des vorhergehenden Winkels der Abscissenlinie mit der Nor male, auf der Seite des Anfangspunctes der Abscissen kleiner ist als die Tangente des nachfolgenden Winkels eben so wie für spitze Winkel.

Für einen convexen Bogen (Fig 77.) ist hingegen di Tangente des vorhergehenden Winkels der Abscissenlinie mi der Normale, auf der Seite des Anfangspunctes der Ab scissen, größer als die Tangente des nachfolgenden Win kels, in beiden Fällen, die Veränderungen der Coordina ten mögen gleichnamig oder ungleichnamig seyn.

4. Damit der mögliche Wechsel des Concaven un Convexen an einem endlichen Bogen nicht in die Frag komme, so muß der Bogen unendlich klein genomme werden Die Frage, ob die krumme Linie in einem Punc M concav oder convex sey, zu beantworten, muß man un tersuchen, ob das Differential der Tangente des Winkel welchen die Normale mit der Abscissenlinie, nach dem An fangspunete der Abscissen hin macht, positiv oder negativ ist

5. Es sey $AP = x$; $PM = y$, und pm größer als PM, so ist die Tangente des W. $PMD = -\frac{dx}{dy}$, (berührende Linie, 14.); also auch tang $PQM = \frac{dx}{dy}$. Die krumme Linie ist in M gegen die Abscissenlinie concav, wenn das Differential des Quotienten $\frac{dx}{dy}$ positiv ist, und convex, wenn dieses Differential negativ ist. Ist der Quotient $\frac{dx}{dy}$ negativ, d. i. wenn die Ordinaten abnehmen, indem die Abscissen wachsen, so bleibt diese Bestimmung unverändert, wofern nur x und y bei positiv sind, wie hier angenommen ist.

6. Da für einen endlichen durchaus concaven oder convexen Bogen die Lage des Durchschnittspunkts R in Absicht auf Mm nicht von der Größe des Unterschiedes p der beiden Abscissen, AP, Ap, abhängt, so kommt sie auch bey einem unendlich kleinen Bogen nicht auf das Verhältniß der Differentiale der Abscissen gegen einander an. Es muß daher dx unveränderlich gesetzt werden, damit nicht die Veränderungen dieses Differentials Einfluß auf die Qualität des Differentials $\frac{dx}{dy}$ haben mögen.

Es ist nun $d.\frac{dx}{dy} = -\frac{dx\,d^2y}{dy^2}$, oder

$$\frac{dx}{dy} = -\frac{dx^2}{dy^2}\cdot\frac{d^2y}{dx}.$$

7. Das Differential, $\frac{d^2y}{dx}$, zu finden, suche man aus der Gleichung zwischen x und y zuerst den Quotienten $\frac{dy}{dx}$

und differentiire dieſen, worauf man in dem Wer
Differentials, wenn dy darin vorhanden iſt, für

ſeinen Werth durch dx ſetzt. Dadurch erhält —

die Form Pdx, wo P eine Function x von und
auch einer von beiden allein iſt.

8. Ob die Abſciſſe poſitiv oder negativ iſt, ma
nen Unterſchied bey der gegenwärtigen Unterſuchun
Folge der Abſciſſen wird darum nicht umgekehrt, n
negativ werden. So wie bey poſitiven x auf +
Abſciſſe $+ x + \Delta x$ folgt, ſo muß man bey ne
auf $- x$ die Abſciſſe $- x + \Delta x$ folgen laſſen.
Differenz Δx, und ſo auch das Differential dx, ſi
mer additiv.

9. Für negative y ſind die Winkel A Q M und
(oder B q m, B Q M) negativ, alſo auch ihre Tan
und der Unterſchied dieſer Tangenten, nämlich in
hung auf die Lage, die für poſitive Winkel Statt

Dadurch wird das Differential von $\frac{dx}{dy}$, dem für
Ordinaten entgegengeſetzt, und daher wird auch der
rentialquotient $\frac{d^2y}{dx}$, ſo wie $\frac{d^2y}{dx^2}$ oder P das Ent
geſetzte von dem Werthe für dieſelben Ordinaten a
ſitiv betrachtet.

Oder man lege eine neue Abſciſſenlinie der anf
chen parallel in dem Abſtande c, größer als eine ne
Ordinate y abſolut genommen, und ſetze die Ord
zu der neuen Abſciſſenlinie, $z = c + y$. Alsdan
poſitiv, wo jene y negativ iſt, und $\frac{d^2z}{dx^2}$ zeigt eine ent
geſetzte Lage des Bogens an als $\frac{d^2y}{dx^2}$ angiebt.

10. Für positive y ist eine krumme Linie nach der Axe r Abscissen hin concav, wo $\frac{d^2y}{dx^2}$ negativ ist, con- ex, wo dieser Quotient positiv ist. Denn in jenem Falle ächst die Tangente $\frac{dx}{dy}$ des Winkels der Normale mit er Abscissenlinie, in diesem nimmt sie ab.

Für negative y ist die krumme Linie nach der Abscis- nlinie hin concav, wo $\frac{d^2y}{dx^2}$ positiv ist, convex, wo ieser Quotient negativ ist. Denn hier werden die Win- el der Normalen mit der Abscissenlinie negativ, und ein egatives Differential zeigt daher eine absolute Zunahme Concavität, so wie ein positives eine absolute Vermin- erung (Convexität) anzeigt.

11. Man kann beide Regeln zusammenziehen in fol- ende: Wo die Ordinate und der Quotient $\frac{d^2y}{dx^2}$ leichnamig sind, da ist die Curve gegen die Abscissen- nie convex; wo beide ungleichnamig sind, da ist sie oncav.

13. Exempel. I. Die krumme Linie sey eine Para- el, deren Gleichung ist $ax = yy$. Hieraus ist die Dif- rentialgleichung, $a\,dx = 2y\,dy$, und die vom zweyten rade, $0 = 2\,dy^2 + 2y\,d^2y$, oder $0 = \frac{a^2\,dx^2}{4y^2} + y\,dy$, lso $\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{a^2}{4y^3}$. Dieser Quotient und die Or- inaten sind ungleichnamig und daher ist die ganze Linie egen die Axe concav.

13. Exempel. II. Die krumme Linie sey eine Hy-

und differentiire dieſen, worauf man in dem Wert
Differentials, wenn dy darin vorhanden iſt, für

ſeinen Werth durch dx ſetzt. Dadurch erhält $\frac{c}{}$

die Form Pdx, wo P eine Function x von und y
auch einer von beiden allein iſt.

8. Ob die Abſciſſe poſitiv oder negativ iſt, mac
nen Unterſchied bey der gegenwärtigen Unterſuchung
Folge der Abſciſſen wird darum nicht umgekehrt, w
negativ werden. So wie bey poſitiven x auf +
Abſciſſe $+ x + \Delta x$ folgt, ſo muß man bey neg
auf $- x$ die Abſciſſe $- x + \Delta x$ folgen laſſen.
Differenz Δx, und ſo auch das Differential dx, ſi
mer additiv.

9. Für negative y ſind die Winkel AQM und A
(oder Bqm, BQM) negativ, alſo auch ihre Tang
und der Unterſchied dieſer Tangenten, nämlich in
hung auf die Lage, die für poſitive Winkel Statt

Dadurch wird das Differential von $\frac{dx}{dy}$, dem für p
Ordinaten entgegengeſetzt, und daher wird auch der
rentialquotient $\frac{d^2y}{dx}$, ſo wie $\frac{d^2y}{dx^2}$ oder P das Ent
geſetzte von dem Werthe für dieſelben Ordinaten al
ſitiv betrachtet.

Oder man lege eine neue Abſciſſenlinie der anf
chen parallel in dem Abſtande c, größer als eine ne
Ordinate y abſolut genommen, und ſetze die Ordi
zu der neuen Abſciſſenlinie, $z = c + y$. Alsdann

poſitiv, wo jene y negativ iſt, und $\frac{d^2z}{dx^2}$ zeigt eine entg
geſetzte Lage des Bogens an als $\frac{d^2y}{dx^2}$ angiebt.

10. Für positive y ist eine krumme Linie nach der Axe der Abscissen hin concav, wo $\frac{d^2y}{dx^2}$ negativ ist, convex, wo dieser Quotient positiv ist. Denn in jenem Falle nächst die Tangente $\frac{dx}{dy}$ des Winkels der Normale mit der Abscissenlinie, in diesem nimmt sie ab.

Für negative y ist die krumme Linie nach der Abscissenlinie hin concav, wo $\frac{d^2y}{dx^2}$ positiv ist, convex, wo dieser Quotient negativ ist. Denn hier werden die Winkel der Normalen mit der Abscissenlinie negativ, und ein negatives Differential zeigt daher eine absolute Zunahme (Concavität), so wie ein positives eine absolute Verminderung (Convexität) anzeigt.

11. Man kann beide Regeln zusammenziehen in folgende: Wo die Ordinate und der Quotient $\frac{d^2y}{dx^2}$ gleichnamig sind, da ist die Curve gegen die Abscissenlinie convex; wo beide ungleichnamig sind, da ist sie concav.

13. Exempel. I. Die krumme Linie sey eine Parabel, deren Gleichung ist $ax = yy$. Hieraus ist die Differentialgleichung, $adx = 2ydy$, und die vom zweyten Grade, $o = 2dy^2 + 2yd^2y$, oder $o = \frac{a^2dx^2}{4y^2} + ydy$, also $\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{a^2}{4y^3}$. Dieser Quotient und die Ordinaten sind ungleichnamig und daher ist die ganze Linie gegen die Axe concav.

13. Exempel. II. Die krumme Linie sey eine Hy-

choide der Alten sey, und machte den Baumeistern das Instrument sie zu zeichnen, welches Nikomedes ersonnen hatte, bekannt. Cours d' Architecture par d' Aviler, p. 116. edit. 1750.

Die Conchoide ist zur Messung der Fässer angewandt. Müller, ein Ingenieur und Visirer zu Gröningen, nahm an, daß die Linie, nach welcher die Faßdauben gekrümmt sind, der obern Conchoide MBm nahe komme, so daß ein Faß durch die Umdrehung des Theils MBm um den Theil Pp der Linie XAX erzeugt werde, wo AB den Hauptmesser des Fasses durch das Spundloch, und PM = pm der Halbmesser der Böden ist. Müllers Versuch den Inhalt der Fässer durch Anwendung der Muschellinie zu finden. Aus dem Holländ. Leipzig 1784. Erinnerungen wegen der fehlerhaften Rechnung hat Oberreit gemacht im Leipziger Magazin für die Mathematik, 1787. II. VII.

Die Gleichung für die Conchoide ist leicht gefunden. Es sey AB = a; CA = b; AP = x; PM = y, so daß die positiven Ordinaten y für die obere Conchoide MBm gelten. Man ziehe CM, so ist CA : AR = PM : PR; und daraus CA + PM : AR + PR = PM : PR. Also ist $PR = \frac{xy}{b+y}$ Da RM = a, so ist $\frac{x^2y^2}{(b+y)^2} + y^2 = a^2$,

und die geordnete Gleichung für die Conchoide ist

$$y^4 + 2by^3 + x^2y^2 - 2a^2by - a^2b^2 = 0.$$

$$- a^2 \text{,,}$$

$$+ b^2 \text{,,}$$

Eine Ordinate an der untern Conchoide QN sey = z, die Abscisse AQ = u; so ist $QR = \frac{uz}{b-z}$, und $\frac{u^2z^2}{(b-z)^2} + z^2 = a^2$. Die Gleichung zwischen u und

ist in der zwischen x und y begriffen, wenn y negativ genommen wird.

Für jede Abscisse hat die Ordinate y entweder zwey oder vier Werthe. Sie hat wenigstens zwey Werthe, da die Linie CM sich so lange drehen kann, bis daß sie der X parallel ist. Alsdann ist x unendlich groß, und $= o$. Die Abscissenlinie AX ist die Asymptote der obern und untern Conchoide. Diese nähern sich immer mehr einer konischen gleichseitigen Hyperbel. Denn die Gleichung, welcher sich ihre Gleichung immer mehr nähert, $x^2 y^2 = a^2 b^2$ oder $xy = ab$, das ist die für eine Hyperbel, deren Abscissen auf einer ihrer Asymptoten und die Ordinaten parallel mit der andern genommen werden. Diese macht also mit jener einen rechten Winkel. Die Hyperbel ist daher eine gleichseitige, an welcher das Quadrat der halben Axe $= 2ab$ ist.

Die Gleichung für die Conchoide kann auch vier Ordinaten für dieselbe x geben, nämlich, wenn a größer als b ist. Dies ist der Fall in der Conchoide (Fig. 79) wo AC kleiner als AB ist. Hier reicht in dem Anfange der Abscissen die Ordinate in dem untern Theile der Conchoide über C hinaus bis D. In der Lage CF der sich drehenden Linie ist $EF = EC$. Für alle Lagen zwischen CB und CF fällt der Endpunct der die untere Conchoide beschreibenden Linie über C hinaus, und beschreibt daselbst den Bogen DGC, so wie bey entgegengesetzter Drehung von B nach F ein gleicher Bogen DHC beschrieben wird. Bey fortgesetzter Drehung über F hinaus beschreibt der nach C hin liegende Punct den Zweig CN bis ins Unendliche; so wie auf der andern Seite der Zweig Cn beschrieben wird. Die untere Conchoide schürzt bey C einen Knoten. Bey der Drehung nach der einen Seite wird der Theil DGCN, bey der Drehung nach der andern, der Theil DHCn beschrieben. Es sey KH die Ordinate, welche den Bogen DHC in H berühret, und für eine Abscisse, die kleiner als AK ist, vier Ordinaten vorhanden, die positive PM an der obern Conchoide,

und drey negative Pm, eine an dem Zweige CN, u
zwey an der Ovale. Eben so auf der andern Seite v
AD. Die Succession der Vorzeichen in der Gleichu
für y zeigt eine einzige positive Würzel an, da nur e
Wechsel vorhanden ist, das dritte Glied mag das Vo
zeichen + oder — haben.

Der Punct C des Knotens ist ein Doppelpunct,
er zu zwey Zweigen GCN und HCn gehört. Alle
wenn auch AC größer ist als AD, wie in Fig. 78. w
durch die Ovale mit dem Knoten wegfällt, so bleibt d
Pol C doch ein doppelter, zu der Curve gehöriger (conj
girter) Punct. Denn die Gleichung für die Conchoi
wird für $x = o$ folgende, $y^4 + 2by^3 + (b^2 - a^2)y$
$- 2a^2by - a^2b^2 = o$. Diese hat die Wurzel
$+a; -a; -b; -b$. Also ist AC eine zu der A
fesse $x = o$ gehörige Ordinate, eben so gut, wie A
und AD.

Wenn $a = b$ genommen wird, so fällt die Ovale in ein
Punct in eine Spitze, zusammen, die ein dreyfach
Punct ist. Denn die Gleichung ist nun für $x = o$ fo
gende, $y^4 + 2ay^3 - 2a^3y - a^4 = o$. Diese hat ei
positive Wurzel, $+a$, und drey negative, jede $= -$
Sie ist ein Product aus $y - a$ in $(y + a)^3$.

Aus der zuerst gefundenen Form der Gleichung für d
Conchoide folgt $x = + \frac{(b+y)\sqrt{(a^2-y^2)}}{y}$. D
Construction der Curve zeigt, daß die gerade BD sie
zwey gleiche und ähnliche Theile theilt, daher zu einer O
dinate, positiven oder negativen, zwey gleiche entgegeng
setzte x gehören. Für positive y erfordert ein positives
das Vorzeichen +; für negative y in Fig. 78. und
dem Bogen CN in Fig. 79. das untere Vorzeichen; a
der Ovale aber das obere, weil an dieser die Ordinat
größer als b sind.

Die Zeichnung giebt zu erkennen, daß die Conchoi
Fig. 78.) in B und D, so wie die obere, in Fig. 79. b

B gegen die Abscissenlinie concav ist. Da aber diese Linie sich einer Hyperbel nähert, je weiter sie fortgesetzt wird, so muß sie gegen die Abscissenlinie convex werden. Es ist die Frage, wo der Übergang vom Concaven zum Convexen geschieht. In dem Artikel, Concav und Conver, (II.) ist gezeigt, daß eine Curve gegen die Abscissenlinie conver oder -concav ist, nachdem der Quotient $\frac{d^2y}{dx^2}$ mit der Ordinate gleichnamig oder ungleichnamig ist, daher, wo dieser $= o$ wird, und seine Beziehung auf die Ordinaten wechselt, der Übergang von dem einen zu dem andern geschieht, (eb. daf. 16.).

Aus der Gleichung $x = \frac{(b+y)\sqrt{(a^2-y^2)}}{y}$

oder $x = (\frac{b}{y} + 1)\sqrt{(a^2-y^2)}$ folgt $\frac{dx}{dy}$

$= -\frac{a^2b+y^3}{y^2\sqrt{(a^2-y^2)}}$, oder $\frac{dy}{dx} = -\frac{y^2\sqrt{(a^2-y^2)}}{a^2b+y^3}$

Die Differentiation dieses Quotienten sich zu erleichtern, setze man $y^2\sqrt{(a^2-y^2)} = t$, und $a^2b + y^3 = u$, so ist $\frac{d^2y}{dx} = -\frac{udt-tdu}{u^2}$, und $\frac{d^2y}{dx^2} =$

$\frac{t}{u^2}\cdot\frac{dt}{dy} - \frac{t^2}{u^3}\cdot\frac{du}{dy}$; oder $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{t}{u^2}(\frac{dt}{dy} - \frac{t}{u}\cdot\frac{du}{dy})$

Nun ist $\frac{dt}{dy} = \frac{2a^2y-3y^3}{\sqrt{(a^2-y^2)}}$, und $\frac{du}{dy} = 3y^2$,

also $\frac{dt}{dy} - \frac{t}{u}\cdot\frac{du}{dy} = \frac{2a^2y-3y^3}{\sqrt{(a^2-y^2)}}$

$-\frac{3y^4\sqrt{(a^2-y^2)}}{a^2b+y^3} = \frac{a^2y(2a^2b-3by^2-y^4)}{(a^2b+y^3)\sqrt{(a^2-y^2)}}$

und $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{a^2y^5(2a^2b - 3by^2 - y^5)}{(a^2b + y^5)^5}$.

In B, wo $y = +a$ ist, ist dieser Quotient $= -\frac{a}{(a+b)^2}$; in D, wo $y = -a$, ist derselbe $= +\frac{a}{(b-a)^2}$ oder $= +\frac{a}{(a-b)^2}$ In beiden Puncten ist daher die krumme Linie concav gegen die Basis. In dem Knoten, wo $y = -b$, ist jener Quotient $= -\frac{2a^2b}{(a^2-b^2)^2}$, daher die krumme Linie hier convex ist.

Es sey $y^5 + 3by^2 - 2a^2b = 0$, so sind die Wurzeln dieser Gleichung die Ordinaten in den Wendungspuncten. Wenn die Werthe dieser Gleichung werden sich entgegengesetzt, wenn y größer und kleiner als eine der Wurzeln genommen wird. Die Gleichung kann drey mögliche Wurzeln, oder nur eine haben. Wenn sie drey mögliche Wurzeln hat, so sind darum nicht drey Wendungspuncte auf derselben Seite von der Axe C A B vorhanden. Denn die Wurzeln der Gleichung können keine Ordinaten an der Conchoide seyn, wenn sie nicht kleiner als a sind. Nun ist das Product der drey Wurzeln $= 2a^2b$, also größer als $2a^3$, und auch als a^3, wenn b größer als a ist, wie in Fig. 78. In diesem Falle ist also eine Wurzel der Gleichung größer als a. Ist $b < a$, wie in Fig. 79, so müßte $2a^2b$ kleiner als a^3, also $2b < a$ seyn, wenn jede der drey Wurzeln kleiner als a ist. Wir wollen sehen, ob bey dieser Bedingung drey mögliche Wurzeln vorhanden sind.

Man setze $y = z - b$, das ist, man lege die Abscissenlinie durch C parallel mit der anfänglichen, so verwandelt sich die für y gefundene Gleichung in diese, $z^3 - 3b^2z + 2b(b^2 - a^2) = 0$. Wenn diese Glei-

hung drey mögliche Wurzeln hat, so ist $4(3b^2)^3$ größer oder so groß als $27(2b(b^2 - a^2))^2$, (Gleichung III. 13.), das ist, b^4 größer oder so groß als $(b^2 - a^2)^2$, oder als $b^4 - 2a^2b^2 + a^4$. Daher ist $2a^2b^2 >$ oder $= a^4$, das ist $2b^2 >$ oder $= a^2$. In dem Falle, $a\,b > a$ ist, hat demnach die Gleichung immer drey mögliche Wurzeln, aber nur zwey derselben sind, wie schon bemerkt ist, Ordinaten an der Conchoide. Sie muß drey mögliche Wurzeln haben, weil zwey Wendungspuncte auf jeder Seite von CB vorhanden sind, also zwey Wurzeln möglich sind, welches die dritte auch möglich macht. In dem Falle, $b < a$, muß, wenn jede der drey Wurzeln kleiner als a seyn soll, $2b < a$ seyn, also $2ab < a_2$. Da aber bey drey möglichen Wurzeln $2b^2 >$ oder $= a^2$, also noch mehr $2ab >$ oder $= a^2$ ist, so widerspricht die eine Bedingung der andern.

Man setze $y = z - a$, oder lege die Abscissenlinie durch D parallel mit der anfänglichen. Die Gleichung y verwandelt sich in diese,

$$z^3 - 3(a - b)z^2 + 3a(a - 2b)z - a^2(a - b) = 0.$$

Ist b größer als a, so sind alle drey Wurzeln möglich, und wegen der Succession der Vorzeichen $+ + - +$ in diesem Falle sind zwey Wurzeln positiv, und eine ist negativ, (Gleichung, III. 9.). Die letztere ist keine Ordinate. In dem Falle, $b < a$, giebt die allgemeine Bedingung für drey mögliche Wurzeln, $2b^2 >$ oder $= a^2$, daß $2ab > a^2$ oder $2b > a$ sey. Die Succession der Vorzeichen in der Gleichung ist $+ - - -$; daher hat die Gleichung nur eine positive Wurzel als Ordinate an dem einzigen Wendungspuncte auf einer Seite von DB. Die beiden negativen Wurzeln sind keine Ordinaten.

Der Grund, daß die zwey Wendungspuncte durch eine Gleichung vom dritten Grade angezeigt werden, liegt darin, daß sowohl zwey Wendungspuncte als einer an derselben Seite von CB möglich sind, daher konnten die zu-

gehörigen Ordinaten nicht durch eine quadratiſche Gleichung gefunden werden, da dieſe entweder zwey oder gar keinen Wendungspunct geben würde. Cramer in der Anal. des lignes courbes p. 516. ſagt aus Übereilung, daß die drey Würzeln der Gleichung $y^3+3by^2-2a^2b=0$ die Ordinaten zu den Wendungspuncten geben.

Wenn $a^2b+y^3=0$, oder wenn $y=-\sqrt[3]{a^2b}$ iſt ſo iſt der Quotient $\frac{d^2y}{dx^2}$ unendlich groß. Dieſes findet nur Statt, wenn b kleiner als a iſt, weil y nicht größer als a ſeyn kann. Für eben dieſen Werth von y iſt der Quotient $\frac{dx}{dy}=0$, das iſt, die Tangente des Winkels der berührenden oder der Curve mit der Ordinate iſt Null, oder dieſer Winkel iſt Null. Das geſchieht (Fig. 79.) in H und G, wo die Ordinate zugleich berührende iſt. In dieſen Puncten ſchließt ſich der convexe Bogen an den concaven, wie in den Falle, da $\frac{d^2y}{dx^2}=0$ iſt, aber beide liegen an derſelben Seite der berührenden. Daher ſind H und G nicht als Wendungspuncte zu betrachten. Beide Bogen gehören nicht zu derſelben Folge der Ordinaten, ſondern zu zwey verſchiedenen.

Aufgabe. Die obere Conchoide drehe ſich um die Aſymptote als Axe, es wird der Inhalt des runden Körpers geſucht, der zwiſchen dem von AB und PM beſchriebenen Kreisflächen liegt.

Der Inhalt ſey $=Z$, ſo iſt $dZ=\pi y^2\,dx$; (ſ. Umdrehung). Da $dx=-\frac{(a^2b+y^3)\,dy}{y^2\sqrt{(a^2-y^2)}}$ iſt, ſo iſt $dZ=-\frac{\pi(a^2b+y^3)\,dy)}{\sqrt{(a^2-y^2)}}$.

s ist $\int \frac{dy}{\sqrt{(a^2-y^2)^3}} = \text{Ang. sin}\frac{y}{a}$, und $\int \frac{y^3 dy}{\sqrt{(a^2-y^2)}}$
$= -\frac{1}{3}(2a^2+y^2)\sqrt{(a^2-y^2)}$, (Integralformel,
3: 40.)

so . . . .

$$Z = \text{Const.} - \pi a^2 b \,\text{Ang sin}\frac{y}{a} + \tfrac{1}{3}\pi(2a^2+y^2)\sqrt{(a^2-y^2)}$$

da $Z = 0$ für $y = a$, so ist $\text{Const} = \frac{1}{2}\pi^2 a^2 b$, und

$$Z = \pi a^2 b\left(\tfrac{1}{2}\pi - \text{Ang. sin}\frac{y}{a}\right) + \tfrac{1}{3}\pi(2a^2+y^2)\sqrt{(a^2-y^2)}$$

der

$$Z = \pi a^2 b \,\text{Ang. cos}\frac{y}{a} + \frac{\pi(2a^2+y^2)xy}{3(b+y)}.$$

Der Inhalt des ganzen ins Unendliche ausgestreckten onchoidischen Körpers, auf der einen Seite der von AB eschriebenen Kreisfläche, ist $= \pi a^2(\frac{1}{2}\pi b + \frac{8}{3}a)$.

Müllers Verfahren, den Inhalt eines conchoidischen Fasses zu finden, ist sehr unbequem und zugleich fehlerhaft. Er weiß die Integration nicht zu bewerkstelligen, und nimmt deswegen Guldins Regel vom Schwerpuncte zu Hülfe. Er erlaubt sich $b = a$ zu setzen, da doch b durch die beiden Durchmesser und die Länge des Fasses bestimmt ist. Oberreits Methode der Integration im Leipz. Magaz. 1787 ist auch unbequem, da er sich ganz unnöthiger Weise der Reihen bedient, wodurch seine Rechnung fast vier Seiten anfüllt, ohne ein vollständiges Resultat zu geben.

Exempel. Von einem conchoidischen Fasse sey der Halbmesser des Bauches, $a = 15$ Zoll, des Bodens $= y = 13$ Zoll. Die halbe Länge des Fasses, $x = 21,875$ Zoll. Da $b + y = \frac{xy}{\sqrt{(a^2-y^2)^3}}$ so ist $b + y = 38,001$, und $b = 25,001$. Ferner

ist Ang. cos $\frac{y}{a}$ = 29° 5′ 5½ in Graden, daraus

Theilen das Halbmessers als der Einheit = 0,5222
Auch ist log π = 0,4971499. Also ist . . .

πa^2 Ang. cos $\frac{y}{a}$ = 9230, und . . . . . .

$\frac{1}{3}\pi (2a^2 + y^2) \sqrt{(a - y^2)}$ = 4851, so
Z = 14081 Cubikzoll, und der Inhalt des ganzen
ses = 28162 Czoll. Müller findet nach seiner Rechn
26874 Czoll. mit einem hier sehr unbrauchbaren Decim
bruche von 8 Ziffern. Diese sind nach der Berechnung
Leipziger Übersetzers = 511 Leipziger Kannen. eine Ka
zu 52, 318 .. Cubz. Rheinl. gerechnet. Der mit We
gemessene Inhalt des Gefäßes betrug 504 Kannen,
ist 25368 Cubz. Die conchoidische Figur, richtig a
wandt, giebt also beträchtlich zu viel, wenn gleich W
lers fehlerhafte Rechnung nur 7 Kannen zu viel gi
Oberreit findet für den Inhalt dieses Gefäßes
Kannen. Nach meiner Rechnung sind es 53

Man schiebe auf der geraden Linie AX (Fig. 80.)
große Axe EF einer Ellipse EGFH fort, und zieh
irgend einer Lage derselben aus dem unveränderten Pu
C durch den Mittelpunct der Ellipse K die gerade CI
welche die Ellipse in P und N schneidet, so sind P un
Puncte einer elliptischen Conchoide. Sie w
wie man sieht, eben so durch die Ellipse erzeugt, wie
alte Nikomedische Conchoide durch einen Kreis. W
CA senkrecht auf AX ist, und AB = AD = der
ben kleinen Axe der Ellipse genommen werden, so sin
und D Puncte dieser Conchoide, die man ihre Sche
puncte nennen mag. Die Linie BD theilt so wohl
obere als untere Conchoide in zwey gleiche und ähn
Hälften.

Die Axe einer Parabel werde auf einer Linie AX
geschoben, und in irgend einer Lage derselben werde

einem bestimmten Puncte C durch einen gegebenen Punct der Axe eine gerade Linie gezogen, so sind deren Durchschnitte mit der Parabel Puncte einer **parabolischen Conchoide**.

Auf ähnliche Art entsteht eine **hyperbolische Conchoide**. Man sehe von diesen conchoidischen Gattungen, Rabuel Commentarie sur la Géométaire de Descartes, p. 123.

Anstatt der geraden Linie XAX kann man zur Basis jede krumme Linie nehmen, und die auf ähnliche Art, wie für eine geradlinichte Basis, beschriebene Linie ist ebenfalls eine höhere Gattung von Conchoide. Zur Übung in der analytischen Geometrie diene eine Conchoide mit einer circularen Basis.

Es ist über dem Durchmesser CA (Fig. 81.) ein Kreis beschrieben, der als Basis dient; der Pol ist in C, auf dem einen Endpuncte des Durchmessers CA; die gegebene Linie zur Beschreibung der Conchoide sey AB = AD. Man ziehe irgend eine Chorde des Kreises CP, und nehme auf derselben und ihrer Verlängerung sowohl PN als PM = AB, so ist M ein Punct auf der äußern Conchoide, und N ein Punct auf der innern. Man kann hier den Bogen AP als Abscissenlinie, und PM, PN als constante Ordinaten an der Conchoide betrachten.

Es sey CA = a; AB = AD = b; CM = y; der Winkel BCM = φ. Man nehme noch die Chorde CE = Ce = b, und setze CAE oder CAe = α, so ist a sin α = b. Da CP = a cos φ, so ist $y = a \cos \varphi + b$. Aus dieser Gleichung läßt sich der ganze Zug der in einander verschlungenen äußern und innern Conchoide herleiten. Für die Werthe des Winkels φ von o bis $\frac{1}{2}\pi$ (oder 90 Gr.) gehört der Bogen BMG von B bis in G auf der CF, die senkrecht auf AC ist. Es ist CG = b. Der Bogen CG wird beschrieben, wenn die sich um C drehende Ordinatenlinie zwischen CF und CH,

der Verlängerung von EC fällt, wie CQ. Es sey BCQ $= \frac{1}{2}\pi + \omega$. so ist cos φ = cos BCQ $= -\sin\omega$, und $y = b - a\sin\omega$. Man verlängere CQ rückwärts bis an den Kreis in q, so ist $\Delta Cq = \pi - (\frac{1}{2}\pi + \omega) = \frac{1}{2}\pi - \omega$, und $Cq = a\cos(\frac{1}{2}\pi - \omega) = a\sin\omega$. Nimmt man $qO = b$, so ist $CO = b - a\sin\omega$, also O ein Punct der Curve. Wenn bey fortgesetzter Drehung CQ auf CH fällt, so ist $\omega = \alpha$, also, da $EC = a\sin\alpha$ ist, $y = b - a\sin\alpha = o$. Nun ist die halbe äußere Conchoide vollendet, und der beschreibende Punct geht in die innere Conchoide über. Die Ordinatenlinie sey in CR, und FCR $= \omega$, kleiner als ein Rechter. Es ist nun $y = b - a\sin\omega$, eine negative Größe. Man verlängere CR rückwärts bis an den Kreis in p, und nehme $pn = b$, so ist $Cp = a\sin\omega$, und $Cn = a\sin\omega - b$. Zugleich ist $Cn = y$, sowohl was die Quantität, als was die Lage betrifft. Die Negation von y zeigt an, daß die Richtung der Ordinate und der sich drehenden Linie CR einander entgegengesetzt sind. Wenn die letztere in CI, die auf CF senkrechte fällt, so ist $\omega = \frac{1}{2}\pi$, und $y = b - a$, $= -(a - b)$. Nun ist $CD = a - b$, also als Ordinate ist $CD = y$. Wenn ω zwischen $\frac{1}{2}\pi$ und $\pi - \alpha$ fällt, wie der W. FCr, so entsteht dieselbe Folge der Ordinaten von A nach P bis e hin, wie auf der andern Seite von A nach p bis E. Ist $FCh = \pi - \alpha$, so ist $\varphi = \frac{2}{3}\pi - \alpha$, also cos φ $= -\cos(\frac{2}{3}\pi - \alpha) = -\sin\alpha$, und $y = b - a\sin\alpha$, das ist $y = o$. Nun ist die innere Conchoide vollendet. Wenn ω größer als $\pi - \alpha$ ist, so ist sin ω kleiner als sin α, und $y = b + a\cos\varphi = b + a\cos(\frac{1}{2}\pi + \omega) = b - a\sin\omega$ ist positiv. Nun fällt die Ordinate wieder in die Richtung der sich drehenden Linie, und beschreibt den Bogen eg bis an g auf der Cf, die senkrecht auf CA ist. Ist ω größer als zwey Rechte, so wird sin ω negativ, also $-a\sin\omega$ positiv, oder $a\cos\varphi$ ist positiv, da φ über drey Rechte beträgt. Es wird nun, bis daß φ = vier Rechten ist, der Bogen gmB der äußern Conchoide be-

schreiben, an welchem die Ordinaten, wie C m positiv sind.

Die Quadratur dieser Conchoide ist leicht. Es sey der Sector BCM = Z, so ist $dZ = \frac{1}{2} y y d\varphi$ (s. Quadratur.), das ist

$$dZ = (\tfrac{1}{2} b^2 + a b \cos\varphi + \tfrac{1}{2} a^2 \cos\varphi^2) d\varphi$$
$$= (\tfrac{1}{4} a^2 + \tfrac{1}{2} b^2 + \tfrac{1}{4} a^2 \cos 2\varphi + a b \cos\varphi) d\varphi.$$

Daraus ist

$$Z = (\tfrac{1}{4} a^2 + \tfrac{1}{2} b^2)\varphi + \tfrac{1}{8} a^2 \sin 2\varphi + a b \sin\varphi,$$

ohne eine Constans. Wenn die Ordinatenlinie aus der Lage CB in die CI gekommen ist, so hat die Ordinate selbst die halbe äußere Conchoide BMGC, und die halbe innere CnD beschrieben. Die beiden Flächenräume BMGCB und CnDC zusammen sind $= (\frac{1}{4} a^2 + \frac{1}{2} b^2)\pi$, das ist der Fläche des Kreises CEAeC und des Doppelten des über dem Durchmesser b beschriebenen Kreises.

Den Flächenraum der äußern halben Conchoide zu erhalten, setze man $\varphi = \frac{1}{2}\pi + \alpha$, wodurch $y = o$ wird, weil $\cos(\frac{1}{2}\pi + \alpha) = -\sin\alpha$ ist. Diese Area ist $= (\frac{1}{4} a^2 + \frac{1}{2} b^2)(\frac{1}{2}\pi + \alpha) - \frac{1}{8} a^2 \sin 2\alpha + a b \cos\alpha$.

Die Area der innern halben Conchoide DCND zu finden betrachte man ihre Ordinaten nur absolut für sich, so ist $y = a\cos.\varphi - b$, und für $y = o$ ist $\varphi = \frac{1}{2}\pi - \alpha$. Setzt man nun in der Formel für ein unbestimmtes Z, $-b$ für b, und $\frac{1}{2}\pi - \alpha$ für φ, so ist diese Area $= (\frac{1}{4} a^2 + \frac{1}{2} b^2)(\frac{1}{2}\pi - \alpha) + \frac{1}{8} a^2 \sin 2\alpha - a b \cos\alpha$.

Die Summe der beiden Arearum ist die vorher gefundene.

Roberval hat sich schon mit dieser Conchoide auf einer circularen Basis beschäftigt. Er nennt sie le Limaçon de Pascal. Er hat die Summe je zweyer Sectoren wie BCM und DCN gefunden, und daher die Summe der Räume BMCB, DNCD.

De la Hire hat eine weitläuftige Abhandlung über die Conchoide auf irgend einer Basis geliefert, in den Mem. de l' Acad. des Sc. 1708, worinn er sie nach allen Prädicamenten untersucht. Er mußte noch die Gründe seiner Methode beyfügen.

Wenn die gegebene Linie dem Durchmesser a gleich genommen wird, so ist die Linie die in einem vorhergehenden Artikel schon betrachtete Cardioide. Die innere Conchoide fällt hier weg. Diese Linie ist geometrisch rectificabel. Denn es sey der Bogen vom Scheitel an $= s$, so ist $ds^2 = y^2 d\varphi^2 + dy^2$. Es ist $y = a(1 + \cos\varphi)$, also $dy = -a \sin\varphi\, d\varphi$. Daher $ds^2 = 2a^2(1+\cos\varphi)d\varphi^2 = 4a^2 \cos\frac{1}{2}\varphi^2 . d\varphi^2$, und $ds = 2a \cos\frac{1}{2}\varphi . d\varphi$, daher $s = 4a \sin\frac{1}{2}\varphi$, ohne eine Constans. Die Länge der einen Hälfte von dem Scheitel (B in Fig. 81.) bis zu dem Pol ist $= 4a$, da der Winkel φ für diesen Bogen $= \pi$ oder zwey Rechten gleich ist. De la Hire meint, daß sie nur aus dieser Hälfte allein bestehe.

Concrete Zahl ist einerley mit einer benannten Zahl wie 4 Thaler.

Congruenz, Deckung, ist die völlige Übereinstimmung zweyer Figuren, so daß ihre Gränzen, wenn sie gehörig auf einander gelegt werden, zusammen fallen. Dieses Aufeinanderlegen (applicatio) ist eine intellectuelle Vergleichung nach Art des Aufeinanderlegens zweyer materiellen Figuren, wodurch man prüft, ob sie gleich oder ungleich sind. S. Euklides I. 4. 8.

Conische Linie, s. Kegelschnitte.

Conjugirt, verbunden, heißen in der Geometrie der krummen Linien, gewisse zusammen gehörige gerade oder krumme Linien.

I. Conjugirte Durchmesser in der Ellipse und Hyperbel sind diejenigen beiden, deren jeder parallel ist mit den Chorden, die der andere halbirt. Die Durchmesser in diesen Linien gehen alle durch ihren Mittelpunct.

Conjugirte Axe iſt in der **Ellipſe** die kleine Axe, elche der kleinſte aller Durchmeſſer iſt. Sie iſt die mittere geometriſche Proportionale zwiſchen der großen Axe er Queraxe, axis transverſus) und dem Parameter. in der **Hyperbel** heißt die mittlere Proportionale zwiſchen der Queraxe (zwiſchen den Scheitelpuncten der Hyerbel) und dem Parameter auch die **conjugirte Axe.** Sie kann größer ſeyn als jene. Als Ordinate betrachtet at ſie keinen möglichen Werth, weil ſie die Hyperbel nicht chneidet, wenn ſie ſenkrecht auf die Queraxe oder Hauptaxe urch den Mittelpunct geſetzt wird.

II. **Conjugirte Ovale** iſt ein ganz abgeſonderter Theil einer krummen Linie, welchen eine in ſich zurückkehrende krumme Linie bildet. Dergleichen kommt nur bey krummen Linien des zweyten und höherer Grade vor. Die conjugirten Ovalen gehören, ihrer Abſonderung ungeachtet, zu der krummen Linie, weil ihre Ordinaten mit den Ordinaten der übrigen Zweige durch eine gemeinſchaftliche Gleichung beſtimmt werden. Bey den höhern krummen Linien ſind für eine Abſciſſe mehr als zwey Ordinaten möglich. Sind zwey ſtetige Folgen von Ordinaten zwiſchen denſelben Endordinaten enthalten, ſo bilden dieſe beiden Folgen eine abgeſonderte Ovale. Nämlich es ſey für $x = p$ die gemeinſchaftliche Ordinate zweyer ſtetigen Folgen $= P$, für $x = q$ ſeyn die Ordinaten verſchieden, aber für $x = r$ ſeyn ſie wieder gleich, und $= R$, ſo entſteht eine Ovale, wofern die Ordinaten in beiden Folgen ſich auf entgegengeſetzte Art verändern. Die Ovale mag auch einen Zweig der krummen Linie berühren, wenn aus einer andern Folge eine einzige Ordinate mit einer jener beiden Folgen übereinkommt. In dem Artikel, Linien der dritten Ordnung, kommen Beyſpiele von Ovalen vor. Man ſehe auch die Abbildungen bey Newtons **Enumeratio linearum tertii ordinis.**

III. **Conjugirter Punct** iſt ein abgeſonderter zu einer krummen Linie gehöriger Punct. Wenn in den beiden Folgen von Ordinaten, welche eine Ovale bilden, durch die Verän-

derung ihrer Relation gegen die Abscissen, die äußersten sich immer näher kommen, so zieht sich die Ovale immer mehr zusammen, und wird ein Punct, wenn die beiden äußersten Ordinaten zusammen fallen. Die Ordinate an einem conjugirten Puncte ist ein möglicher Werth der Ordinate y für eine Abscisse x, ohne daß sich eine stetige Folge von mehreren Ordinaten für größere oder kleinere x daran anschließt.

IV. Conjugirte Hyperbeln sind zwey verbundene Hyperbeln, deren jede zwischen den Asymptoten der andern beschrieben ist, und die einerley conjugirte Axen, aber in umgekehrter Ordnung haben, so daß die Hauptaxe der einen (die durch die Scheitelpuncte der beiden entgegengesetzten Hyperbeln gehende) die conjugirte der andern ist. Es sey a die halbe Hauptaxe der einen, b die halbe conjugirte, x die Abscisse von dem Mittelpuncte aus auf der Hauptaxe genommen, y die Ordinate, so ist für diese die Gleichung, $a^2 y^2 = b^2 x^2 - a^2 b^2$. Für die andere ist b die halbe Hauptaxe, und a die halbe conjugirte. Die Abscisse auf jener sey t, die Ordinate u, so ist ihre Gleichung $b^2 u^2 = a^2 t^2 - b^2 a^2$. Setzt man in der letztern x anstatt u, und y statt t, so erhält man die Gleichung $b^2 x^2 = a^2 y^2 - a^2 b^2$, oder $a^2 y^2 = b^2 x^2 + a^2 b^2$, in welcher die zweyte Hyperbel einerley Abscissenlinie mit der ersten hat. Multiplicirt man beide Gleichungen mit einander, so erhält man zwar eine einzelne Gleichung, $a^4 y^4 = b^4 x^4 - a^4 b^4$, in welcher die Werthe von y als Ordinaten theils zu der einen, theils zu der andern Hyperbel gehören. Beide machen aber doch nicht eine einzige krumme Linie aus, eben deswegen, weil die Gleichung sich in zwey rationale zerlegen läßt.

Cono-Cuneus, ein Körper, dessen Grundfläche ein Viertelkreis ist, und der zwey ebene Seitenflächen hat, eine ein Rechteck, die andere ein Dreyeck, und nebst diesen noch eine gekrümmte Seitenfläche, wie es aus der Zeichnung (Fig. 82. Tab. V.) bestimmter erhellen wird. Es ist ACB der Quadrant eines Kreises. Auf

e Ebene desselben ist das Rechteck ACED senkrecht ge-
ellt, dessen Grundlinie der Halbmesser AC, die Höhe
illkührlich ist. Zieht man BE, so ist das Dreyeck BCE
e zweyte ebene Seitenfläche. Man ziehe irgend eine
IP in dem Quadranten parallel mit CB, und PN par-
llel mit CE bis an N auf DE, dann MN, so ist die
nie MN in der krummen Seitenfläche.

Der Körper unterscheidet sich von einem senkrechten
Viertelkegel dadurch, daß die geraden Linien auf der krum-
ten Seitenfläche, wie MN nicht nach einem und demsel-
en Puncte E, sondern jede nach einem andern Puncte N
er Linie DE laufen; von einem Keile dadurch, daß die
Grundfläche nicht ein Rechteck, wie bey jenen, sondern
in Viertelkreis ist. Von der cylindrischen Fläche ist die
krumme Seitenfläche dadurch verschieden, daß die geraden
Linien an derselben sich an einer geraden Linie endigen,
und daß sie gegen die Grundfläche verschiedentlich geneigt
sind. Der Winkel, welchen MN mit der Grundfläche
macht, ist der Winkel NMP, dessen Tangente $= \frac{NP}{MP}$
ist. Es ist zu bemerken, daß die Ebene des bey P recht-
winklichten Dreyecks NPM auf die Grundfläche senkrecht
steht, weil MP mit BC, und NP mit EC parallel ist,
also die Ebene NPM mit der Ebene ECB parallel ist,
die senkrecht auf ACB steht.

Wallis hat diesen Körper erdacht, und eine lange
Abhandlung darüber geschrieben, die in seinen Werken,
Vol. II. p. 683 — 699 befindlich ist. Er betrachtet
darin die Figur der Schnitte dieses Körpers. Es
scheint nicht, daß man weitern Gebrauch davon machen
könne.

Consequens terminus rationis, das zweyte
Glied, oder das Hinterglied eines Verhältnisses.

Construction ist in der Geometrie die Anwen-
dung der Hülfsgrößen, um den Erweis eines Lehrsatzes zu

führen, oder die Auflösung einer Aufgabe zu erhalten als die Ziehung bestimmter oder unbestimmter gerader Linien, Verlängerung der gegebenen, Beschreibung einer krummen Linie, Legung einer Ebene in Beziehung auf eine andere Ebene, oder auf eine gerade Linie, Schneidung eines Körpers durch eine Ebene, Bewegung einer Linie, eines gegebenen Winkels, einer Figur, und was sonst von dergleichen Mittel angewandt werden mag. Wenn Größen verglichen werden sollen, so ist es gewöhnlich nöthig, Mittelgrößen einzuführen, z. B. bey dem pythagoräischen Lehrsatz. Bey Auflösung der Aufgaben müssen mit den gegebenen Größen andere verbunden werden, die zu den gesuchten führen. Man sehe den Artikel: Analysis als Methode, oder auch nur die Anfangslehren der Geometrie.

Eine geometrische Construction im engern Sinne genommen wendet nur die gerade Linie, den Kreis und die Kegelschnitte nebst der Ebene an. Im weitern Umfange dürfen ihr auch andere krumme Linien zugestanden werden, so fern diese durch eine Bewegung einer Linie oder Figur stetig beschrieben werden können, wie z. B. bey der Verdoppelung des Würfels oder der Dreytheilung eines Winkels. Dergleichen Linien sind die Cissoide und die Conchoide. Man nennt solche Constructionen auch mechanische. Man kann sie aber mit Recht noch als geometrisch ansehen, wenn jeder Punct der beschriebenen krummen Linie durch eine eigentliche geometrische Construction angegeben werden kann. Das ist nicht der Fall bey der Quadratrix des Dinostratus, bey welcher man die Lage des sich drehenden Halbmessers für jede Stelle des sich bewegenden Punctes auf dem fixen Halbmesser nicht angeben kann.

Eine instrumentale Construction, die gewöhnlich eine mechanische genannt wird, dient zu wirklichen Darstellungen materieller Größen, z. B. bey Abzeichnungen von Feldern, Gegenden, Gebäuden, Maschinen.

Die Construction algebraischer Gleichungen ist die Darstellung ihrer Wurzeln durch die zu den Durchschnitten zweyer Linien gehörigen Ordinaten für ein

gemeinſchaftliche Abſciſſenlinie, oder durch die dazu gehörigen Abſciſſen. Dieſe geſchieht entweder zur leichtern Erfindung der Wurzeln, oder um der Methode ſelbſt willen, oder um die Relation und Succeſſion der Wurzeln deutlicher zu machen. S. Anwendung der Geometrie auf die Algebra.

Die Conſtruction analytiſcher Gleichungen, das iſt, der Gleichungen zwiſchen zwey oder drey veränderlichen Größen, iſt die geometriſche Darſtellung der zuſammen gehörigen Größen unter ihnen durch die Coordinaten an einer krummen Linie oder an zweyen, oder an einer Fläche. Jede Relation zwiſchen zwey veränderlichen x und y kann durch die Coordinaten einer krummen Linie in einer Ebene gleichſam abgebildet, und oft ſehr anſchaulich gemacht werden. Eine Relation zwiſchen drey veränderlichen x, y, z kann durch die Coordinaten zweyer krummen Linien in einer Ebene vorgeſtellt werden, wenn an dieſen für eine gemeinſchaftliche Abſciſſe x die Ordinaten der einen wie y, der andern, wie z ſich gegen x verhalten. Dieſes aber in dem Falle, wenn zwey Gleichungen zwiſchen dieſen verbundenen Größen gegeben ſind, ſo daß für eine derſelben, wie x, ſowohl y als z gefunden werden kann. Iſt die Gleichung zwiſchen x, y, z nur eine einzige, ſo iſt es eine krumme Fläche, welche durch ihre Coordinaten die Relation darſtellt. Die Conſtruction analytiſcher Gleichungen hat ihren Werth, wenn ſie durch die Verhältniſſe der Linien und Winkel, durch die Bewegung eines Punctes oder einer Linie nach einem gewiſſen Geſetze die Entſtehung der Gleichung angiebt, und die Relation der veränderlichen Größen für alle Werthe derſelben ſinnlich macht. Wenn ſich dieſes aber auch ſo nicht zeigen läßt, ſo iſt es doch ſehr oft nützlich, die Coordinaten nach einem Maaßſtabe unter dem angenommenen Winkel derſelben zu zeichnen, da gewöhnlich aus einem Theile einer krummen Linie oder wenigen Puncten derſelben ihr ganzer Lauf zu erkennen iſt, wodurch denn auch die mannichfaltigen Verhältniſſe der veränderlichen Größen in der abgebildeten Glei-

chung, besonders die verschiedenen Folgen der einen in Beziehung auf die andern, anschaulich gemacht werden.

Die Construction der Differentialgleichungen ist eine Integration durch Hülfe krummer Linien. Es sey $dz = X\,dx$, wo X eine Function von x ist. Man construire eine krumme Linie, deren Coordinaten x und X sind, wobey man irgend eine Linie zur Einheit für die Längen, ihr Quadrat zur Einheit für die Flächen annimmt. Dann ist z der Flächenraum zwischen den Coordinaten x und X und dem zugehörigen Bogen der Curve, mit Beyfügung der Constans, wo diese erforderlich ist.

Allgemeiner sey $X\,dx = Y\,dy$, wo X eine Function von x, und Y von y ist. Man setze zwey gerade Linien unter einem rechten oder andern Winkel zusammen, nehme von dem Durchschnitte an, auf der einen die Abscissen x, auf der andern die Abscissen y, und construire zwey krumme Linien, eine mit den Ordinaten X zu den Abscissen x, die andere mit den Ordinaten Y zu den Abscissen y. Nimmt man an beiden Curven zwey gleiche Flächenräume, so sind die Abscissen zu denselben zwey zusammengehörige x und y in der Gleichung $\int dx = \int Y\,dy$, weil wegen der gleichen Flächenräume auch ihre Differentiale gleich sind. Vollendet man das Parallelogramm von den Abscissen x und y der Curven, so giebt der Durchschnitt der mit ihnen parallelen Seiten einen Punct der Curve, deren Coordinaten x und y sind. Durch diese wird nun die Differentialgleichung aufgelöset oder construirt. Exempel findet man in Jo. Bernoulli Lect. Hospit. X.

Die Construction der Curve setzt voraus, daß man die beiden Curven, deren Ordinaten X und Y sind, quadriren, und für jeden Flächenraum der einen die Abscisse zu einem eben so großen Flächenraum an der andern angeben könne. Kann man dieses bewerkstelligen, so kann man auch die Gleichung zwischen x und y analytisch finden, und braucht der Curve mit den Coordinaten x und y nicht, es müßte denn sich eine merkwürdige Art ihrer Entstehung aus den beiden andern dadurch ergeben. Lassen sich diese nicht quadriren, so wird die Curve für x und y nur construirt

ıceſſis quadraturis, welches bloß zeigt, was man üßte angeben können, um aus der Differentialgleichung e endliche Gleichung zwiſchen x und y zu finden. Dies s Verfahren wird jetzt nicht gebraucht.

Joh. Bernoulli zeigte ſchon 1694 eine allgemeine Methode an, alle Differentialgleichungen vom erſten Grade construiren, auch wenn die veränderlichen Größen ſich cht von einander ſondern laſſen, wie wenn X und Y in der ıgeführten Gleichung Functionen von x und y zugleich nd und bleiben. Allein es iſt dieſes nur ein Entwurf, r ſchwerlich auszuführen ſeyn möchte. S. Jo. Bernoulli Opp. T. I. nr. 20.

Ehedem pflegte man analytiſche Beweiſe und Auflöungen in geometriſche Conſtructionen zu verwandeln, wie Newtons Principien der Naturwiſſenſchaft durchgeends geſchehen iſt. Man fügte den analytiſchen Auflöungen immer die geometriſche Conſtruction bey. Die geometriſche Methode ſah man als die vollkommenere an. Es wahr, daß dieſe oft ungemein viel Scharfſinn erfordert, nd vortrefflich zur Übung des mathematiſchen Faſſungsermögens dient. Sie wird aber doch bey ſehr ſchweren Unterſuchungen unzulänglich, und iſt auch mehr in der abracten Speculation, als in der Anwendung brauchbar, ie es bey der Berechnung der gegenſeitigen Störungen r Weltkörper der Fall iſt. Gegenwärtig hat man die ometriſche Methode faſt ganz verlaſſen. In großen Werken, die die Bewegung betreffen, findet man nicht ne einzige Zeichnung.

Einige neue Philoſophen haben auch die analytiſche ſammenſetzung der Größen eine Conſtruction genannt. an wird aber in der Mathematik ſich von den Philoſoen keine Neuerungen in den Begriffen machen laſſen.

Zur Conſtruction analytiſcher Zuſammenſetzungen von rößen muß man die Elemente derſelben geometriſch rzuſtellen wiſſen.

Wenn die einzelnen Buchſtaben Linien bedeuten, ſo ab ein Rechteck von den Seiten a, b; alſo aa das uadrat von der Seite a; ferner abc ein rechtwinklichtes

Parallelepipedum, deſſen Seiten a, b, c ſind, alſo aaa oder a^3 der Würfel von der Seite a.

Es iſt $\frac{bc}{a}$ die vierte Proportionallinie zu den drey Linien a, b, c. Man zeichne einen beliebigen Winkel, trage von dem Scheitel aus auf den einen Schenkel die Linien a, b, auf den andern die Linie c, ziehe durch die Endpuncte von a und c eine Linie, und mit dieſer durch den Endpunct von b eine Parallele, ſo ſchneidet dieſe auf dem andern Schenkel die vierte Proportionallinie ab.

Es iſt $\frac{bb}{a}$ die dritte Proportionallinie zu a und b. Sie wird auf dieſelbe Art wie die vierte zu drey verſchiedenen gefunden. Iſt b kleiner als a, ſo wird ſie gefunden, wenn man über a als Durchmeſſer einen Kreis beſchreibt, in dieſen die Chorde b von dem einen Endpuncte des Durchmeſſers trägt, und von dem zweyten Endpuncte der Chorde eine ſenkrechte auf den Durchmeſſer zieht. Dieſe ſchneidet auf dem Durchmeſſer von jenem Endpuncte an die verlangte Linie ab.

Wenn $aa + bb = cc$ iſt, ſo iſt c die Hypotenuſe des rechtwinklichten Dreyecks, worin a, b die Katheten ſind. Daher wird $c = \sqrt{(aa + bb)}$ gefunden.

Iſt $aa - bb = cc$, ſo wird c durch die Conſtruction eines rechtwinklichten Dreyecks gefunden, worin a die Hypotenuſe und b die eine der Katheten iſt. Oder man beſchreibe über dem Durchmeſſer a einen Halbkreis, trage von dem einem Endpuncte aus die Linie b an den Umfang, und ziehe durch den andern Endpunct von a an den Punct in dem Umfange, eine gerade Linie, ſo iſt dieſe die Linie, c — Oder man beſchreibe über dem Durchmeſſer $a + b$ einen Halbkreis; trage auf denſelben von dem einen Endpuncte aus die Linie 2b, errichte durch deren Endpunct eine ſenkrechte, ſo iſt die Chorde des Bogens zwiſchen dem zweyten Endpuncte des Durchmeſſers

nd dieſer ſenkrechten = c. — Oder man beſchreibe mit em Halbmeſſer a einen Halbkreis, trage auf demſelben on dem Mittelpunkte aus die Linie b, errichte durch deen Endpunct eine ſenkrechte bis an den Umfang des Kreiſes, ſo iſt dieſe = c.

Es ſey $\frac{cde}{ab} = f$, ſo iſt das Verhältniß e : f das

uſammengeſetzte aus den beiden a : c und b : d, oder das Verhältniß der Rechtecke a b ; c d. Um es durch zwey Linien darzuſtellen, ſuche man zuerſt die vierte Proportionallinie zu a, c, e, welche E ſey; dann die vierte zu b, d; E, ſo iſt dieſe = f.

Es ſey $\frac{defg}{abc} = h$, ſo iſt das Verhältniß g : h

das zuſammengeſetzte aus a : d ; b : e; c : f, oder das Verhältniß der rechtwinklichten Parallelepipeden a b c : d e f. Oder man ſuche die vierte Proportionallinie zu a, d, g, welche ſey G; dann die zu b, e, G, welche ſey H; endlich die zu c, f, H, ſo iſt dieſe = h.

Es ſey $b^2 = ac$, ſo wird b auf zweyerley Weiſe durch bekannte Eigenſchaften des Kreiſes gefunden, ſ. Kreis.

Es ſey $b^3 = a^2 c$, man ſoll durch Conſtruction finden. Dieſes iſt die bey den Alten berühmte Aufgabe, zwiſchen zwey gegebenen Größen a, c die beiden mittlern geometriſch proportionalen zu finden. Denn b iſt die auf a zunächſt folgende. Die Progreſſion iſt $a : b : \frac{bb}{a} : \frac{bbb}{aa}$.

S. Deliſche Aufgabe.

Contiguum, an einander liegend. Winkel, die einen gemeinſchaftlichen Schenkel haben, heißen anguli contigui.

Continuum das ſtetige, oder unmittelbar verbundene. 1) Eine Größe heißt eine ſtetige, ein Continuum, wenn ihre Theile alle ſo zuſammenhängen, daß

wo der eine aufhört, gleich der andre anfängt. 2) Ein ſtetige Bruch (fractio continua) iſt, deſſen Nenner einen Bruc wiederum mit einem Bruche in deſſelben Nenner u. ſ. w. ent hält, es ſey, daß dieſes ohne Ende fortgeht, oder auf hört. S. Kettenbruch. 3) Eine proportio conti nua iſt, worin die beiden mittlern Glieder ſich gleic ſind. 4) Eine progreſſio continua, worin jedes Glie ſowohl das vorhergehende als nachfolgende Glied der glei chen Verhältniſſe unter zwey nächſten Gliedern iſt.

Contra-Diameter iſt eine Axe der Abſciſſen i einer krummen Linie von einer ſolchen Geſtalt, daß zu glei chen entgegengeſetzten Abſciſſen gleiche und entgegengeſetzt Ordinaten gehören. Sie theilt die krumme Linie in gleiche und ähnliche Theile, wie ein Diameter, aber mit dem Un terſchiede, daß die ähnlichen Theile entgegengeſetzte Lagen haben, da der Theil, der in dem Winkel der poſitiven Coordinaten liegt, dem in dem Winkel der negativen be findlichen gleich und ähnlich iſt. Eine ſolche Linie iſt die, deren Gleichung iſt $y^3 + axy^2 + bx^2y + cx^3 + dy + ex = o$, oder folgende der vierten Ordnung mit der Gleichung, $y^4 + axy^3 + bx^2y^2 + cx^3y + dx^4 + ey^2 + fxy + gxx + h = o$. Wenn man in dieſen Gleichungen $+x$ mit $-x$, und $+y$ mit $-y$ vertauſcht, ſo bleiben in der letztern alle Vorzeichen die ſelben, und in der erſtern werden ſie alle entgegengeſetzt, daher ſich alle Glieder eben ſo gegen einander aufheben, wie in jenen Gleichungen. Bragelongue hat die Be nennung, Contre-Diamétre, aufgebracht. Mém. de l'Acad. des Sc. 1732. Cramer Anal. des lign. courb. §. 73.

Contra-geometriſche Proportion iſt die Re lation zwiſchen drey Größen, a, b, c, da $a - b : b - c = c : b$, oder auch dieſe, da $a - b : b - c = b : a$ iſt. In der ſtetigen geometriſchen Proportion $a : b : c$ iſt $a - b : b - c = a : b = b : c$.

Contra-harmoniſche Proportion iſt die Relation zwiſchen drey Größen a, b, c, da a — b : b — c = c : a iſt, z. B. 12, 10, 6. In einer harmoniſchen Proportion A, B, C, iſt A — B : B — C = A : C, z. B. 12, 8, 6. In jener iſt das mittlere Glied $b = \frac{aa + cc}{a + c}$ in dieſer iſt $B = \frac{2AC}{A + C}$.

Bey den alten Arithmetikern trifft man auch eine von ihnen ſo genannte contra-arithmetiſche Proportion an, nämlich, a — b : a — c = c : b; auch folgende, die ſie arithmetiſch-geometriſche Proportionen nannten. I. a — b : a — c = c : a; II. b — c : a — c = c : a; III. b — c : a — c = c : b. Dieſe Benennungen ſind veraltet und unnütz, wenn gleich die Relationen vorkommen können.

Convergirend, annähernd. 1) Gerade Linien, die ſich in einem Puncte ſchneiden, ſind nach der Gegend dieſes Punctes hin convergirend. 2) Eine Reihe iſt convergirend, wenn ihre Glieder in ihrer Folge nach einander immerfort kleiner werden. Die Summe der Glieder nähert ſich alsdann immer mehr dem Werthe der Größe, welche die Summe der ganzen ins Unendliche fortgeſetzten Reihe iſt. 3) Eine convergirende Hyperbel iſt eine Hyperbel des zweyten Grades, an welcher zwey Schenkel, die ſich ihre hohle Seite zukehren, eine gemeinſchaftliche Aſymptote haben. Dergleichen, iſt die krumme Linie, deren Gleichung iſt, xyy + ay = b. S. Newtoni enumer. lin. tertii ordinis, Fig. 68. 69.

Converſio rationis iſt, wenn in einem Verhältniſſe A : B das Vorderglied mit dem Überſchuſſe deſſelben über das Hinterglied verglichen wird, oder die Ableitung des Verhältniſſes A : A — B aus A : B. Lorenz überſetzt es: Das Verhältniß wird zurückkehrend.

Converſio eines Satzes iſt etwas logiſches, wenn eine Bedingung und Folge vertauſcht werden. Z. B. der Satz ſey dieſer: wenn zwey ſich ſchneidende gerade Linien von einer dritten geſchnitten werden, ſo iſt der äußere Winkel an der Seite, wo ſie ſich ſchneiden, größer als der innere entgegengeſetzte an derſelben Seite. Der umgekehrte, oder die converſa iſt, wenn zwey gerade Linien von einer dritten ſo geſchnitten werden, daß der äußere Winkel größer als der innere entgegengeſetzte an derſelben Seite jener Linie iſt, ſo ſchneiden ſich die beiden Linien an eben dieſer Seite.

Conus, ſ. Kegel.

Conver, ſ. Concav.

Coordinaten einer krummen Linie von einfacher Krümmung ſind zwey ſtetige Folgen gerader Linien, von welchen die eine Folge auf einer gegebenen geraden Linie in oder neben der krummen Linie von einem gegebenen Puncte an genommen, und die andere Folge mit jener unter einem unveränderlichen Winkel, rechten oder ſchiefen, verbunden wird. Die Relation dieſer Linien beſtimmt die Natur der krummen Linie. Für die Geometrie iſt die analytiſche Darſtellung des ganzen Zuges einer krummen Linie ſehr wichtig, weil aus den Eigenſchaften der Gleichung die Eigenſchaften der krummen Linie hergeleitet werden können, und bey der Verbindung zweyer oder mehrerer Linien die Lage derſelben gegen einander, ihre Durchſchnitts- und Berührungspuncte durch die Verbindung ihrer Gleichungen ſich beſtimmen laſſen.

Wenn die krumme Linie eine gedoppelte Krümmung hat, d. i. wenn ſie nicht in derſelben Ebene bleibt, desgleichen auch zur Beſtimmung der Geſtalt einer krummen Fläche, werden drey ſtetige Folgen von Coordinaten gebraucht. Man ſtelle ſich drey Ebenen vor, die ſich jede die andere ſchneiden. Mit den Durchſchnitten je zweyer werden die Linien der drey Folgen parallel gezogen. Der gemeinſchaftliche Durchſchnittspunct der drey Durchſchnittslinien iſt der Anfangspunct, von welchem an die Linien der einen

olge auf der zugehörigen Durchschnittslinie genommen rden.

Es seyn (Fig. 83. Tab. VI.) AX, AY, AZ, die drey urchschnittslinien der Ebenen XAY, ZAX, ZAY, und ihr gemeinschaftlicher Durchschnittspunct. Diese drey nien heißen die Axen der Coordinaten. Es sey LMN ne krumme Linie von doppelter Krümmung oder eine Li- e auf einer krummen Fläche, die kein Durchschnitt der- lben mit einer Ebene ist. Durch einem Punct derselben I ziehe man mit der Axe AZ die parallele MQ, welche e Ebene XAY in Q treffe; durch Q ziehe man QP par- llel mit der Axe AY bis an die Axe AX in P, sind MQ, QP, AP die zu M gehörigen Coor- naten. Für jeden Punct der krummen Linie oder lache stelle man sich solche drey Coordinaten vor, machen diese drey stetige Folgen aus. Die Li- ien der auf AX genommenen Folge nennt man die Ab- issen, die Folgen der PQ und QM die zugehörigen Or- naten. Wenn die Axen senkrecht auf einander stehen, heißen die Coordinaten orthogonale, normale, echtwinklichte Coordinaten. Die Relation der drey oordinaten wird durch eine Gleichung zwischen drey ver- nderlichen Größen mit den erforderlichen unveränderli- en ausgedrückt.

Wenn die krumme Linie in derselben Ebene liegt, so nd (Fig. 84. Tab. VI.) nur zwey Axen der Coordinaten X, AY, nöthig Von jedem Puncte M einer krum- en Linie LMN wird eine Linie MP parallel mit der ei- n Axe AY bis an die andere AX in P gezogen. So sind P, PM jede eine Linie aus den beiden Folgen der Coor- naten. Zieht man MR parallel mit AX bis an AY R, so sind AR, RM ebenfalls ein Paar Coordinaten. ie Linie AP heißt die Abscisse, PM die Ordinate; oder ch, es ist AR die Abscisse, und MR die Ordinate.

Es ist oft nöthig, die Lage der Cordinaten zu ändern, eweder um die Gleichung einfacher zu machen, oder um igenschaften der krummen Linie zu entdecken. Das Ver- hren hierzu ist folgendes.

Es sey für eine einfach krumme Linie (Fig. 85.) A die Axe der Abscissen, AY die Axe der Ordinaten; A und PM seyn die Coördinaten für den Punct M. A der Gleichung zwischen diesen soll eine Gleichung für d Coordinaten AQ, QM, deren Axen AT, AU sin gefunden werden. Der Anfang der Abscissen AQ blei in A.

Durch einen beliebigen Punct B auf AX ziehe ma CB parallel mit AY, welche AT in C, und AU in I schneide. Die Verhältnisse der Seiten in den beiden Drey ecken ABC, ABD sind gegebene. Man ziehe QS pa rallel mit AX, und QR parallel mit AY. Es ist . AC : AB = AQ : AR, und . . . . . AD : AB = QM : QS (= RP), wegen der gleich winklichten Dreyecke BAD, SQM. Ferner ist . AC : CB = AQ : QR (= PS) und . . . . . AD : DB = QM : MS. Man setze die Verhältniss der Linien AC : AB : BC : AD : DB = m : n : p : q : r; ferner AP = x; PM = y; AQ = t; QM = u, so ist

$$AR = \frac{n}{m}t \quad ; \quad RP = \frac{nu}{q},$$

$$PS = \frac{pt}{m} \quad ; \quad MS = \frac{ru}{q};$$

also $x = \frac{nt}{m} + \frac{nu}{q}$, und $y = \frac{pt}{m} - \frac{ru}{q}$.

Das Vorzeichen — vor dem zweyten Theil von y ent steht daher, daß BC und BD entgegengesetzte Lage haben.

Die gefundenen Werthe von x und y setzt man in die Gleichung für dieselben, so erhält man eine Gleichung zwischen t und u.

Wenn der Anfangspunct der Abscissen verändert wird, so werden die Coordinaten t, u jede um eine gegebene Li nie verändert.

Exempel. Es ſey M ein Punct einer Hyperbel, AX liege in der groſsen Axe, und PM ſey eine normale Ordinate, A der Mittelpunct der Hyperbel. Die beiden Axen AT, AU ſeyn die Aſymptoten. In dieſem Falle iſt $m = q$; $p = r$, alſo $x = \frac{n}{m}(t+u)$; . . . $y = \frac{p}{m}(t-u)$. Man nehme B in dem Scheitel, ſo iſt AB die halbe Haupt-Axe $= a$; und BC die halbe zugeordnete $= b$, ſo daſs $n = a$; $p = b$; . . . $m = \sqrt{(aa+bb)}$ iſt. Die Gleichung der Hyperbel iſt $b^2(x^2 - a^2) = a^2y^2$. Die Subſtitution giebt

$$b^2 \cdot \frac{nn}{mm}(t+u)^2 - b^2a^2 = a^2 \cdot \frac{pp}{mm}(t-u)^2,$$

und nach der Diviſion mit $nn = aa$, und $bb = pp$, auch Multiplication mit m^2.

$$(t+u)^2 - m^2 = (t-u)^2.$$

das iſt,

$$4tu = m^2 = aa + bb.$$

Da eine krumme Linie mit einfacher Krümmung auch durch die Bewegung einer veränderlichen geraden Linie um einen feſten Punct beſchrieben werden kann, ſo ſind dieſe veränderliche Linie, und die zugehörigen Winkel von einer gegebenen Linie an genommen auch Coordinaten.

Die Gleichung für eine krumme Linie mit doppelter Krümmung kann auch zwey Winkel und eine veränderliche gerade Linie zu Coordinaten haben. Man ſetze in (Fig. 23.) daſs die drey Richtungs-Ebenen auf einander ſenkrecht ſtehen, ſo daſs die Ebene des Dreyecks MAQ, deſſen Seiten die Linie MA von dem Puncte M der Curve nach dem gegebenen Puncte A, die ſenkrechte MQ auf die Ebene XAY, und AQ, die Linie von A nach MQ in eben dieſer Ebene, ſind, ſenkrecht auf XAY ſey. Durch

tion und Abſtand, wenn A
tors iſt.

Corollarium, Zuſatz, leichte Folgerung (conſectari Satze, oder der Auf ösung en die Anwendung eines allgemein dern Fall.

Coſa, res, iſt bey den ſten, was wir Wurzel einer G

Coſecante, die Secan Winkels. Wenn $\frac{u}{a}$ die Seca

iſt $\frac{u}{\sqrt{(u^2 - a^2)}} = \text{cosec}\,\varphi$.

Mathematiker (geſt. 1626), nennung, ſo wie die ähnlichen, geführt, wie man aus dem Vo triangulorum ſieht. In ſeiner gleich die Ausdrücke, Sinus ments. Von Co-Sinus ben

ist $\frac{\sqrt{(aa - xx)}}{a} = \text{cosin}\,\varphi$. Im 16ten Jahrhundert gebrauchten einige für Cosinus die Benennung sinus rectus secundus. Rhäticus und Vieta nennen Cosinus Basis, und den Sinus Perpendiculum, in Beziehung auf den Radius.

Coß, Regel Coß, hieß bey den deutschen Arithmetikern lange Zeit die Algebra. Die Italiener, welche die Algebra in Europa einführten, hatten sie regola oder arte de la cosa genannt. S. Cosa.

Cossische Zahlen sind Potenzen und Wurzeln in der Sprache der alten Algebraisten, die selbst Cossisten hießen. Cossische Zeichen sind die Symbole dieser Größen. Cossischer Algorithmus, die Rechnung nach den vier Speciebus mit diesen Größen wenn sie numerische Factoren haben.

Co-sinus versus ist der Sinus versus des Complements eines Winkels.

Cotangente ist die Tangente des Complements eines Winkels. Wenn $\frac{t}{a} = \text{tang}\,\varphi$, so ist $\frac{a}{t} = \text{cotang}\,\varphi$. Rhäticus und Vieta nennen die Cotangente Basis und die Tangente Perpendiculum, in Beziehung auf die Secante. Cavaleri nennt sie in seiner Trigonometrie Tangens secunda.

Cotesischer Lehrsatz ist der von Cotes erfundene Satz, eine Eigenschaft des Kreises betreffend, wodurch die Factoren der Binomien $r^n - a^n$ und $r^n + a^n$ geometrisch dargestellt werden.

Ein mit dem Halbmesser OA beschriebener Kreis (Fig. 86 und 87 Tab. VI.). werde in eine gerade Anzahl

gleicher Theile getheilt. Aus einem Puncte P des H
messers werden an die Theilungspuncte gerade Linien g
gen. Die Anzahl der Theile in dem Umfange sey = s
der Halbmesser = r, der Abstand OP = a, so
$r^n - a^n = PA \times PC \times PE \times PG \times$ etc. bis z
nten Factor; und $r^n + a^n = PB \times PD \times PF \times$ I
$\times$ etc. bis zum nten Factor. Der Satz gilt auch, w
P außerhalb des Kreises auf der verlängerten OA li
Es ist alsdann $a^n - r^n$ anstatt $r^n - a^n$ zu setzen.

Der Beweis des Satzes beruht auf der analytisc
Zerlegung der Formeln $r^n - a^n$, und $r^n + a^n$ in D
pelfactoren, jene mit dem einfachen $r - a$, diese mit d
einfachen $r + a$, wenn n ungerade ist. In dem A
tel, Anwendung der Geometrie auf die Algebra (S 16
ist gefunden, daß die Formeln $r^n - a^n$, und $r^n +$
Doppelfactoren von der Form $r^2 - 2ra\cos\varphi + a^2$,
der Zahl $\frac{1}{2}n$, oder $\frac{1}{2}(n-1)$, haben, wo φ die Fo

$\frac{2k\pi}{n}$ für die Formel $r^n - a^n$, und die Form

$\frac{2k+1}{n}\pi$ für die Formel $r^n + a^n$ hat. Das dor

x ist hier r. Man ziehe an jeden Theilungspunct
Halbmesser, wie CO an C, so ist . . . . . .
$PC^2 = OC^2 - 2OC \times OP.\cos COP + OP^2$,
das zweyte Glied additiv ist, wenn COP zwischen ei
und drey Rechten ist, wegen der negativen Beschaffen
des Cosinus in diesem Falle. Man bezeichne jede der Lin
wie PC, durch z, und jeden Winkel, wie COP, durch
so ist $z^2 = r^2 - 2ra\cos\varphi + a^2$. Dieser Werth
z^2 ist gleich einem der Doppelfactoren von $r^n -$
wenn z eine der Linien PA, PC, PE, etc. bedeutet,
an Theilungspuncte mit einer ungeraden Stellenzahl g

gen sind. Denn da der W. $AOB = \frac{\pi}{n}$ ist, so ist

$AOC = \frac{2\pi}{n}$; $AOE = \frac{4\pi}{n}$; $AOG = \frac{6\pi}{n}$; u.

so daß φ die Form $\frac{2k\pi}{n}$ hat, die für die Formel $r^n - a^n$ gehört. Nimmt man für z eine der Linien PB, PD, PF, etc. zu Theilungspuncten mit geraden Stellenzahlen, so ist z^2 einer der Doppelfactoren der Formel $r^n + a^n$. Denn es ist $AOB = \frac{\pi}{n}$; $AOD = \frac{3\pi}{n}$; $AOF = \frac{5\pi}{n}$, etc. welche Winkel die Form $\frac{2k+1}{n}\pi$ haben, die für die Formel $r^n + a^n$ gehört. Die Anzahl der Factoren z ist n, wie in den beiden Formeln. Die Factoren sind, ausser den beiden $r - a$ und $r + a$, paarweise gleich groß vorhanden, indem jedem z^2 in der Zeichnung ein quadratischer Factor der Formel entspricht. In der Gleichung $r^n - a^n = 0$, hat r sowohl $+ a$ als $- a$ zu Werthen, wenn n gerade ist, also hat die Formel $r^n - a^n$ die Factoren $r - a$ und $r + a$. Eben diese sind für z die Werthe PA und PG auf dem Durchmesser (Fig. 87.). Für ein ungerades n erhält in eben dieser Gleichung r nicht den Werth $- a$, und die Formel nicht den Factor $r + a$, so wie auch für z kein zweyter Werth, ausser $PA = r - a$, auf den Durchmesser selbst fällt. Die Formel $r^n + a^n$ hat für ein gerades n keinen Factor $r - a$ oder $r + a$, so wie in diesem Falle auch kein Werth von z auf dem Durchmesser durch A liegt. Für ein ungerades n ist der Factor $r + a$ vorhanden, und z hat einen Werth, der auf dem Durchmesser genommen wird, wie PF (Fig. 86).

Der Punct P kann auch über A hinaus gesetzt werden. Es bleibt, wie vorher; $zz = rr - 2ra\cos\varphi + aa$. Die Formel $r^n + a^n$ hat diesen Doppelfactor, ohne Unterschied, ob r oder a das größere von beiden sey.

Cotes war ein vorzüglicher Mathematiker in England, der im 34sten Jahre seines Alters, 1716, starb. Newton bedauerte seinen frühzeitigen Tod mit den Worten: Wenn Cotes länger gelebt hätte, würden wir noch

von ihm etwas gelernt haben. Smith, der Herausgeber einiger nachgelaſſenen Schriften von Cotes, unter dem Titel, Harmonia menſurarum, 1722, hat den Lehrſatz daſelbſt pag. 114. mitgetheilt, aber ohne Beweis. Pemberton hat in einer epiſtola ad amicum de Coteſii inventis, 1722 einen Beweis davon gegeben, der aber durch ſeine Weitläuftigkeit ermüdet. Walmesley, der jenes Werk neu bearbeitet unter dem Titel: Analyſe des meſures, des rapports et des angles, ou Reduction des Integrales aux logarithmes et aux Arcs de Cercle, 1753, herausgegeben hat, giebt daſelbſt pag. 82 ff. einen Beweis, in welchem aber noch manches zu ergänzen iſt. Joh. Bernoulli hat einen leichtern Beweis aufgeſetzt, der in ſeinen Werken T. IV. p. 67 zu finden iſt. Dieſen habe ich abgekürzt und zugleich allgemeiner gemacht, in meiner analytiſchen Trigonometrie S. 96. ff. vorgetragen. Der hier gegebene Beweis gründet ſich auf die analytiſche Zerlegung der Formeln $x^n - a^n$ und $x^n + a^n$, welche durch Hülfe der Rechnung mit unmöglichen Größen aus den Formeln für den Sinus und Coſinus des Vielfachen eines Winkels hergeleitet iſt. Dieſe Art der Rechnung gewährt immer beträchtliche Abkürzungen, wenn gleich darin Formen von Größen aufgenommen werden, die ihr eigenes Geſetz, von dem für die andern Größen geltenden Geſetze verſchiedenes, haben. Es iſt gut, merkwürdige Beyſpiele von dieſem Rechnungs-Verfahren zu erhalten.

Moivre erweiterte den Coteſiſchen Lehrſatz auf die dreytheiligen Functionen von der Form . . . . $r^{2n} - 2a^n r^n . \cos. \alpha + a^{2n}$. Miſcellanea Analytica p. 22. 23. Eine Conſtruction dieſer Factoren iſt folgende.

Es werde mit dem Halbmeſſer $AO = r$ (Fig 88.) ein Kreis beſchrieben. Auf dieſem nehme man den Bogen $AM = \alpha$, und $AB = \frac{1}{n}\alpha$, hier $\frac{1}{3}AM$. Von B

aus tragen man die Bogen BC, CD, DE, EF, etc. jede $\frac{2\pi}{n}$, oder theile den Umfang von B aus in n gleiche Theile. Auf OA (oder auf der Verlängerung über A hinaus) nehme man OP = a, und ziehe PB, PC, PD, PE, PF, etc. so ist das Product $PB^2 \times PC^2 \times PD^2 \times PE^2 \times PF^2 \times$ etc. $= r^{2n} - 2a^n r^n \cos\alpha + a^{2n}$, so daß die Anzahl jener Quadrate = n ist.

Denn man ziehe an einen der Theilungspuncte, wie C, den Halbmesser OC, so ist $PC^2 = OC^2 - 2OC \times OP \times \cos COP + OP^2$, das ist $PC^2 = r^2 - 2ar\cos\frac{2\pi+\alpha}{n} + a^2$, für den ersten Theilungspunct C nach B. Setzt man jede der Linien, wie PC ist, z, so ist . . . . $z^2 = r^2 - 2ar.\cos\frac{2k\pi+\alpha}{n} + a^2$. Es ist in dem Artikel, Anwendung der Geometrie auf die Algebra, VII. S. 163. gezeigt, daß dieses die Form der quadratischen Factoren der Function $r^{2n} - 2a^n r^n.\cos\alpha + a^{2n}$ ist. Man sondere nur den Factor a^{2n} ab, und setze $\frac{r}{a} = x$, um die dortige Formel zu erhalten. Also ist z^2 ein Factor dieser Function. Da der aus P gezogenen Linien Anzahl = n ist, so ist das Product ihrer Quadrate die Function, als welche auch n quadratische Factoren hat.

Man kann auch die Theilungspuncte des Umfanges von B aus abwechselnd nach der einen und der andern Seite tragen. So wird F der zweyte, D der dritte, E der vierte Theilungspunct, in dem Falle der Figur. In diesem erhält man dieselbe Lage für die Linie PF, man mag von A über B hinaus den Bogen $\frac{8\pi+\alpha}{5}$, oder nach entgegengesetzter Seite den Bogen $\frac{2\pi-\alpha}{5}$ tragen; gleich-

falls für PE dieselbe Lage, man mag von A aus nach j
ner Seite hin den Bogen $\frac{6\pi+\alpha}{5}$, oder nach die
den Bogen $\frac{4\pi-\alpha}{5}$ tragen. Allgemein, der Boge
$\frac{2k\pi+\alpha}{n}$ von A über B hinaus genommen, un
$\frac{2(n-k)\pi-\alpha}{n}$ nach der andern Seite hin, geben al
gegenseitige Complemente der ganzen Peripherie dieselb
Lage für die aus P gezogene Linie.

Anstatt die einfache Peripherie des Kreises in n gleic
Theile zu theilen, kann man auch jedes Vielfache derselbe
in n gleiche Theile theilen. Es sey AM $= \alpha$; BC, od
CD, oder DE u. s. f. $= \frac{2k\pi}{n}$, wo k eine ganze Za
ist, so ist AC $= \frac{2k\pi+\alpha}{n}$; AD $= \frac{4k\pi+\alpha}{n}$;
AE $= \frac{6k\pi+\alpha}{n}$, u. s. f. und die Werthe d

Cos $\frac{AM}{n}$ sind cos AB; cos AC; cos AD; cos A
etc. da, wenn ein Winkel α, der durch seinen Cosin
gegeben wird, in n gleiche Theile zu theilen ist, der C
sinus des nten Theils ist cos. $\frac{\alpha}{n}$; cos $\frac{2\pi+\alpha}{n}$;
cos $\frac{4\pi+\alpha}{n}$, u. s. f. Aus allen diesen Cosinus ka
man die verschiedenen, in welcher Ordnung man will, h
ausnehmen.

Um die Entstehung der Formel $PB^2 \times PC^2 \times P$
$\times$ etc. $= r^{2n} - 2a^n r^n \cos \alpha + a^r$ auch unabhän

von der Rechnung des Unmöglichen einzusehen, wollen wir sie in zwey Beyspielen, für ein ungerades und für ein gerades n, durch bloße goniometrisch-algebraische Rechnung herausbringen.

Es sey erstlich $n = 5$, und die Peripherie sey in fünf gleiche Theile, BC, CD, DE, EF, FB, getheilt. Nun ist

$$PB^2 = r^2 + a^2 - 2ar\cos\frac{\alpha}{n}$$

$$PC^2 = r^2 + a^2 - 2ar\cos\frac{2\pi + \alpha}{n}$$

$$PD^2 = r^2 + a^2 - 2ar\cos\frac{4\pi + \alpha}{n}$$

$$PE^2 = r^2 + a^2 - 2ar\cos\frac{6\pi + \alpha}{n}$$

$$PF^2 = r^2 + a^2 - 2ar\cos\frac{8\pi + \alpha}{n}$$

Das Aggregat dieser Cosinus sey $= A$; das Aggregat ihrer Binionen, Ternionen, Quaternionen, und das Product aller seyn B, C, D, E. Es ist $PB^2 \times PC^2 \times PD^2 \times PE^2 \times PF^2 = (r^2 + a^2)^5 - (r^2 + a^2)^4 . 2arA + (r^2 + a^2)^3 . 4a^2r^2 . B - (r^2 + a^2)^2 . 8a^3r^3 . C \ldots + (r^2 + a^2) . 16a^4r^4 . D - 32a^5r^5 . E$. Ferner ist wenn x einen jede dieser Cosinus bedeutet, (Goniometrie, IV. 69.)

$$16x^5 - 20x^3 + 5x - \cos\alpha = 0.$$

Hier ist das Aggregat der Wurzeln $x = 0$. Das Aggregat ihrer Binionen $= -\frac{20}{16}$; der Ternionen $= 0$; der Quaternionen $= +\frac{5}{16}$, das Product aller $= +\cos\alpha$ (Gleichung, VI. 6.). Folglich ist $A = 0$; $B = -\frac{20}{16}$;

$C = 0$; $D = +\frac{5}{16}$; $E = \frac{1}{16}\cos\alpha$. Demnach ist das Product $PB^2 \times \ldots \times PF^2 = (r^2 + a^2)^6 - 5a^2r^2(r^2 + a^2)^5 + 5a^4r^4(r^2 + a^2) - 2a^6r^6\cos\alpha$, $= r^{12} + a^{12} - 2a^6r^6\cos\alpha$, wie nach der aufgestellten Formel.

Zweytens sey $n = 6$, und die Peripherie sey in sechs gleiche Theile getheilt. Die Quadrate der aus einem Puncte P des Durchmessers wie vorher an die Theilungspuncte gezogenen Linien sind I. $r^2 + a^2 - 2ar\cos\frac{\alpha}{6}$;

II. $r^2 + a^2 - 2ar\cos\frac{2\pi + \alpha}{6}$ . . . . . .

VI. $r^2 + a^2 - 2ar\cos\frac{10\pi + \alpha}{6}$. Die Gleichung für die Cosinus dieser Winkel ist

$$32x^6 - 48x^4 + 18x^2 - (1 + \cos\alpha) = 0.$$

Die Summe der Unionen, der Ternionen und der Quinionen der Wurzeln dieser Gleichung oder jener Cosinus ist $= 0$. Die Summe der Binionen ist $= -\frac{48}{32} = B$; der Quaternionen $= +\frac{18}{32} = D$; das Product aller sechs $= -\frac{1 + \cos\alpha}{32} = F$. Nun ist das Product von den Quadraten der sechs aus P an die Theilungspuncte gezogenen Linien $= (r^2 + a^2)^6 + (r^2 + a^2)^4 . 4a^2r^2 . B + (r^2 + a^2)^2 . 16a^4r^4 . D + 64a^6r^6 . F$, und durch die gefundenen Werthe von B, D, F ist dieses Product $= (r^2 + 2)^6 - 6a^2r^2(r^2 + a^2)^4 + 9a^4r^4(r^2 + a^2)^2 - 2a^6r^6(1 + \cos\alpha)$. Entwickelt ist dasselbe $= r^{12} - 2a^6r^6\cos\alpha + a^{12}$.

ie Producte von den Quadraten der aus P an
ng gezogenen Linie nach einem und demselben
macht werden, was auch die Zahl n für einen
be, und da ferner die Coefficienten von x in der
für cos α, woraus die Combinationen in jenem
gebildet sind, auch ein bestimmtes Gesetz der
n, aus n beobachten, so darf man aus den bei-
ickelungen des Products für n = 5 und n = 6
daß überhaupt die Quantität von n nur die Po-
n r und a bestimme, und daher alles bis auf die
der $r^{2n} - 2a^n r^n \cos\alpha + a^{2n}$ sich aufhebe, so
efundene Form des Products allgemein ist. —
ch größer als r seyn dürfe, ergiebt die geführte
durch die Formeln für PB^2, PC^2, etc.
n AM = o, also auch AB = o gesetzt wird, so
= + 1, und das Product von den Quadraten
gezogenen Linien ist $= r^{2n} - 2a^n r^n + a^{2n}$
$- a^n)^2$, also ist das Product jener Linien
a^n.

man AM = π, dem halben Umfange, also

$\frac{\pi}{n}$ so ist cos α = — 1, und das Product der Qua-

$B^2 \times PC^2 \times$ etc. $= r^{2n} + 2a^n r^n + a^{2n}$
$a^n)^2$, also das Product $PB \times PC \times$ etc.
a^n.

erhält man die beiden zuerst betrachteten Fälle,
terschied aus der beide begreifenden Anordnung
nder wird.

man AM = $\frac{1}{2}\pi$, so ist AB = $\frac{\pi}{2n}$, und

$PC^2 \times$ etc. $= r^{2n} + a^{2n}$.

hier angewandte Verfahren bey der Entwickelnng
ucts $PB^2 \times PC^2 \times$ etc. hat einiges ähnliche
von Thomas Simpson gebrauchten, in den
n several subjects in speculative and mix'd
atieks. London 1740. pag. 113 seqq.

Die trigonometrisch-algebraische Rechnung daselbst ist noch nicht genug geschmeidig, wie es zu der Zeit, da das Buch geschrieben ward, noch nicht anders seyn konnte.

Der Beweis, welchen Krafft in den Comm. Petrop. novis, Tom. I. pag. 134, vorgetragen, beruhet bloß auf Induction von drey Fällen bey der Eintheilung des Umfanges in 4, 6, 8 gleiche Theile, und ist zur Erläuterung des Bernoullischen Beweises bestimmt. Der hier zuletzt von mir gegebene ist davon ganz verschieden.

Cubatur, s. Cubirung.

Cubikcubische Wurzel, radix cubo-cubica, ist die Wurzel vom sechsten Grade aus einer Zahl, z. B. 2 aus 64; 3 aus 729. Sie wird bezeichnet durch $\sqrt[6]{a}$ oder $a^{\frac{1}{6}}$. Sie wird durch Hülfe des binomischen Lehrsatzes für gebrochne Exponenten, oder durch eine Annährungs-Methode gefunden. S. Wurzel.

Cubikcubische Zahl, Cubo-Cubus, ist die sechste Potenz einer Zahl, oder das Product aus einem Cubus in sich selbst. Sie wird bezeichnet durch a^6, wenn a die Wurzel ist.

Cubik-Einheit ist der Cubus oder Würfel, womit in der praktischen Geometrie die Körper gemessen werden. Diese ist der Würfel derjenigen Linie, womit die Längen gemessen werden. Ist die Längen-Einheit ein Fuß, ein Zoll, eine Linie (der zehnte oder zwölfte Theil eines Zolles), oder eine Klafter, eine Ruthe, eine Meile, so ist die Cubik-Einheit ein Cubikfuß, Cubik-(Zoll, Linie, Klafter, Ruthe, Meile). Die Cubik-Einheiten verhalten sich wie die Cubikzahlen der Längen-Einheiten. Wird der Fuß in 10 Zolle, der Zoll in 10 Linien getheilt, so enthält ein Cubikfuß 1000 Cubikzoll, und der Cubikzoll 1000 Cubiklinien. Die Cubik-Einheiten von gleichnamigen Längen-Einheiten verhalten sich ebenfalls wie die

Cubikzahlen der letztern. Z. B. Wenn der alte Pariſer-Fuß und der Rheinländiſche ſich verhalten wie 80 : 89, ſo verhalten ſich der Pariſer und Rheinl. Cubikfuß wie 27000 : 24389. Wenn ſich die altfranzöſiſche Lieue und die geographiſche Meile verhalten wie 3 : 5, ſo verhalten ſich die Cubik-Einheiten wie 27 : 125.

Cubik-Tafeln ſind Tafeln, worin die Cubi oder Würfelzahlen der ganzen Zahlen nach ihrer Folge angegeben werden. Dergleichen ſind, Joh. Pauli Buchneri tabula radicum, quadratorum et cuborum ad radicem 12000 extenſa. Norib. 1701. Sie ſind voller Fehler. Joh. Ludolfi Tetragonometria tabularia, Jenae 1712 enthält die Würfel der Zahlen bis 10000, die Quadrate bis zu der Wurzel 100000. In des mathematiſchen Lexici (des vermehrten Wolfiſchen) zweytem Theil, Leipzig 1742, ſind die Quadrate und Würfel aller Zahlen von 1 bis 10000 verzeichnet. Dieſe ſcheinen correct zu ſeyn. In Vega's logarithmiſchen und trigonometriſchen Tafeln, Band II. ſind ſie auch enthalten.

Die Richtigkeit der Angaben kann man bequem durch die Neunerprobe erfahren, vorausgeſetzt, daß nicht zwey entgegengeſetzte Druckfehler zugleich vorhanden ſind. Die Probezahl heiße der Überſchuß der Summe der Ziffern über ein Vielfaches von Neun. So gehören zuſammen:

Probezahl für die Wurzel	0,	1,	2,	3,	4,	5,	6,	7,	8.
Probezahl für die Würfel	0,	1,	8,	0.	1,	8,	1,	0,	8,

Z. B. von der Zahl 2821 iſt der Würfel 22449 633661. Jene hat zur Probezahl 4, dieſe 1.

Die Verfertigung der Cubiktafeln geſchieht durch Addition der Glieder der Differenzreihen. Es iſt in der Buch-

stabenrechnung (21,) gezeigt, daß die dritten Unterschiede der Würfel, deren Wurzeln eine arithmetische Progression mit dem Unterschiede d ausmachen, die beständige Zahl $6d^3$ sind. In dem gegenwärtigen Falle sind die dritten Unterschiede = 6. Die zweyten Unterschiede sind daher, von Anfange an, die arithmetische Reihe 12, 18, 24, etc. Daraus und dem Anfangsgliede 7, entsteht die arithmetische Reihe der zweyten Ordnung 7, 19, 37, 61, etc. und daraus die Reihe der Würfel 1, 8, 27, 64, 125, etc. als eine arithmetische Reihe der dritten Ordnung.

Cubikwurzeln aus den ersten 1000 Zahlen bis auf Zehnmillionentheile berechnet, finden sich in Schulzens und in Vega's Tafeln.

Die Cubiktafeln erleichtern die Ausziehung der Wurzeln, weil man durch sie den ersten Theil der Wurzel in drey oder vier Ziffern findet. Z. B. von der Zahl 14907 ist die Cubikwurzel 24,61 . . . weil 14907000000 zwischen die Würfel von 2461 und 2462 fällt, also jene Zahl zwischen die Würfel von 24, 61 und 24, 62.

Cubikwurzel aus einer Zahl ist einer von den drey gleichen Factoren einer Zahl. Die gemeinste Art, die Cubikwurzel aus einer Zahl zu ziehen, ist folgende. 1) Die gegebene ganze Zahl wird in Classen getheilt, den Anfang mit der niedrigsten rechter Hand gemacht. In der höchsten Classe linker Hand mögen zwey oder nur eine Ziffer bleiben. Die Wurzel bekommt so viele Ziffern als Classen vorhanden sind. 2) Man suche die einziffrige Zahl, deren Wurzel der Zahl in der höchsten Classe am nächsten kommt, und kleiner ist, wenn sie nicht etwa dieselbe seyn sollte. Diese Zahl ist der erste Theil der Wurzel. Sie heiße A. Ihren Würfel ziehe man ab von der Zahl in der höchsten Classe. 3) Zu dem Reste setze man die Ziffern der zweyten Classe, und dividire die Zahl, welche aus dem Reste in der ersten Classe nebst der höch-

n Ziffer der zweyten besteht, durch das Dreyfache des uadrats von A, oder 3 A A, der Quotient ist der zweyte eil der Wurzel, B, wenn sich die gleich zu erwähnen n beiden Theile an ihren Stellen noch abziehen lassen. onst ist B um Eins kleiner als jener Quotient. 4) Das roduct 3 A A B setze man mit der niedrigsten Ziffer un- die höchste Ziffer der zweyten Classe, darauf die nie- igste Ziffer des Products 3 A A B unter die mittelste Zif- derselben Classe, und endlich den Würfel von B, oder B B mit der niedrigsten Ziffer unter die letzte Ziffer eben ser Classe. Alle drey Producte ziehe man von der in n beiden ersten Classen übrig gebliebenen Zahl ab.

Zu dem Reste nehme man die drey Ziffern der drit- n Classe von der linken Hand gerechnet. Nun ver- hrt man, um die dritte Ziffer der Wurzel, C, zu den, eben so wie für B. Anstatt A hat man n A + B. Es wird also der Rest der beiden er- n Classen nebst der ersten Ziffer der dritten durch $(A + B)^2$ dividirt; der Quotient ist C, mit der Ein- ränkung bey nr. 3. Die Producte $3(A+B)^2 C$, $(A+B)C^2$ und C C C werden auf dieselbe Art wie in r. 4 hingesetzt, und abgezogen. So wird fortgefahren, is daß man zu der Classe der Einer kommt.

Exempel. Zahl

	78	953	746	4
	64			
48)	14	953		
	9	6..		
		48.		
		8		
5292)	4	865	746	
	4	762	8..	
		102	06.	
			729	
Rest			157	

Die gegebene Zahl ist um 157 größer als der Q von 429.

Die Probezahl von dem Cubus der gefundenen zel plus der Probezahl des Restes ist der Probeza vorgegebenen Zahl gleich, oder derselben um 9 größert. Hier ist $0 + 4 = 4$.

Diese Zerlegung einer Zahl in drey gleiche Factor ruht auf der Zusammensetzung derselben (Synthesis ihren gleichen Factoren. S. Cubus.

Um die Wurzel, wenn sie sich nicht unter den g Zahlen findet, in Decimaltheilen zu erhalten, hängt so viele Ternen von Nullen an, als man Decimal suchen will, und verfährt ganz auf die vorher gem Weise.

Denn so wie der Cubus eines Bruchs der Cubu Zählers dividirt durch den des Nenners ist, so ist au Cubikwurzel aus einem Bruche die Cubikwurzel aus Zähler dividirt durch die aus dem Nenner. Die Anhän

der Nullen ist eine Multiplication mit 1000, oder 1000 000, u. s. f. Dagegen muß man sich eben diese Multiplicatoren auch als Divisoren des Products gedenken, und aus diesen die Wurzel ziehen.

Exempel.

	78953746	429,02
$429^3 =$	78953589	
	157 000 000	
552123)	110 424 6..	
	51 48.	
	8	
Rest	46 523 912	

Aus diesem Exempel ersieht man zugleich, wie man sich durch Cubiktafeln die Arbeit abkürzen kann. Der Cubus von 429 ist unmittelbar aus einer solchen Tafel genommen.

Die vorher angeführte Probe giebt $8 + 5 = 4 + 9$.

Wenn die Zahl, woraus die Cubikwurzel gezogen werden soll, Decimaltheile enthält, so muß die Abtheilung in Classen bey dem Komma, oder den Einern, angefangen, und nach beiden Seiten hin fortgesetzt werden. Wenn in der letzten Classe der Decimaltheile zwey oder eine Ziffer fehlen, so werden dafür Nullen gesetzt. Z. B. in der Zahl 3879,7885, welche so abgetheilt und ergänzt wird: 3|879,|783|500. Die Zahl mit den Decimaltheilen ist anzusehen als der Zähler eines Bruchs, dessen Nenner die Einheit mit dreymahl so viel Nullen ist, als Classen rechter Hand des Komma sind. Die Wurzel aus jener ganzen Zahl ist durch die Wurzel aus dem Nenner zu dividiren. In dem Exempel ist die Wurzel 15, 78 . . .

Das gemeine Verfahren wird aber bald beschwerlich Leichter ist die Annäherungs-Methode, welche auch bei Auflösung algebraischer Gleichungen gebraucht wird. Ein Beyspiel wird sie hinlänglich lehren.

Es sey die Cubikwurzel aus 2 bis auf die zehnte Decimalstelle zu finden. Die Tafeln zeigen, daß sie ein wenig kleiner ist als 1,26. Man setze $\sqrt[3]{2} = 1{,}26 - u$ so ist

$$2 = 2{,}000376 - 4{,}7628\,u + 3{,}78\,u^2 - u^5,$$

also

$$4{,}7628\,u = 0{,}000376 + 3{,}78\,u^2 - u^5.$$

Das gegebene Glied durch den Factor von u dividirt giebt zum Quotienten 0,0000 7894515. Also ist u nahe 0,00008, und $3{,}78\,u^2$ nahe 24^{-9}, wo die -9 über ihre Stelle nach dem Komma bezeichnet. Das zweyte Glied jener Gleichung hat also erst auf die 8te Decimalstelle von u Einfluß, so daß u bis auf die 7te Decimalstelle richtig ist, oder $u = 0{,}0000789$, also . . $3{,}78\,u^2 = 23530^{-12}$, und die Ergänzung von . . $u = +494^{-11}$, so daß $u = 0{,}00007895009$, und $\sqrt[3]{2} = 1{,}25992104991$, fast übereinstimmig mit den in dem Artikel, Binomischer Lehrsatz, (16.) Exempel III gefundenen Werthe.

Eine bequeme Näherungsformel ist folgende, deren Beweis in dem Artikel, Wurzel, gegeben wird. Es sey N die Zahl, woraus die Cubikwurzel gezogen werden soll, und a ein naher Werth der Wurzel, welchen man durch Hülfe der Logarithmen finden mag, oder durch die Cubiktafeln erhält. Wenn nun $N = a^3 + b$ ist, so ist nahe

$$\sqrt[3]{N} = a + \frac{b}{3a^3 + b}a + \frac{2}{81} \cdot \frac{b^3}{a^9}a,$$

Iſt a^5 größer als N; ſo iſt b negativ. Setzt man für a die nach dieſer Formel gefundene Wurzel, ſo weit man ſie für richtig hält, ſo wird b gegen a viel kleiner, und die Wurzel wird viel genauer gefunden.

Exempel. Die Cubikwurzel aus 2 zu finden. Man ſuche ſtatt dieſer die Cubikwurzel aus 2.64 oder aus 128. Hier iſt $a^5 = 125$, und $b = 3$; alſo der erſte Theil der Formel $= 5$; der zweyte $= 0{,}03968254 \ldots$; der dritte $= 0{,}00000171 \ldots$ und $\sqrt[3]{128} = 5{,}0396842 \ldots$, alſo $\sqrt[3]{2} = 1{,}2599210 \ldots$ übereinſtimmig mit der Rechnung. S. 336.

Lagny gab zur Ausziehung der Cubikwurzel die beiden Formeln an: $a + \frac{ab}{3a^5 + b}$, und $\ldots$; $\frac{1}{2}a + \sqrt{(\frac{1}{4}a^2 + \frac{b}{3a})}$. Man ſehe Halleys Abhandlung über die Annäherung zu den Wurzeln einer Gleichung bey Newtons Arithm. univerſ. ed. Graveſandi, p. 246.

Die Formel des binomiſchen Lehrſatzes für gebrochne Exponenten giebt den Werth der Wurzeln bis zu jeder verlangten Gränze, auch für den Quotienten der Einheit durch die Wurzel dividirt. Sie erfordert zur ſchnellern Convergenz oft einige Vorbereitung, die bey Näherungsformeln auch nöthig zu ſeyn pflegt.

Cubikwurzel aus dem Binomium $A + \sqrt{B}$ iſt einer der drey gleichen Factoren deſſelben von eben der Form, wofern es einen ſolchen giebt. Die Erfindung dieſer Wurzel hängt von der Auflöſung einer cubiſchen Gleichung ab.

Es ſey $\sqrt[3]{(A + \sqrt{B})} = (p + \sqrt{q}) \cdot \sqrt[3]{\alpha}$, ſo iſt $A = p^3\alpha + 3pq\alpha$, und $\sqrt{B} = (3p^2\sqrt{q} + q\sqrt{q})\alpha$, weil die Irrationale $\sqrt{B}$ nur einer Größe von derſelben

ſo ſetze man $\alpha = 1$; iſt jenes nich

nehmen, daß $\frac{A^2 - B}{\alpha^2}$ eine ratio

Man ſetze $\frac{A^2 - B}{\alpha^2} = n^2$, ſo i

$q = p^2 - n$. Dieſen Werth
Werthe von A, ſo wird erhalten

$$A = 4p^3\alpha - 3np\alpha.$$

Hat dieſe Gleichung eine rational
die Cubikwurzel aus $A + \sqrt{B}$,

ſind, durch eine Größe von derſelbe
die nur, wenn es nöthig iſt, die C
darſtellen. Die Gleichung hat, n
nur eine mögliche Wurzel, wie
giebt.

Exempel. Die Cubikwu
$= \frac{1}{2}(\pm\sqrt{5})$. Die Cubikwur

$= (1 \pm \sqrt{3} \cdot \sqrt[3]{\frac{1}{8}}$.

Stifel giebt in ſeiner A

Stifels eigenen Worten her. Das gegebene Binomium ist $45 + \sqrt{1682}$. „Subtrahir die quadrata der zweyer teyl von einander (als 1682 von 2025) und aufs dem relict extrahir radicem cubicam (als aufs 343 kompt 7) und zu der cubicwürtzel such ein Zal, die zu ihr addiret gebe ein quadrat zal (als zu 7 addir 2. facit 9) doch also das die selbige addirete zal müge dividiren das quadrat deſs Surdischen teyls, das ein quadrat zal komme (als 2 dividiret 1682 also) so ist denn radix quadrata deſs aggregats, der erste teyl der cubic würtzel (als $\sqrt{9}$ das ist 3) und radix quadrata der gefundnen zal ist der kleyner teyl (als $\sqrt{2}$,) ist also die gantze radix gefunden."

Cubirung der Körper (Cubatio) ist die Vergleichung ihres Inhalts mit einem gegebenen Körper, als mit einem Würfel, einem Cylinder, einer Kugel von bestimmter Größe.

Prismen, Pyramiden, Cylinder und Kegel zu cubiren lehrt die Elementar-Geometrie. Das Verhältniß eines Prisma zu einem Würfel wird zusammengesetzt aus dem Verhältnisse ihrer Grundflächen und Höhen. Eine Pyramide ist der dritte Theil eines Prisma, deſſen Grundfläche so groß ist als die Grundfläche jener, und das gleiche Höhe mit ihr hat. Cylinder lassen sich unmittelbar nur mit Cylindern vergleichen, doch auch mit Prismen oder einem Würfel, wenn man sich die Kreisfläche in ein Dreyeck oder Quadrat, verwandelt gedenkt. Ein Kegel ist der dritte Theil eines Cylinders mit derselben Grundfläche und Höhe.

Archimedes war es, der die Kugel, das Sphäroid und das paraboliſche Konoid, auch ihre Abschnitte zu cubiren lehrte. Sein scharfsinniges Verfahren zeigen seine beiden Bücher von der Kugel und dem Cylinder, und das Buch von den Konoiden und Sphäroiden. Vor der Erfindung der jetzigen Infinitesimal-Rechnung wurden mancherley Körper cubirt, und zwar durch Summirungen von Reihen der Potenzen, wenn die parallelen Schnitte sich wie Potenzen ihrer Abstände von dem Scheitel verhielten, oder in Theile zerlegt werden konnten, die sich wie Potenzen ver-

halten. So verfuhren Cavaleri und Wallis. Die neuere Infinitesimal-Rechnung ist auf diese Arten von Körpern nicht eingeschränkt, und bedient sich auch keiner Summirung.

In der Ebene der krummen Linie AMS (Fig. 89. Tab. VI.) ist die gerade Linie AX gezogen. Eine unbestimmte Abscisse auf derselben ist $AP = x$, die zugehörige normale Ordinate $PM = y$. Indem sich AS um AX dreht, beschreibt die ebene Figur APM einen runden Körper, dessen Inhalt aus der Gleichung zwischen den Coordinaten gefunden werden soll. Man nehme noch ein Paar Coordinaten AQ, QN, und setze $AQ = x + \Delta x$; $QN = y + \Delta y$. Der von APM durch eine volle Umdrehung beschriebene Körper sey $= Z$, der von AQN beschriebene $= Z + \Delta Z$, die von PM und QN beschriebenen Kreisflächen sind πyy und $\pi(y + \Delta y)^2$, der zwischen beid.n enthaltene Abschnitt ist ΔZ. Nun ist $\Delta Z > \pi yy.\Delta x$, und $\Delta Z < \pi(y + \Delta y)^2 \Delta x$; wenn nämlich NQ größer als MP ist, sonst umgekehrt. Oder: $\frac{\Delta Z}{\Delta x} > \pi yy$, und $\frac{\Delta Z}{\Delta x} < \pi(y + \Delta y)^2$. Der Differential-Quotient, der von den Veränderungen Δx, Δy, ΔZ, unabhängig ist, ist $\frac{dZ}{dx} = \pi yy$.

Demnach ist das Differential eines runden Körpers $dZ = \pi yy\,dx$, und $Z = \pi \int yy\,dx$, wo das Integralzeichen keine Summe bedeutet. Es ist also nur nöthig, yy durch x auszudrucken, oder auch dx durch dy mit einer Function von y verbunden.

I. Es sey AM eine Parabel, deren Gleichung ist $ax = yy$. Also ist $dZ = \pi ax\,dx$, und $Z = \frac{1}{2}\pi xyy$. Die Const. ist hier, wie allemahl, Null, wenn in allen Theilen des Integrals die Abscisse x enthalten ist. Das Konoid ist halb so groß als der Cylinder, dessen Halbmesser die Ordinate PM, und Höhe die Abscisse AP ist.

Es verhält sich zu dem Kegel über derselben Grundfläche von derselben Höhe wie $\frac{1}{2} : \frac{1}{3} = 3 : 2$.

II. Es sey wieder um AMS eine Parabel. Sie drehe sich um die durch den Scheitel A auf AX senkrechte AR, wodurch ein kegelartiger Körper mit einer concaven Oberfläche entsteht, dessen Grundfläche der von MR, einer mit AP parallelen Linie, als Halbmesser beschriebene Kreis ist. Hier ist $dZ = \pi x x dy$, wenn die Ordinate MR durch x und die Abscisse AR durch y bezeichnet werden, um die Symbolen der Linien nicht zu ändern. Für x^2 der gehörige Werth gesetzt, ist $dZ = \frac{\pi y^4}{aa} dy$; also $Z = \frac{\pi y^5}{5aa} = \frac{1}{5}\pi x x y$. Dieses Konoid verhält sich zu dem Kegel über derselben Grundfläche und von derselben Höhe wie 3 : 5.

Anders: es ist $\sqrt{ax} = y$ oder $a^{\frac{1}{2}} x^{\frac{1}{2}} = y$, also $\frac{1}{2} a^{\frac{1}{2}} x^{-\frac{1}{2}} dx = dy$, und $dZ = \frac{1}{2}\pi a^{\frac{1}{2}} x^{\frac{3}{2}} dx$. Daher $Z = \frac{1}{5}\pi a^{\frac{1}{2}} x^{\frac{5}{2}} = \frac{1}{5}\pi x^2 y$.

III. Es sey AMS (Fig. 90.) eine Hyperbel, deren Scheitel A, Mittelpunct C ist, die Abscissenlinie liegt in der Verlängerung von CA. Die halbe Hauptaxe sey $= a$; die Nebenaxe $= b$; die Coordinaten $AP = x$, und $PM = y$. Die Gleichung für die Hyperbel ist: $\frac{bb}{aa}(2ax + xx) = yy$. Also ist . . . . . $dZ = \frac{\pi bb}{aa}(2ax + xx)dx$; Folglich . . . $Z = \frac{\pi bb}{aa}(ax^2 + \frac{1}{3}x^3) = \frac{\pi bbx}{3aa}(3ax + xx)$ $= \frac{\pi xy^2}{3} + \frac{\pi bbxx}{3a}$. Der erste Theil ist der von

der Inhalt des von der Kurve C
linderartigen Körpers Cylindri
Es sey QM = CP = u, C
$b^2u^2 = a^2y^2 + a^2b$, und d

$= \frac{\pi aa}{bb}(y^2+b^2)dy$, also ist Z

$= \frac{\pi aay}{bb}(y^2+3b^2) = \frac{2}{3}\pi$

erste Theil ist Zweydrittheil
das Rechteck CALQ um C
Theil gleich dem von dem Dr
Kegel.

Oder $Z = \pi a^2y + \frac{1}{3}\pi y$
Theil der von dem Rechteck C
der ist.

V. Es ist AMS (Fig. 91.
ne ihrer Asymptoten, um welche
het. Man suche den Inhalt des
Körpers, wo AE und MP se
stehen. Es sey durch A auf A
welche die Asymptote CT in
tote Ct in b schneide, so ist A

erner $PQ = \frac{PM}{\text{tang}\,\alpha} = \frac{y}{\text{tang}\,\alpha}$. Jene Gleichung

erwandelt sich also in diese: $c^2 = (x - \frac{y}{\text{tang}\,\alpha})\frac{y}{\sin\alpha}$;

ber, $c^2 \cdot \sin\alpha^2 = xy\sin\alpha - y^2\cos\alpha$. Es ist $c \cdot \sin\alpha = AD$, $\sin ADE = AE$. Setzt man $AE = e$, ist

$$e^2 = xy\sin\alpha - y^2\cos\alpha;$$

$$\frac{e^2}{y\sin\alpha} + \frac{y\cos\alpha}{\sin\alpha} = x.$$

as Differential des von AEPM beschriebenen rpers Z ist $dZ = \pi y^2 dx$, also $dZ = \ldots$

$\left(\frac{y^2\cos\alpha}{\sin\alpha} - \frac{e^2}{\sin\alpha}\right) dy$. Folglich $Z = \text{Const.} - \frac{\pi y}{3\sin\alpha}(3e^2 - y^2\cos\alpha)$. Es ist $Z = 0$, nn $y = AE = e$ ist. Daher ist

$$\text{Const.} = \frac{\pi e^3(3-\cos\alpha)}{3\sin\alpha}, \text{ und}$$

$$= \frac{\pi}{3\sin\alpha}((3-\cos\alpha)e^3 - 3e^2y + y^3\cos\alpha).$$

er ganze ins Unendliche fortgesetzte Körper, dessen re die Asymptote von E an ist, ist $= \frac{\pi(3-\cos\alpha)}{3\sin\alpha} e^3$, der die Constans.

Für die gleichseitige Hyperbel, an welcher $AB = AC$; $\alpha = 90°$, und $c = e$ ist, ist $Z = \pi c^2(c - y)$, und der ganze Körper von E an ist $= \pi c^3$.

Torricelli hat diesen Körper schon betrachtet, und nennt ihn solidum hyperbolicum acutum. Eine ausführliche Untersuchung desselben steht in seinen Operibus geometricis. Er vergleicht den Inhalt des

parabolischen Konoids durch di
Parabel; und MN der Durch
mit einer andern schneidenden E
senkrecht ist. Der Durchschni
ten Ebene mit der Oberfläche d
lipse, deren große Axe = M
+ NQ ist, wenn MP und N
sind, (s. Konoid). Durch die
man eine Parallele BZ mit
diese alle mit MN parallele Ch
zu dem Durchmesser BZ sey =
ON = u, so ist bt = uu,
Fläche der Ellipse verhält sich
ses mit dem Durchmesser MN,
der großen, also wie MP + N
kel BOM sey = φ, so ist dieses
Die Fläche der Ellipse ist also
schnitt des Konoids, zwischen d
messers B und dem Schnitt durch
Veränderung ΔZ desto näher
$\pi u^2 \sin\varphi . \sin\varphi \Delta t$, wo $\sin\varphi \Delta$
kleiner Δt genommen wird, und

tienten $\frac{\Delta Z}{\quad} = \pi u^2 \sin\varphi$

er jener Grundfläche die Hälfte des elliptischen Cylin-
rs, und $\frac{1}{3}$ des elliptischen Kegels. Denn der Cylinder
$= \pi u^2 \sin\varphi \times t \sin\varphi$, wo der erste Factor die Grund-
iche, der zweyte die Höhe ist. Der Kegel ist $\frac{1}{3}$ des
ylinders.

VII. Es sey SAS (Fig. 93.) der Schnitt eines
perbolischen Konoids durch die Axe, also eine Hyper-
l, und MN der Durchschnitt der Ebene SAS mit ei-
r andern schneidenden Ebene, auf welche SAS senk-
cht ist. Der Durchschnitt der durch MN gelegten
bene mit der Oberfläche des Konoids ist hier eine El-
pse, da der Schnitt eine ringsum begränzte Figur ist.
Konoid). Die große Axe derselben ist MN. Der
Werth derselben so wie der Werth der kleinern Axe werden
rch die beiden Axen der Hyperbel, und durch AP,
M, und den Winkel MRA des Schnittes mit der
re gegeben (s. e. das.). Das Verhältniß der beiden
ren ist für alle parallele Schnitte dasselbe. Nämlich,
enn die beiden Axen der Hyperbel sind, 2a und 2b,
d der Winkel MRA des Schnittes mit AX $= \varphi$,
e große Axe des elliptischen Schnittes $= 2f$, die kleine
$= 2g$, so ist $\sin\varphi^2 - \frac{bb}{aa}\cos\varphi^2 = \frac{gg}{ff}$. Diesen
uotienten bezeichne man durch m^2. Durch die Mitte
von MN, und durch den Mittelpunct der Hyperbel C
ehe man die Linie COZ, so ist diese ein Durchmesser für
le mit MN parallele Chorden (s. Ellipse), der Scheitel-
unct ist B. Die Gleichung zwischen den Coordinaten
O und OM oder ON ist eine ganz ähnliche, wie die
ir Abscissen auf dem Hauptdurchmesser für normale Co-
dinaten. Es sey CB $= \alpha$, der halbe conjugirte
urchmesser $= \beta$; BO $= t$, OM $= u$, so ist
$z = \frac{2\beta\beta}{\alpha} t + \frac{\beta\beta}{\alpha\alpha} t^2$. Es ist $2u$ die große Axe des
liptischen Schnittes in dem Konoid, und die kleine
$= mu$, wo m den vorhergehenden angeführten Werth

hat. Die Fläche des elliptischen Schnittes ist $\pi m u^2$, da πu^2 die Fläche des Kreises mit dem Halbmesser u ist.

Nun sey der Abschnitt des Konoids zwischen B und der durch M N gelegten, auf S A S senkrechten Ebene $= Z$, und der Winkel B O M $= \omega$, so ist $d Z = \pi m u^2 . \sin \omega . dt =$

$$\pi m \sin \omega \left(\frac{2\beta\beta}{\alpha} t + \frac{\beta\beta}{\alpha\alpha} t^2\right) dt \text{ also}$$

$$Z = \pi m t \sin \omega \left(\frac{\beta\beta}{\alpha} t + \frac{\beta\beta}{3\alpha\alpha} t^2\right).$$

$$\text{Da } \frac{\beta\beta}{\alpha\alpha} = \frac{u^2}{2\alpha t + t^2} \text{ ist, so ist}$$

$$Z = \tfrac{1}{3} \pi m u^2 t \sin \omega . \frac{3\alpha + t}{2\alpha + t}.$$

Der Inhalt eines Kegels, über dem elliptischen Schnitte als Grundfläche, mit der Axe B O, und dem Neigungswinkel B O M derselben gegen die Grundfläche ist $= \tfrac{1}{3} \pi m u^2 t \sin \omega$. Es verhält sich also der schiefe Abschnitt des hyperbolischen Konoids zu diesem Kegel wie $3\alpha + t : 2\alpha + t$. Archimedes hat schon eben diese Vergleichung gemacht, in dem Buche von Konoiden und Sphäroiden, 28. Satz. Die Vergleichung des schiefen Abschnitts eines paraboliſchen Konoids mit einem Kegel, der dieselbe Grundfläche und Höhe mit dem Abschnitte hat, macht er das. im 24sten Satze.

Die Cubirung der Kugel und der Sphäroiden und ihrer Abschnitte, in den Artikeln: Kugel und Sphäroid.

VIII. Zur Übung diene noch die Cubirung der Cissoide. Die Cissoide A M D M (Fig. 71. Tab. V.) drehe sich um den Durchmesser des Kreises A B als Axe. Man sucht den von dem Trilineum A P M beschriebenen Körper.

Es ist die Abscisse A P $= x$, die Ordinate

$= y$, und die Gleichung für dieselben, $x^3 =$

$x)y^2$, also $y^2 = \frac{x^5}{a-x}$. Diese gebrochne Function

andle man (Integralformel. Anmerk. bey 7.)

ieſe, $\frac{a^3}{a-x} - x^2 - ax - a^2$, ſo daß $y^2 dx$

$\frac{a^3 dx}{a-x} - x^2 dx - ax dx - a^2 dx$. Nun iſt

$dx = \text{Const.} - a^3 \log. \text{nat.} \frac{a-x}{\text{const.}} - \frac{1}{3}x^3$

$\frac{1}{2}ax^2 - a^2 x$. Dieſes Integral iſt $= o$, wenn

$= o$ iſt. Daher iſt die algebraiſche Const. $= o$,

in der Zahl zu dem Logarithmen iſt Const. $= a$.

iſt der ciſſoidaliſche Körper, $Z = \int \pi y^2 dx =$

$(a^3 \log \frac{a}{a-x} - \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}ax^2 - a^2 x)$.

Wenn $x = a$ geſetzt wird, ſo giebt die Formel den

jalt des von der ins Unendliche ſich erſtreckenden Fi-

ABTm um AB beſchriebenen Körpers. Dieſer

nendlich, da $\log \frac{a}{o} = \log$ infin. eine unendlich

ze Größe iſt. Sie iſt unter allen Unendlichen die

nſte.

IX. Den Körper zu cubiren, der durch die Um-

jung eines Kreisſegments um ſeine Chorde ent-

t.

Es ſey AB eine Chorde in dem Kreiſe, der aus C

dem Halbmeſſer CD beſchrieben iſt; dieſer ſey auf

) ſenkrecht, und ſchneide ſie in E, das kleinere Seg-

t drehe ſich um AB. Man ziehe FCG parallel

AB, und NPM ſenkrecht auf beide, Es ſey

$) = a$, $CE = b$; $EB = c$; $EP = x$, PM

y, ſo iſt $(b+y)^2 + x^2 = a^2$. Das Solidum

zwischen dem Kreise mit ED und dem unbestimmten mit PM sey Z, so ist $dZ = \pi y y dx$. Nun ist $(b+y)dy = -x dx$, also ist

$$dZ = -\frac{\pi(b+y)y^2 dy}{\sqrt{(a^2-(b+y)^2)}}.$$

Man setze $b+y=z$, d. i. NM $= z$, so ist $y^2 = z^2 - 2bz + b^2$, und

$$dZ = -\frac{\pi(z^3 - 2bz^2 + b^2 z)dz}{\sqrt{(a^2-z^2)}}.$$

Es ist (Integralformel 40, 39.)

$$\int\frac{z^3 dz}{\sqrt{(a^2-z^2)}} = \text{Const.} - \tfrac{1}{3}(2a^2+z^2)\sqrt{(a^2-z^2)};$$

$$\int\frac{z^2 dz}{\sqrt{(a^2-z^2)}} = \text{Const.} + \tfrac{1}{2}a^2 \operatorname{Ang\,sin}\frac{z}{a} \ldots - \tfrac{1}{2}z\sqrt{(a^2-z^2)}$$

$$\int\frac{z\,dz}{\sqrt{(a^2-z^2)}} = C - \sqrt{(a^2-z^2)}.$$

Folglich ist

$$Z = \text{Const.} + \pi(\tfrac{1}{3}z^2 - bz + \tfrac{2}{3}a^2 + b^2)\sqrt{(a^2-z^2)} + \pi a^2 b \operatorname{Ang\,sin}\frac{z}{a}.$$

Da $Z = o$ für $z = a$, so ist Const. $= -\frac{1}{2}\pi^2 a^2 b$. Den ganzen Körper M, der durch die Umdrehung von ADBA um AB entsteht, zu erhalten, setze man $z = b$ für $y = o$, und multiplicire auf beiden Seiten mit 2, so ist $M = \frac{2}{3}\pi(2aa + bb)c - 2\pi a^2 b \operatorname{Ang.cos}\frac{b}{a}$.

Es ist nämlich $a^2 - b^2 = c^2$, und $\frac{1}{2}\pi - \operatorname{Ang.sin}\frac{b}{a} = \operatorname{Ang.cos}\frac{b}{a}$.

. Man kann dasselbe noch bequemer folgenderge-
inden. Da $(b+y)^2 = b^2 + 2by + y^2$ ist,
$b^2 + 2by + y^2 + x^2 = a^2$, also
$a^2 - b^2 - x^2 - 2by$, und

$^2 dx = (a^2 - d^2) dx - x^2 dx - 2 dy dx$;

$\int y^2 dx = (a^2 - b^2) x - \frac{1}{3} x^3 - 2b \int y dx$.

onst. $= 0$, und $\int y dx$ die Area EPMD ist.
$x = c$ ist der algebraische Theil des Integrals
$^2 - b^2) c - \frac{1}{3} c^3 = \frac{2}{3} c^3$. Für eben diesen
h von x ist $\int y dx =$ Sect. BCD $-$ ΔBCE

a^2 Arc. cos $\frac{b}{a} - \frac{1}{2} bc$, wo Arc. cos. $\frac{b}{a}$ zu dem

nesser, der der Einheit gleich ist, gehört. Dem-
ist, für $x = c$,

$$Z = \pi (\tfrac{2}{3} c^3 + b^2 c - a^2 b \text{ Arc. cos } \frac{b}{a})$$

$$= \pi (\tfrac{2}{3} a^2 + \tfrac{1}{3} b^2) c - \pi a^2 b \text{ Arc. cos } \frac{b}{a},$$

er ganze Körper

$$[= \tfrac{2}{3} \pi (2a^2 + b^2) c - 2\pi a^2 b \text{ Arc. cos. } \frac{b}{a},$$

orher. Die Ausdrücke Ang. cos $\frac{b}{a}$, und Arc.

$\frac{b}{a}$ sind ganz gleichgültig.

epler hat schon den Inhalt dieses Körpers gefun-
n der Stereometria doliorum. Hernach hat
aleri auf eine andere Art denselben herausge-
, in der Ge metria indivisibilibus continuorum,
100. Man sehe Montucla hist. des Mathém.
I. p. 30, 40. Die Dissertation von Pfleiderer:
eri methodus solida quaedam sua dimetiendi
rata. Tubingae 1795.
avaleri vergleicht den Körper, welchen das Kreis-

Segment beschreibt, mit dem Cylinder, dessen Halbmesser ED und Höhe AB ist. Der Inhalt dieses Cylinders ist $= 2\pi(a-b)^2 c$. Man nehme eine Linie f, so daß $(a-b)c$ area $EDB = b:f$, so verhält sich jener Körper zu dem Cylinder, wie $2(a+b-3f):3(a-b)$. Dieses ist das Verhältniß, welches Cavaleri a. a. O. angiebt.

Die Cubirung der Conchoide s. in dem Artikel: Conchoide.

Cubisch, was eine Beziehung auf einen Cubus oder eine Cubikwurzel hat.

Cubische Gleichung ist, worin die unbekannte Größe bis auf die dritte Potenz steigt. Ihre Auflösung in dem Artikel: Gleichung. III.

Cubische Hyperbel ist eine Linie vom dritten Grade, deren Gleichung ist $xy^2 = a^3$. Sie hat zwey Asymptoten, parallel mit den Richtungen der Coordinaten, wie die gemeine Hyperbel, wenn diese durch die Gleichung $xy = a^2$ dargestellt wird; aber beide Theile der cubischen Hyperbel liegen in den Nebenwinkeln der Asymptoten, nicht in den Scheitelwinkeln. Die Ordinaten y nähern sich der Asymptote auf der Abscissenlinie unendlich weniger als die Ordinaten an der gemeinen Hyperbel, da an jener ist $y = \frac{a^3}{xy}$, an dieser $y = \frac{a^2}{x}$. Nimmt man x für die Ordinate, so nähert sich diese der mit den y parallelen Asymptote unendlich mehr als die Ordinaten an der gemeinen Hyperbel sich der Asymptote auf der Abscissenlinie nähern. Die krumme Linie ist die 65ste Species bey Newton. Man gebraucht sie, um einen geringern oder größern Grad der Annäherung einer krummen Linie an ihre Asymptote, als die gemeine Hyperbel giebt, durch sie darzustellen, indem man sie selbst als Asymptote jener, welche ihr aber sehr nahe kommt, betrachtet.

Cubische Parabel ist eine Linie vom dritten Grade. Es sind zwey Arten derselben. Die Gleichung

r die erſte iſt $aax = y^3$, für die zweyte $axx = y^3$. n jenen ſind für entgegengeſetzte gleiche Abſciſſen x die rdinaten y gleich und entgegengeſetzt; an dieſer ſind ſie eich und gleichnamig. Jene liegt theils über, theils ter der Abſciſſenlinie; dieſe mit beiden Schenkeln auf rſelben Seite der Abſciſſenlinie. Für die Apolloniſche arabel iſt $ax = y^2$. Da an der erſtern Gattung der

biſchen iſt $\frac{a}{y} \cdot ax = y^2$, ſo ſind ihre unendliche Ordi-

aten gegen die an der gemeinen Parabel unendlich klein.

a an der zweiten cubiſchen Parabel iſt $\frac{x}{y} \cdot ax = y^2$,

nd ein unendliches x gegen y unendlich groß iſt, ſo ſind ie unendlichen Ordinaten gegen die an der gemeinen Pa- bel unendlich groß. Man kann dadurch in manchen ällen die Beſchaffenheit der Schenkel einer krummen nie für unendliche Coordinaten ausdrucken, wo es durch e gemeine Parabel nicht geſchehen kann. Wallis nennt e cubiſche Parabel der erſten Gattung Paraboloeides ubicalis, die von der zweyten, Paraboloeides semicu- icalis. (Opp. Vol. 1. p. 350; 551.) Dieſe eite heißt auch die Neiliſche Parabel. Sie iſt die ſte krumme Linie, deren Rectification gefunden iſt. Die erſtere hat Wallis ganz falſch vorgeſtellt, da er ihre iden Schenkel an entgegengeſetzten Seiten der Abſciſ- n nach derſelben Gegend hin ſich erſtrecken läßt. Von r zweiten hat er nur einen Schenkel gezeichnet.

Newton nennt die krumme Linie, deren Gleichung , $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$, eine cubiſche Para- l. Sie begreift die obige erſtere in ſich, wenn x und vertauſcht werden. Newt. enum. lin. tert. ord. XVIII.

Cubiſche Elliptois nennen einige die krumme nie, deren Gleichung iſt $ay^3 = bx^2(a - x)$. Dieſe er weicht ganz von der Form einer Ellipſe ab, da ſie ei unendliche Schenkel hat. Wolfii elementa Ana- s. Finit. §. 522.

Cubo-Cubus ist der Cubus eines Cubus, die sechste Potenz einer Zahl.

Cubus, Würfel, ist erstlich ein Körper, der schen sechs gleichen Quadraten als Seitenflächen schlossen ist, die gewöhnliche Einheit zur Verglei und Messung der Körper. Zweitens ist es ein duct aus drei gleichen Factoren. Ein solcher F sey = a, so ist der Cubus = aaa, oder a^3. der geometrische Cubus einen kleinern so oft en als die Cubikzahl des Quotienten der Seiten die heit, so ist daher das Product dreyer Factoren ein bus, ein Würfel, eine Würfelzahl genannt. Im A schen möchte man Cubus für das arithmetische duct behalten, und den geometrischen Körper W nennen; da man Cubiren, Cubikwurzel, Cubikt im arithmetischen Verstande nimmt. Nur ist es wöhnlich im Plural die Cuben zu sagen, und late zu flectiren ist unbequem.

Die Wurzel sey zweytheilig, = a + b, s $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$. Hierau ruht die Syntheſis oder Zusammensetzung des C einer Zahl aus ihren dekadischen Theilen. Soll der Cubus von 47862 gemacht werden, so nimmt zuerst den Cubus von 47, wo a = 40 und b = 7 Dann setzt man den Cubus von 470 + 8 aus s Theilen zusammen (a = 470; b = 8); dann den bus von 4780 + 6, ferner den Cubus von 4786 u. s. w. wenn noch mehr Ziffern vorhanden sind. desmahl werden zu dem gefundenen Cubus die Prod $3a^2b$; $3ab^2$; b^3 gesetzt, von welchen die niedr Ziffer eine Stelle niedriger steht, als die nied ste der vorhergehenden, und so auch $3a^2b$ Absicht auf a^3, wenn nämlich die Zahl a als schl Einer, nicht als Zehner betrachtet wird. In eben Ordnung, wie die Theile des Cubus zusammengesetzt s werden sie bey der Ausziehung der Wurzel wieder ab zogen.

Die Wurzel habe die Form, $a + bz + cz^2 + dz^3 + ez^4 + fz^5 + gz^6 + \text{etc.}$ so ist der ...us =

$a^5 + 3a^2bz + (3a^2c + 3ab^2)z^2$

$(3a^2d + 6abc + b^3)z^3$

$(3a^2e + 6abd + 3ac^2 + 3b^2c)z^4$

$(3a^2f + 6abe + 6acd + 3bd + 3bc^2)z^5$

$(3a^2g + 6abf + 6ace + 3ad^2 + 3b^2e + 6bcd + c^3)z^6$

etc.

...e Combinationen in den Coefficienten von z stehen in ...aten bis 4ten Spalte der Tafel, S. 461. Wenn ... ist, und b, c, d, etc. ganze Zahlen unter ... sind, so ist $a + bz + cz^2 +$ etc. eine ganze ...l mit einem anhangenden Decimalbruche. S. Polyno... ...cher Lehrsatz. und combinatorische Analysis, 35.

Dieser Formel kann man sich bequem bedienen, ...Cubikwurzel aus einer Zahl auszuziehen. Die Zahl N; die der Cubikwurzel nächste, kleinere, ganze ...l sey a. Ist diese bekannt, so sind die Coefficienten ... alle gegeben, daher die Coefficienten b, c, d etc. ...der Wurzel nach einander gefunden werden. Der ...us werde der Kürze wegen durch $a^3 + Az + Bz^2 + Cz^3 + Dz^4 + Ez^5 + Fz^6 +$ etc. be...net.

Exempel. Die Cubikwurzel aus 128 zu ziehen. ...nächst kleinere Cubus ist $125 = 5^3$, also $a = 5$, ... $= 30$; B, C, etc. $= 0$. oder $A = 0$; $B = 300$; ... $= 0$; etc. Da $3a^2b$ oder $75b = 30$ ist, so neh... man $A = 0$, und $b = 0$. Nun ist $3a^2c = 300$, ... $c = +4$. Ferner ist C oder $3a^2d = 0$, also, ... $= 0$. Weiter ist D oder $3a^2e + 3ac^2 = 0$; ... e negativ, weil c zu groß genommen ist. Man ...n die negativen Coefficienten sehr leicht in positive ...andeln. Da $75e = -15 \cdot 16 = -240$, so ...n man e entweder -3 oder -4 nehmen. Das

Galilei ist als der erste anzusehen, der die Cykloide geometrisch betrachtet hat. In einem Briefe an Torricelli vom J. 1639 sagt er, daß er diese Linie seit 40 Jahren in Untersuchung gezogen, und sie, wegen ihrer gefälligen Gestalt, zu Gewölbbogen unter Brücken für schicklich erachtet habe; er habe versucht, ihren Inhalt zu bestimmen, sey aber nicht damit zu Stande gekommen. Ein französischer Geometer, Roberval, hat im Jahre 1634, nach dem Zeugnisse des Mersenne, den Inhalt der Cykloide mit dem Inhalt des erzeugenden Kreises verglichen, und gefunden, daß jener das dreyfache des letztern ist. Er war zu dieser Untersuchung durch Mersenne veranlaßt, der bey der Betrachtung eines rollenden Rades auf die Entstehung der Cykloide gekommen war, aber jene Aufgabe nicht hatte auflösen können. Roberval hatte Anfangs auch nicht damit fertig werden können. Als Mersenne Robervals Entdeckung dem Descartes meldete, legte dieser eine Aufgabe vor, die berührenden an der Cykloide zu ziehen. Diese war für Roberval zu schwer, aber Fermat löfete sie sehr allgemein auf. Galilei erfuhr um das Jahr 1639 durch Mersenne, daß man sich in Frankreich mit der Cykloide beschäftige, und forderte den Cavaleri auf, den Inhalt der Cykloide zu finden, dem es aber nicht glückte. Nach dem Tode des Galilei (1642) nahmen seine beiden Schüler und Gesellschafter in seinen letzten Jahren die Untersuchung vor. Torricelli fand den Inhalt, Viviani die berührenden. In den geometrischen Werken des erstern (Florentiae 1644) ist ein kleiner Anhang über die Cykloide enthalten, worin drey Beweise des Satzes von dem Inhalt der Cykloide vorgetragen werden. Es wird darin auch der andern Gattungen von Cykloiden erwähnt, die ein Punct innerhalb oder außerhalb des sich wälzenden Kreises beschreibt; auch werden Sätze ihren Inhalt und ihre berührenden betreffend mitgetheilt. In Frankreich wollte man Torricelli nicht zugestehen, daß er diese Sätze selbst erfunden hätte. Roberval zeigte sich hierbei sehr leiden-

schaftlich, und Pascal in seiner Histoire de la Roulette zu partheyisch für seinen Landsmann.

Roberval fand nachher den Inhalt der Körper, welche die Cykloide durch die Umdrehung um ihre Grundlinie und um ihre Axe beschreibt. Den erstern fand Torricelli auch, den zweyten aber nicht völlig genau.

Im J. 1658 ließ Pascal unter dem Namen, Dettonville, ein Ausforderungs-Schreiben an die Geometer ergehen, worin er ihnen Aufgaben über die Cykloide vorlegte, und dabey zwey Preise aussetzte, einen von 40 Pistolen für denjenigen, der die Auflösungen zuerst einsenden, und 20 Pistolen für denjenigen, der zunächst nach jenem sie einschicken würde. Die Aufgaben waren: zu finden den Inhalt des Abschnittes zwischen dem Scheitel und einer Parallelen mit der Grundlinie; den Schwerpunct dieses Abschnittes; den Inhalt der Körper, die durch die Umdrehung des Abschnitts um die Grundlinie desselben (die Parallele mit der Grundlinie), und um das Segment der Axe von dem Scheitel bis zu dieser Grundlinie entstehen; auch ihre Schwerpuncte; endlich die Schwerpuncte der Theile, worin jene beiden Körper durch eine auf die Drehungsaxe senkrechte Ebene zerschnitten werden. Es liefen nur zwey Preisschriften ein; von dem Jesuiten Lalouere (Lalovera), und dem berühmten Wallis. Die von dem erstern ward für ganz unbefriedigend erklärt; die von Wallis erhielt den Preis auch nicht, weil einige Auflösungen fehlerhaft waren. Die Abhandlung von Wallis über die Cykloide ist in den ersten Theil seiner Werke eingerückt. Wie sie von der Preisschrift verschieden sey, finde ich nicht angezeigt.

Bey dieser Gelegenheit erhielt Pascal noch von einigen vorzüglichen Geometern ihre Entdeckungen über die Cykloide mitgetheilt. Der Ritter Wren in England hatte gefunden, daß die Länge des cykloidalischen Bogens EM von dem Scheitel E an genommen doppelt so groß ist, als die Chorde ER des Bogens ER in dem erzeugenden Kreise ERDE, der von der mit AB parallelen

Cykloide zwischen dem Sc
Scheitel um den vierten Th
fernten Parallele mit der C
radlinichten Flächenraum si
Bemerkung hat, wie Wal
gemacht.

Pascal gab nun selbs
ihm vorgelegten Aufgaben
Lettres de A. Dettonville
zugleich mehrere seine geom
kommen.

Huygens entdeckte
Eigenschaften der Cykloide
die Abwickelung dieser Lini
und daß ein schwerer Pun
ten Cykloide, mit senkrech
terwärts, herabfällt, ein
ersten Puncte, dem Sc
mag von welchem Punct
gen. Wegen dieser Eige
Zunahmen, tautochrona,
ter fand Joh. Bernc
welcher ein schwerer Punct
zu einem andern gegebenen

Kloide für Parallelstrahlen mit der Axe, eine Cykloide mit einem erzeugenden Kreise von einem halb so großen Durchmesser als jene ist, (siehe Catacaustica, 12.)

Ein Kreis wälze sich, wie vorher festgesetzt ist, auf einer geraden Linie fort, so daß der zurückgelegte Weg dem Bogen zu dem Drehungswinkel gleich sey, aber der Punct in seiner Ebene, der eine krumme Linie beschreibt, sey innerhalb oder außerhalb des Umfanges, so ist die krumme Linie eine verwandte Gattung von der eigentlichen Cykloide. Liegt der beschreibende Punct innerhalb des ersten Kreises, so ist sie, wie in Fig. 97. eine gedehnte oder gestreifte Cykloide (cycloides prolata, inflexa). Es ist DEF der Kreis, dessen Umfang der Grundlinie AB gleich ist, und e ein Punct innerhalb des Kreises. Dieser beschreibt bey einer Umdrehung des mit Ce beschriebenen Kreises die Linie aeb, und bey fortgesetzter Wälzung des Kreises DEF auf der verlängerten AB, nach einer wie der andern Gegend, gleiche und ähnliche Portionen einer ins Unendliche sich erstreckenden Linie.

Ist der beschreibende Punct e ausserhalb des sich wälzenden Kreises, DEF, wie in Fig. 98. so beschreibt er eine verkürzte oder verschlungene Cykloide (cycloides curtata, nodata). Auch diese besteht aus unendlich vielen gleichen Theilen, wie aeb, die einen Doppelpunct G haben. In der Figur hat die Hälfte eb nicht ganz Platz gefunden.

Descartes hat schon diese verwandten Gattungen untersucht, und gewiesen, wie die berührenden an ihnen gezogen werden, wie der Wendungspunct an der gedehnten Cykloide, und an der verkürzten der Punct, wo sich die Linie einwärts zu krümmen anfängt, gefunden wird, Epistol. T. III. ep. 57.

Die Cykloide, die hier zuerst beschrieben ist, deren Grundlinie dem Umfange des erzeugenden Kreises gleich ist, heißt im Gegensatze gegen ihre Verwandten Cycloides primaria; sonst schlechtweg Cykloide. Sie besteht

ebenfalls aus unendlich vielen, sich an einander schließenden gleichen Portionen.

Die Cykloiden sind transscendente Linien, da zu einer Abscisse, die auf der Axe E D genommen wird, unendlich viele Ordinaten, parallel mit der Grundlinie, gehören. Die Gleichung für die Coordinaten ist also keine algebraische, die auf irgend einen bestimmten Grad stiege.

In der gedehnten und verkürzten Cykloide wälzt sich der erzeugende Kreis bey jeder ganzen Umdrehung über einer Linie a b, die in jener größer ist, als sein Umfang, in dieser kleiner, obgleich alle Puncte des Kreises sich nach einander auf a b legen. Beide concentrische Kreise D E F und d e f bringen alle Puncte ihres Umfanges nach einander in dieselbe gerade Linie. Hieraus folgt aber nicht, daß der größere Kreis dem kleinern gleich sey, weil die Linien nicht aus Puncten zusammengesetzt werden müssen. Das Wälzen allein giebt keinen Grund der Gleichheit. Darum ward es bey der eigentlichen Cykloide vorausgesetzt, daß die Grundlinie dem Umfange des erzeugenden Kreises gleich seyn sollte. Der Mittelpunct des wälzenden Kreises kann außer der Bewegung, die von dem Wälzen entsteht, noch eine Bewegung vor- oder rückwärts haben. In dem ersten Falle wird eine gedehnte, in dem andern eine verkürzte Cykloide von einem Puncte seines Umfanges beschrieben. Man setze, daß in Fig. 95. anstatt den Bogen N M der Linie A N gleich zu machen, der Bogen kleiner genommen würde, nur nach einem gegebenen Verhältnisse, so wird von dem Puncte M des wälzenden Kreises eine gedehnte Cykloide beschrieben. Würde aber N M größer als A N, wieder nach einem bestimmten Verhältnisse genommen, so entsteht eine verkürzte Cykloide. Die Schwierigkeit, welche man sich hier machen kann, hat schon Aristoteles in seiner 24sten mechanischen Frage bemerkt, und mehrere Mathematiker haben sie nach ihm zu heben gesucht. Wie Galilei sie gelöset hat, findet man in Kästners Analysis endlicher Größe. §. 601.

Die Cykloide, welche man den Liebling der Mathe-

matiker in 17ten Jahrhundert nennen mag, verdient, daß ihre Eigenschaften hier durch die neuere Infinitesimal-Rechnung entwickelt werden. Sie hat freylich viel an Interesse dadurch verloren, daß diese ihre Untersuchung so leicht macht.

I. In der eigentlichen Cykloide (Fig. 96) sey der Halbmesser des erzeugenden Kreises $CD = a$; die halbe Grundlinie $AD = \pi a$, wenn π den halben Kreisumfang für den Halbmesser als Einheit bezeichnet. Für einen Punct M der krummen Linie seyn die normalen Coordinaten, $AP = x$; $PM = y$. Der Mittelpunct des Kreises, auf welchem der Punct M zugleich ist, sey in G, und N der Berührungspunct auf AB, so ist der Bogen $MN = AN$, nach der Voraussetzung von der Entstehung der Cykloide. Der Winkel MGN sey φ, oder zwey Rechte verhalten sich zu MGN wie $\pi : \varphi$. Also $AN = a\varphi$. Man ziehe MF senkrecht auf GN, so ist $MF = PN = a \sin \varphi$, und $MP = FN = a - a \cos \varphi$. Folglich ist

$$x = a(\varphi - \sin \varphi),$$

$$y = a(1 - \cos \varphi).$$

Aus diesen Gleichungen φ wegzuschaffen, müßten $\sin \varphi$ und $\cos \varphi$ durch φ ausgedruckt werden, worauf man φ herauszuschaffen hätte. Eine endliche Gleichung würde man aber doch nicht erhalten. Allein diese mühselige Rechnung ist nicht nöthig. Es ist hier, wie mehrmahls der Fall, daß die Relation zweyer Größen mittelst einer dritten, wie hier durch φ, deutlicher dargestellt wird, als durch eine Gleichung zwischen ihnen allein.

II. Man ziehe MQ senkrecht auf die Axe ED, und lasse die Coordinaten $EQ = t$; $QM = u$ seyn, so ist

$$t = a(1 + \cos \varphi)$$

$$u = a(\pi - \varphi + \sin \varphi);$$

oder, wenn $\pi - \varphi = \omega$ ist,

$$t = a(1 - \cos \omega)$$

$$u = a(\omega + \sin \omega).$$

$a^2(1 - 2\cos\varphi +$

$a^2(\frac{3}{2} - 2\cos\varphi +$

Daraus durch Integration
$+ \frac{1}{4}\sin 2\varphi)$, wo die Conſt
tial-Formeln, 31, woraus u
ßen, und Goniometrie, 36.).

IV. Die Fläche der Cyſ
mahl ſo groß als der Inhalt
Denn wenn PM in DE
und $\sin\varphi = 0$, $\sin 2\varphi =$
$= \frac{3}{2}\pi a^2$, und die Area A

V. Die Area EQM iſt
$+ \omega(\frac{1}{2} - \cos\omega))$, ode
$a^2(\sin\varphi(1 + \frac{1}{2}\cos\varphi) -$
Sie ſey Z, ſo iſt $dZ = u$
iſt, ſo iſt

$$dZ = a^2(\omega + $$

Es iſt $\int \omega \sin\omega . d\omega =$
ſich durch die Differentiat
$\int \sin\omega .^2 d\omega = \int(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos$
$= \frac{1}{2}\omega - \frac{1}{2}\sin\omega.\cos\omega.$
ne Formel. Der Werth d
Kalotte, wenn man die Are

$a^2 \sin\omega\,(1-\frac{1}{2}\cos\omega) = \frac{3}{4}a^2 \sin\omega$, wo $\omega = 60°$ ist. Die HI schneide den erzeugenden Kreis über ED in h, so ist das geradlinichte Dreyeck D H h $= \frac{3}{4}a^2 \sin\omega$, weil D H $= \frac{3}{2}a$ ist.

VII. Es sey durch den Mittelpunct C (Fig. 95.) die Parallele CL mit der Grundlinie bis an die Cykloide gezogen, und die Chorde EL, das Segment über EL ist $= \frac{1}{2}a^2$.

Denn da hier $t = a$, so ist $\cos\omega = 0$, $\sin\omega = 1$, und $\omega = \frac{1}{2}\pi$; also die Area ECL $= a^2(1+\frac{1}{4}\pi)$. Wegen CL $= a(\frac{1}{2}\pi + 1)$, ist das Dreyeck ECL $= \frac{1}{2}a^2(\frac{1}{2}\pi + 1)$; folglich das Segment $= \frac{1}{2}a^2$.

Leibnitz hat diesen Satz gefunden, Huygens den Satz VI.

VIII. Es werde ES (Fig. 96.) senkrecht auf die Axe ED gezogen, und schneide die verlängerte PM in S, so ist die äußere Area an der Cykloide, ESM $= \frac{1}{2}a^2(\omega - \sin\omega.\cos\omega)$, oder ESM $= \ldots$ $\frac{1}{2}a^2(\pi - \varphi + \sin\varphi.\cos\varphi)$.

Dieses folgt daher, weil das Rechteck EQMS $= a^2(1-\cos\omega)(\omega + \sin\omega) = a^2(\omega - \omega\cos\omega + \sin\omega - \sin\omega.\cos\omega)$ ist. Zieht man davon die Area EQM ab, so erhält man den angegebenen Werth der äußern Area.

Sie ist gleich der Summe des Kreissectors ECR, und des Dreyecks RCQ, oder dem gemischtlinichten Raume RQER.

IX. Die Normale in M (die senkrechte auf die berührende TMt) geht durch den Punct N, wo der erzeugende Kreis die AB berührt, wenn der beschreibende Punct in M ist.

Denn die Subnormale ist $\frac{v\,dy}{dx}$ (berühr. Linie, 42).

Da $dx = a(1-\cos\varphi)\,d\varphi$, und $dy = a\sin\varphi.\,d\varphi$ ist, so ist die Subnormale $= a\sin\varphi$. Es ist aber PN $=$ MF $= a\sin\varphi$, also ist PN die Subnormale, und MN die Normale.

X. Man ziehe durch den Punct D der Axe, und den Punct R, wo die mit AB parallele MQ den Halbkreis ERD schneidet, die Linie RD, so ist diese parallel mit der Normale, also ER parallel mit der berührenden TMt.

XI. Der Halbmesser des Krümmungs-Kreises in M ist $= 4a \sin \frac{1}{2}\varphi$.

Es sey $\frac{dy}{dx} = p$, der Halbmesser der Krümmung $= r$, so ist $r = -(1+p^2)^{\frac{3}{2}} \frac{dx}{dp}$. (Krümmungskreis, 2).

Da $p = \frac{\sin\varphi}{1-\cos\varphi}$, so ist $1+p^2 = \frac{2}{1-\cos\varphi} = \frac{1}{\sin\frac{1}{2}\varphi^2}$, also $(1+p^2)^{\frac{3}{2}} = \frac{1}{\sin\frac{1}{2}\varphi^3}$.

Es ist ferner $\frac{\sin\varphi}{1-\cos\varphi} = \cot\frac{1}{2}\varphi$ (Goniometrie, 38.), also $p = \cot\frac{1}{2}\varphi$, und $dp = -\frac{d\varphi}{2\sin\frac{1}{2}\varphi^2}$, und $\frac{dx}{dp} = -2a(1-\cos\varphi)\sin\frac{1}{2}\varphi^2 = -4a\sin\frac{1}{2}\varphi^4$, also $r = 4a\sin\frac{1}{2}\varphi$,

Es ist $MN = 2a\sin\frac{1}{2}\varphi$, also der Halbmesser der Krümmung $= 2MN$.

XII. In dem Scheitel E ist der Krümmungs-Halbmesser $= 4a = 2ED$. Er ändert sich beym Scheitel viel weniger als der Winkel φ, da die Sinus der Winkel nahe an einem Quadranten sich wenig ändern in Vergleichung mit den Veränderungen der Winkel. Daher weicht der cykloidalische Bogen auf beiden Seiten von E bis zu einer beträchtlichen Entfernung wenig von einem mit dem Halbmesser 4a oder 2DE beschriebenen Kreisbogen ab, dessen man sich also zur Zeichnung des Bogens neben E bedienen kann. Daher ist auch die Schwingungszeit eines Pendels von der Länge 2DE, das einen Kreisbogen von einiger Größe beschreibt, sehr wenig

r Zeit in einer Cykloide verschieden, und daher
ich die starke Annäherung zur Gleichzeitigkeit bey
enen Kreisbogen begreiflich, die auf dem cykloidali-
ogen von jeder Größe vollkommen ist.

A ist der Halbmesser der Krümmung $= 0$. Das
eder Kreisbogen, der durch A aus einem Mittel-
uf AB beschrieben wird, liegt über AB hinaus,
uch dessen Halbmesser genommen wird. Die berüh-
A ist senkrecht auf AB.

I. Der Bogen AM sey $= s$. Es ist $s =$
$- \cos \frac{1}{2} \varphi)$, und das Complement EM
$\cos \frac{1}{2} \varphi$.

n $ds = \sqrt{(dx^2 + dy^2)}$, (Rectification). Da
$(1 - \cos \varphi)\, d\varphi$, und $dy = a \sin \varphi . d\varphi$, so
$= 2a^2 (1 - \cos . \varphi)\, d\varphi^2 = 4a^2\, 2 \sin \frac{1}{2} \varphi . d\varphi^2$,
$= 2a \sin \frac{1}{2} \varphi . d\varphi$, und daher $s = \text{const} -$
$\frac{1}{2} \varphi$. Wenn $\varphi = 0$ ist, so ist auch $\frac{1}{2} \varphi = 0$,
$\frac{1}{2} \varphi = 1$, also $\text{Const} = 4a$, und daher
$(1 - \cos \frac{1}{2} \varphi)$.

halbe Cykloide AME ist $= 4a$, da für diese
wey Rechten ist. Also ist der Bogen EM
$\cos \frac{1}{2} \varphi$.

. In dem Halbkreise DER ist der W. DER
$CR = \frac{1}{2} \varphi$, und $RE = DR \times \cos DER$
$\cos \frac{1}{2} \varphi$. Also ist der cykloidalische Bogen EM
ord. circ. ER.

Die Fläche APM drehe sich um AP, so ist der
es dadurch erzeugten runden Körpers . . .
$\frac{5}{2} \varphi - \frac{11}{3} \sin \varphi + \frac{3}{2} \sin \varphi \cos \varphi - \frac{1}{3} \sin \varphi \cos \varphi^2)$
$a^3 (30 \varphi - 45 \sin \varphi + 9 \sin 2 \varphi - \sin 3 \varphi)$.

Solidum sey $= Z$, so ist $dZ = \pi y^2 dx$,
ung) das ist $dZ = \pi a^3 (1 - \cos \varphi)^3 d\varphi$
$(1 - 3 \cos \varphi + 3 \cos \varphi^2 - \cos \varphi^3)\, d\varphi$.
wie man sich durch die Differentiation, versichern

$\int \cos\varphi . d\varphi = \sin\varphi$

$\int \cos\varphi^2 . d\varphi = \frac{1}{2}\sin\varphi\cos\varphi + \frac{1}{2}\varphi$

$\int \cos\varphi^3 . d\varphi = \frac{1}{3}\sin\varphi\cos\varphi^2 + \frac{2}{3}\sin\varphi .$

Aus dieſen Integralen wird unmittelbar der erſte Werth des Integrals Z erhalten; der zweyte wird aus der Verwandlung von sin φ. cos φ, und sin 2 φ. cos φ (Goniometrie, 27.), hergeleitet.

XVI. Eben dieſes Solidum iſt auch $= \pi(\frac{1}{2}a^3 \text{ Ang. sin vers.} \frac{y}{a} - (\frac{1}{2}a^2 + \frac{1}{6}ay + \frac{1}{3}y^2)\sqrt{(2ay - y^2)})$.

Man muß nämlich in der Differentialformel $dZ = \pi y^3 d\varphi$ das Differential des Winkels durch dy ausdrucken. Da $y = a(1 - \cos\varphi)$, ſo iſt $dy = a\sin\varphi . d\varphi$. Eben daher iſt $a - y = a\cos\varphi$, alſo $a^2 - 2ay + y^2 = a^2\cos\varphi^2$, und $2ay - y^2 = a^2\sin\varphi^2$, oder $\sqrt{(2ay - y^2)} = a\sin\varphi$. Jene Differentialgleichung durch dieſe Gleichung dividirt, giebt $\frac{dy}{\sqrt{(2ay - yy)}} = d\varphi$. Folglich iſt $dZ = \frac{\pi y^3 dy}{\sqrt{(2ay - yy)}}$.

Aus dem Artikel: Integralformel (45 und 34) iſt

$$\int \frac{y^3 dy}{\sqrt{(2ay - y^2)}} = -\frac{1}{3}y^2\sqrt{(2ay - yy)} + \frac{2}{3}a\int \frac{y^2 dy}{\sqrt{(2ay - yy)}}$$

$$\int \frac{y^2 dy}{\sqrt{(2ay - yy)}} = -\frac{1}{2}y\sqrt{(2ay - yy)} + \frac{1}{2}a\int \frac{y dy}{\sqrt{(2ay - yy)}}$$

$$\int \frac{y dy}{\sqrt{(2ay - yy)}} = -\sqrt{(2ay - yy)} + a\int \frac{dy}{\sqrt{(2ay - yy)}}$$

Auch ist

$$\int \frac{dy}{\sqrt{(2ay - yy)}} = \text{Ang. sin vers. } \frac{y}{a}.$$

Daher ist durch successive Substitution,

$$\int \frac{y^2\,dy}{\sqrt{(2ay - y^2)}} = \text{Const} \ldots \ldots \ldots$$
$$-(\tfrac{1}{3}y^2 + \tfrac{5}{6}ay + \tfrac{5}{2}a^2) \times \sqrt{(2ay - yy)}$$
$$+ \tfrac{5}{2}a^3 \text{ Ang. sin vers } \frac{y}{a}.$$

Die Const. ist hier $= 0$. Das Integral mit π multiplicirt giebt den Inhalt eines unbestimmten Abschnittes von dem durch Umdrehung der Cykloide um die Grundlinie erzeugten Körper.

Da $y = a(1 - \cos\varphi)$, und $\sqrt{(2ay - yy)} = a \sin\varphi$ ist, so läßt sich jede der Formeln in XV. und XVI. aus der andern leicht herleiten.

XVII. Der ganze Körper, der durch Umdrehung der Cykloide um ihre Grundlinie entsteht, ist $= 5\pi^2 a^3$. Der Cylinder, dessen Höhe diese Grundlinie, $2\pi a$, und Halbmesser die Axe der Cykloide, $2a$, ist, hat den Inhalt $8\pi^2 a^3$. Jener verhält sich zu diesem wie $5 : 8$.

XVIII. Ein unbestimmter Abschnitt des Körpers, der durch die Umdrehung der Cykloide um ihre Axe entsteht, nämlich der durch die Umdrehung der Area EQM entstandene, ist $= \pi a^3 (\frac{1}{2}\omega^2 (1 - 2\cos\omega) + \frac{1}{2}\omega (4\sin\omega - \sin 2\omega) - \frac{1}{6}\sin\omega . \sin. 2\omega + \frac{4}{3}\cos\omega - \frac{1}{4}\cos. 2\omega - \frac{1}{12})$, wo ω das Complement des von dem Puncte auf dem wälzenden Kreise beschriebenen Winkels φ ist, nämlich $\omega = \pi - \varphi$.

Es ist die Abscisse $EQ = t = a(1 - \cos\omega)$; die Ordinate $QM = u = a(\omega + \sin\omega)$; auch sey der von EQM beschriebene Körper $= Z$, so ist $dZ = \pi u^2 dt$, das ist $dZ = \pi a^3 (\omega^2 + 2\omega\sin\omega + \sin\omega^2)\sin\omega . d\omega$. Nun ist

$\int \omega^2 \sin\omega . d\omega = -\omega^2 \cos\omega + 2\int \omega \cos\omega . d\omega$

$\int \omega \cos\omega^2 d\omega = \omega \sin\omega + \cos\omega$

$2\int \omega \sin\omega^2 d\omega = \int \omega' (1 - \cos 2\omega) d\omega$

$\int \omega \cos 2\omega . d\omega = \frac{1}{2}\omega \sin 2\omega + \frac{1}{4}\cos 2\omega$

$\int \sin\omega^3 . d\omega = -\frac{1}{3}\sin\omega^2 \cos\omega - \frac{2}{3}\sin\omega$,

wie aus der Differentiation dieſer Formeln erhellet. Die dritte enthält bloß eine goniometriſche Subſtitution.

Aus dieſen Integralen ergiebt ſich der angegebene Werth des Abſchnittes des cykloidaliſchen Körpers.

Die Conſtans $-\frac{1}{12}$ iſt zugeſetzt, damit das Integral $Z = 0$ ſey, wenn $\omega = 0$ iſt, wofür $\cos\omega$ und $\cos 2\omega$ jeder $= 1$ ſind.

XIX. Der Inhalt des ganzen, von der Cykloide durch die Drehung um die Axe beſchriebenen Körpers iſt $= \pi a^3 (\frac{3}{4}\pi^2 - \frac{8}{3})$. Der Inhalt des Cylinders über derſelben Grundfläche mit derſelben Höhe iſt $\pi . \pi^2 a^3 . 2a = \pi^2 a^3$. Es verhält ſich jener Körper zu dem Cylinder wie $\frac{3}{4}\pi^2 - \frac{4}{3} : \pi^2$. Dieſes Verhältniß hat ſchon Roberval gefunden. Torricelli gab es nicht ganz richtig an, da er es wie 11 : 18 ſetzte.

XX. Die Oberfläche des cykloidaliſchen Koncids, das durch die Umdrehung des Raumes EQM um EQ entſteht, iſt

$= 4\pi a^2 (2\omega . \sin\frac{1}{2}\omega + 3\cos\frac{1}{2}\omega - \frac{1}{3}\cos\frac{3}{2}\omega - \frac{8}{3})$.

Die Oberfläche eines unbeſtimmten Abſchnitts dieſer Fläche ſey $= s$, und $\frac{du}{dt} = p$, ſo iſt ds . . .

$= 2\pi u\, dt \sqrt{(1 + p^2)}$, (ſ. Complanation). Es iſt $du = a(1 + \cos\omega) da$; $dt = a \sin\omega . d\omega$, alſo

$p = \frac{1 + \cos\omega}{\sin\omega}$, und $1 + p^2 = + \frac{2 + 2\cos\omega}{\sin\omega^2}$

$= \frac{4\cos\frac{1}{2}\omega^2}{\sin\omega^2}$, alſo $\sqrt{(1 + p^2)} = \frac{2\cos\frac{1}{2}\omega}{\sin\omega}$.

Daher ist $dS = 4\pi a^2(\omega + \sin\omega)\cos\frac{1}{2}\omega.d\omega$. Zu der Integration dieser Formel sind folgende Integralformeln erforderlich:

$$\int \omega\cos\tfrac{1}{2}\omega.d\omega = 2\omega\sin\tfrac{1}{2}\omega + 4\cos\tfrac{1}{2}\omega$$

$$\int \sin\omega.\cos\tfrac{1}{2}\omega.d\omega = \tfrac{1}{2}\int \sin\tfrac{1}{2}\omega.d\omega + \tfrac{1}{2}\sin\tfrac{1}{2}\omega.d\omega$$

$$= -\tfrac{1}{3}\cos\tfrac{3}{2}\omega - \cos\tfrac{1}{2}\omega.$$

Daraus ist $S = 4\pi a^2\ 2\omega\sin\frac{1}{2}\omega + 3\cos\frac{1}{2}\omega - \frac{1}{3}\cos\frac{3}{2}\omega + \text{Const.})$. Für $S = 0$ ist $\omega = 0$, $\sin\frac{1}{2}\omega = 0$, $\cos\frac{1}{2}\omega = 1$; $\cos\frac{3}{2}\omega = 1$, also $\text{Const} = -\frac{8}{3}$.

XXI. Die Oberfläche des ganzen cykloidalischen Konoids ist $= 4\pi a^2(2\pi - \frac{8}{3})$.

XXII. Joh. Bernoulli bemerkte, daß unzählig viele Segmente zwischen einem cykloidalischen Bogen und seiner Chorde, und auch unzählig viele Abschnitte zwischen zwey der Grundlinie parallelen Chorden sich finden lassen, die, jene geometrisch, diese algebraisch quadrirbar sind, ohne von der Rectification eines Kreisbogens abzuhangen. Es seyn (Fig. 99. Tab. VII.) EQ, Eq zwey Abscissen auf der Axe vom Scheitel, QM, qm die zugehörigen Ordinaten. Man nehme den Unterschied der zugehörigen Flächenräume EQM, Eqm aus V. und setze den Theil der Formel, welcher die zugehörigen Winkel enthält, $= 0$, so ist der übrige Theil, der Abschnitt QMmq, algebraisch quadrirbar. Die zu den Areis gehörigen Winkel seyn ω und $n\omega$, so muß seyn $\frac{1}{2} - \cos\omega = n(\frac{1}{2} - \cos n\omega)$. Ist n eine ganze Zahl, so wird $\cos\omega$ durch eine algebraische Gleichung gefunden, (Goniometrie, IV.). Ist n eine gebrochene Zahl, so ist die Gleichung für $\cos\omega$ transscendent, (eb. das.). Bernoulli läßt zwar n auch eine gebrochne Zahl bedeuten. Opp. T. III. p. 327.

Man ziehe durch den Scheitel E die berührende PEp, und nehme sie zur Abscissenlinie, worauf die Ordinaten PM, pm senkrecht sind. Wenn Ep mit EP auf derselben Seite liegt, so ziehe man den Werth der kleinern Area Epm von dem der größern EPM ab, nach der Formel VIII. so hat man den Werth des Quadris-

lineum PMmp. Das geradlinichte Trapezium PMmp ist $= \frac{1}{2}(PM + pm)Pp$: zieht man von diesem das Quadrilineum ab, so bleibt das Segment Mm zwischen dem Bogen Mm und dessen Chorde. In dem Werthe desselben setzt man den von den zugehörigen Winkeln abhängigen Theil $= o$, so ist der übrige geometrisch quadrirbar. Wenn ω und ω' die zu den Segmenten gehörigen Winkel an dem erzeugenden Kreise sind, so muß $\cos\omega + \cos\omega' = 1$ seyn, damit der von den Winkeln abhängige Theil verschwinde.

Fällt Ep auf die entgegengesetzte Seite von E in Beziehung auf EP, so nimmt man die Summe der cykloidalischen Flächenräume EPM, Epm, und zieht sie von dem Trapezium PMmp ab, und es bleibt das cykloidalische Segment MEmM übrig. Soll dieses geometrisch quadrirbar seyn, so muß ebenfalls seyn $\cos\omega + \cos\omega' = 1$.

XXIV. Die gedehnte und verkürzte Cykloide lassen sich auf eine ähnliche Art, wie die ursprüngliche behandeln. Man setze die Grundlinie AB nicht $= 2\pi a$, sondern $= 2m\pi a$, so daß sie länger oder kürzer als der Umfang des erzeugenden Kreises sey, nachdem m größer oder kleiner als die Einheit ist. Der Weg AN (Fig. 96.), den der Kreis bey der Wälzung auf der Grundlinie zurückgelegt hat, verhalte sich zu dem Kreisbogen MN zwischen dem beschreibenden Puncte und dem Berührungspuncte auf AB ebenfalls immer wie $m:1$, so beschreibt M eine gedehnte oder verkürzte Cykloide. Es ist nun $AP = x = a(m\varphi - \sin\varphi)$, und $PM = y = a(1 - \cos\varphi)$; auch $EQ = t = a(1 - \cos\omega)$, und $QM = u = a(m\omega + \sin\omega)$.

XXV. Der Halbmesser des erzeugenden Kreises Cd (Fig. 97 u. 98) sey $= a$; der Halbmesser des Kreises DFE, dessen Umfang der Grundlinie ab gleich ist, sey $= b$, die Abscisse aP, die Ordinate PM, so ist die Tangente des Winkels der Normale MN mit der Ordinate PM, $\text{tang } PMN = \frac{a\sin\varphi}{b - a\cos\varphi}$.

Die Tangente des Winkels der Normale mit der Ordinate ist $= \frac{dy}{dx}$, da die Subnormale $PN = \frac{y\,dy}{dx}$ ist, (berührende, 42.). Nun ist $dx = a(m - \cos\varphi)\,d\varphi$; und $dy = a \sin\varphi . d\varphi$, also ist $\frac{dy}{dx} = \frac{\sin\varphi}{m - \cos\varphi}$. Der Umfang des Kreises DFED ist $= 2\pi b$. Da dieser der Grundlinie gleich ist, so ist $2\pi b = 2m\pi a$, und daher $m = \frac{b}{a}$. Setzt man diesen Werth für m, so ist $\frac{dy}{dx} = \frac{a \sin\varphi}{b - a\cos\varphi}$.

XXVI. Hieraus ergiebt sich folgende Construction für die Normale. Man ziehe durch M mit der Grundlinie die parallele MQ bis an de, welche den erzeugenden Kreis in R schneide. Da $MP = a(1 - \cos\varphi)$ ist, so ist $dQ = a(1 - \cos\varphi)$, also $CQ = a\cos\varphi$, und der Winkel $dCR = \varphi$, spitz, wenn dQ kleiner als dC; stumpf, wenn dQ größer als dC ist, als wodurch $\cos\varphi$ negativ ist. Man ziehe durch D, den Berührungspunct des Kreises DFED mit AB, nach R die gerade DR, so ist in dem Dreyecke DCR die tang $CDR = \frac{a \sin\varphi}{b - a\cos\varphi}$ (trigonom. Formeln), also W. $RDC = PMN$, und die Normale MN ist parallel mit DR.

XXVII. In der gedehnten Cykloide (Fig. 97.) schneidet DR den Halbkreis dRe zweymahl, den Berührungsfall ausgenommen; also sind an dem Theile der Cykloide von a bis e je zwey Normalen, folglich auch je zwey berührende, einander parallel. Man ziehe von D aus die berührende DH an den Halbkreis dRe, so ist

nur eine Normale, welche dieſelbe Lage gegen ihre Ordinate, wie D H gegen D E hat. Zieht man durch den Berührungspunct H die parallele H K mit a b oder A B, ſo trifft dieſe die Cykloide in dem Wendungspuncte K. Denn von dem unterſten Puncte a bis K nimmt der Winkel der Normale mit der Abſciſſenlinie, von dem Anfange der Abſciſſen an, genommen, ab, und daher iſt der Bogen a K conver gegen dieſe; jenſeits K nimmt der Winkel der Normale mit der Abſciſſenlinie wieder zu, und der Bogen iſt concav gegen a d. (Concav und Conver. 3.).

XXVIII. Dieſes folgt auch aus der Regel (a. a. O 11.), die wir hier zur Übung in ihrem Gebrauche anwenden wollen. Der Bogen einer Curve iſt conver gegen die Abſciſſenlinie, wo für poſitive Ordinaten, wie hier, der Quotient $\frac{d^2y}{dx^2}$ poſitiv iſt, concav, wo derſelbe negativ iſt. Dabey iſt dx unveränderlich. Da $dx = a(m - \cos\varphi)\,d\varphi$, und $d^2x = o$, ſo iſt $o = (m - \cos\varphi)\,d^2\varphi + \sin\varphi . d\varphi^2$, alſo $d^2\varphi = -\frac{\sin\varphi}{m - \cos\varphi}\,d\varphi^2$.

Aus der Gleichung $dy = a \sin\varphi . d\varphi$ folgt $d^2y = a\cos\varphi . d\varphi^2 + a\sin\varphi . d^2\varphi$, das iſt,

$$d^2y = a\cos\varphi . d\varphi^2 - \frac{a\sin\varphi^2}{m - \cos\varphi}\,d\varphi^2 =$$

$$= \frac{a(m\cos\varphi - 1)}{m - \cos\varphi}\,d\varphi^2 \text{ . . Nunmehr iſt } \frac{d^2y}{dx^2}$$

$$= \frac{m\cos\varphi - 1}{a(m - \cos\varphi)^3}, \text{ oder } = \frac{1 - m\cos\varphi}{a(\cos\varphi - m)^3}.$$

An der gedehnten Cykloide (Fig. 97.) iſt $m > 1$, weil $b > a$ iſt, alſo iſt der Nenner, $m - \cos\varphi$, poſitiv. Der Zähler, $m\cos\varphi - 1$, iſt poſitiv, wenn $\cos\varphi > \frac{1}{m}$, oder wenn $\cos\varphi > \frac{a}{b}$ iſt; er iſt $= o$, wenn $\cos\varphi = \frac{a}{b}$; negativ für $\cos\varphi < \frac{a}{b}$, und für einen

Winkel φ, der größer als ein Rechter ist, unbedingt ne-
gativ. Nun ist für den Punct K, $\cos\varphi = \frac{a}{b}$, weil
für denselben $\cos\varphi = \frac{CH}{CD}$ ist. Für die Puncte
zwischen a und K ist $\cos\varphi > \frac{a}{b}$, und jenseits K ist
$\cos\varphi < \frac{a}{b}$. Also ist die Cykloide von a bis K gegen
die Abscissenlinie convex, und von K bis e concav, so daß
in K der Wendungspunct fällt.

An der verkürzten Cykloide (Fig. 98.) ist m oder
$\frac{b}{a}$ ein eigentlicher Bruch, also wird der Zähler des
Quotienten, nämlich $1 - m\cos\varphi$ nie Null, aber hier
kann der Nenner Null werden, wodurch der Quotient
unendlich groß wird. Dieses geschieht in dem Puncte m
der Ovale, wo sie von der Ordinate pm berührt wird.
In dieser Cykloide sind die Abscissen für den Bogen
mG negativ. Denn es ist $x = m\varphi - \sin\varphi$. Dieser
Werth ist $= o$, sowohl wenn $\varphi = o$, als wenn φ
$= \frac{\sin\varphi}{m}$, welches hier möglich ist, weil m ein eigent-
licher Bruch ist. Der erste Winkel gehört zu dem Puncte
a, der zweyte zu dem Puncte G, dem Durchschnitte mit
der nächst angränzenden Cykloide.

Die größte Abscisse ap zu bestimmen, setze man das
Differential von $m\varphi - \sin\varphi$, oder von $\sin\varphi - m\varphi$ gleich
Null, also $\cos\varphi . d\varphi - m\,d\varphi = o$, so ist $\cos\varphi = m$.
Für den Werth von φ, der hieraus sich ergiebt, ist der
Quotient $\frac{d^2y}{dx^2}$ unendlich groß; für einen kleinern Werth
von φ ist $\cos\varphi > m$, und der Quotient positiv, für ei-

nen kleinern negativ. Alſo iſt dort die krumme Linie gegen die Abſciſſenlinie conver, hier concav, und der Wechſel geſchieht in dem Punkte m, wo die Ordinate eine berührende iſt.

XXIX. Der Halbmeſſer der Krümmung an der gedehnten und an der verkürzten Cykloide iſt

$$= \frac{(aa - 2ab\cos\varphi + bb)^{\frac{3}{2}}}{a(a - b\cos\varphi)}.$$

Es iſt der Halbmeſſer der Krümmung $r = -(1+pp)^{\frac{3}{2}} \cdot \frac{dx}{dp}$, wo $p = \frac{dy}{dx}$ iſt, (Krümmungskreis, 2).

Hier iſt $p = \frac{\sin\varphi}{m - \cos\varphi}$;

$$1 + pp = \frac{mm - 2m\cos\varphi + 1}{(m - \cos\varphi)^2};$$

ferner $dp = \frac{m\cos\varphi - 1}{(m - \cos\varphi)^2} d\varphi$,

und $\frac{dx}{dp} = \frac{a(m - \cos\varphi)^3}{m\cos\varphi - 1}$; folglich

$r = \frac{a(mm - 2m\cos\varphi + 1)^{\frac{3}{2}}}{1 - m\cos\varphi}$. In dieſer Formel ſetze man für m ſeinen Werth, $\frac{b}{a}$, und multiplicire Zähler und Nenner mit a^3 oder $(a^2)^{\frac{3}{2}}$, ſo erhält r den angegebenen Werth. Der Zähler kann überhaupt poſitiv oder negativ genommen werden, weil eine Quadratwurzel beides ſeyn kann. Die Größe $aa - 2ab\cos\varphi + bb$ iſt aber poſitiv, weil ab nothwendig kleiner als $\frac{1}{4}(a+b)^2$, und daher 2ab kleiner als $aa + bb$, und noch mehr $2ab\cos\varphi$ kleiner als dieſe Summe iſt.

XXX. An der gedehnten Cykloide iſt in K, wo $\cos\varphi = \frac{1}{m}$ oder $\frac{a}{b}$ iſt, der Halbmeſſer der Krüm-

mung unendlich groß; in a, wo cos φ = 1, iſt derſelbe = $-\frac{(b-a)^2}{a}$; im Scheitel e, wo cos φ = −1, iſt derſelbe = $+\frac{(a+b)^2}{a}$.

An der verkürzten Cykloide iſt in m, wo cos φ = m = $\frac{b}{a}$ iſt, der Halbmeſſer der Krümmung = $(aa-bb)^{\frac{1}{2}}$, in a iſt derſelbe = $-\frac{(a-b)^2}{a}$; in e iſt er = $+\frac{(a+b)^2}{a}$. Die Vorzeichen ſind ſo genommen, daß ein poſitiver Krümmungshalbmeſſer zu einem concaven Bogen, ein negativer zu einem convexen gehört. In dem Puncte m (Fig. 98.) bleibt das Vorzeichen weg, weil hier der Übergang von dem Convexen zum Concaven geſchieht.

XXXI. Die Cykloide hat die Erfindung einer andern krummen Linie veranlaßt, welche zuerſt die kleine Cykloide hieß, hernach aber den Namen, Gefährtinn der Cykloide (Cycloidis socia) erhalten hat. Ehedem hat man ſich viel mit ihr beſchäftigt. Ihre Conſtruction iſt folgende. Mit dem Halbmeſſer AC (Fig. 100.) ſey ein Kreis ANBA beſchrieben. Auf dem Durchmeſſer AB errichte man in irgend einem Puncte P die ſenkrechte PM, welche den Halbkreis ANB in N ſchneide. Dem Bogen AN ſetze man die Ordinate PM gleich, ſo iſt M ein Punct dieſer krummen Linie. Ihr Unterſchied von der Cykloide beſteht darin, daß hier die Ordinate PM dem Kreisbogen AN gleich iſt, dagegen an der Cykloide EAM (Fig. 96.) die Ordinate QM = dem Kreisbogen DR + Ordinate am Kreiſe QR iſt. Die Ordinate BD im dem Endpuncte B des Durchmeſſers iſt gleich der Länge des Halbkreiſes, wie an der Cykloide. Die Gefährtinn beſteht wie jene aus unendlich

$\int \cos\varphi . d\varphi = \sin\varphi$

$\int \cos\varphi^2 . d\varphi = \frac{1}{2}\sin\varphi\cos\varphi + \frac{1}{2}\varphi$

$\int \cos\varphi^3 . d\varphi = \frac{1}{3}\sin\varphi\cos\varphi^2 + \frac{2}{3}\sin\varphi.$

Aus dieſen Integralen wird unmittelbar der erſte Werth des Integrals Z erhalten; der zweyte wird aus der Verwandlung von sin φ. cos φ, und sin 2 φ. cos φ (Goniometrie, 27.), hergeleitet.

XVI. Eben dieſes Solidum iſt auch $= \pi(\frac{1}{2}a^3 \text{ Ang. sin vers.} \frac{y}{a} - (\frac{1}{2}a^2 + \frac{1}{3}ay + \frac{1}{3}y^2)\sqrt{(2ay - y^2)})$.

Man muß nämlich in der Differentialformel $dZ = \pi y^3 d\varphi$ das Differential des Winkels durch dy ausdrucken. Da $y = a(1 - \cos\varphi)$, ſo iſt $dy = a\sin\varphi . d\varphi$. Eben daher iſt $a - y = a\cos\varphi$, alſo $a^2 - 2ay + y^2 = a^2\cos\varphi^2$, und $2ay - y^2 = a^2\sin\varphi^2$, oder $\sqrt{(2ay - y^2)} = a\sin\varphi$. Jene Differentialgleichung durch dieſe Gleichung dividirt, giebt $\frac{dy}{\sqrt{(2ay - yy)}} = d\varphi$. Folglich iſt $dZ = \frac{\pi y^3 dy}{\sqrt{(2ay - yy)}}$.

Aus dem Artikel: Integralformel (45 und 34) iſt

$$\int \frac{y^3 dy}{\sqrt{(2ay - y^2)}} = -\frac{1}{3}y^2\sqrt{(2ay - yy)} + \frac{5}{3}a\int \frac{y^2 dy}{\sqrt{(2ay - yy)}}$$

$$\int \frac{y^2 dy}{\sqrt{(2ay - yy)}} = -\frac{1}{2}y\sqrt{(2ay - yy)} + \frac{3}{2}a\int \frac{y dy}{\sqrt{(2ay - yy)}}$$

$$\int \frac{y dy}{\sqrt{(2ay - yy)}} = -\sqrt{(2ay - yy)} + a\int \frac{dy}{\sqrt{(2ay - yy)}}$$

ür die erste ist $aax = y^3$, für die zweyte $axx = y^3$. In jenen sind für entgegengesetzte gleiche Abscissen x die Ordinaten y gleich und entgegengesetzt; an dieser sind sie leich und gleichnamig. Jene liegt theils über, theils nter der Abscissenlinie; diese mit beiden Schenkeln auf erselben Seite der Abscissenlinie. Für die Apollonische Parabel ist $ax = y^2$. Da an der erstern Gattung der ubischen ist $\frac{a}{y} \cdot ax = y^2$, so sind ihre unendliche Ordiaten gegen die an der gemeinen Parabel unendlich klein. Da an der zweiten cubischen Parabel ist $\frac{x}{y} \cdot ax = y^2$, nd ein unendliches x gegen y unendlich groß ist, so sind ie unendlichen Ordinaten gegen die an der gemeinen Paabel unendlich groß. Man kann dadurch in manchen ällen die Beschaffenheit der Schenkel einer krummen inie für unendliche Coordinaten ausdrucken, wo es durch ie gemeine Parabel nicht geschehen kann. Wallis nennt ie cubische Parabel der ersten Gattung Paraboloeides ubicalis, die von der zweyten, Paraboloeides semicuicalis. (Opp. Vol. I. p. 350; 551.) Diese weite heißt auch die Neilische Parabel. Sie ist die rste krumme Linie, deren Rectification gefunden ist. Die erstere hat Wallis ganz falsch vorgestellt, da er ihre eiden Schenkel an entgegengesetzten Seiten der Abscisen nach derselben Gegend hin sich erstrecken läßt. Von er zweiten hat er nur einen Schenkel gezeichnet.

Newton nennt die krumme Linie, deren Gleichung t, $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$, eine cubische Parael. Sie begreift die obige erstere in sich, wenn x und vertauscht werden. Newt. enum. lin. tert. ord. XVIII.

Cubische Elliptois nennen einige die krumme inie, deren Gleichung ist $ay^3 = bx^2(a - x)$. Diese ber weicht ganz von der Form einer Ellipse ab, da sie wei unendliche Schenkel hat. Wolfii elementa Anars. Finit. §. 522.

$\int \omega^2 \sin\omega . d\omega = -\omega^2 \cos\omega + 2\int \omega \cos\omega . d\omega$

$\int \omega \cos\omega^2 d\omega = \omega \sin\omega + \cos\omega$

$2\int \omega \sin\omega^2 d\omega = \int \omega (1 - \cos 2\omega) d\omega$

$\int \omega \cos 2\omega . d\omega = \frac{1}{2}\omega \sin 2\omega + \frac{1}{4}\cos 2\omega$

$\int \sin\omega^3 . d\omega = -\frac{1}{3}\sin\omega^2 \cos\omega - \frac{2}{3}s\omega$,

wie aus der Differentiation dieser Formeln erhellet. Die dritte enthält bloß eine goniometrische Substitution.

Aus diesen Integralen ergiebt sich der angegebene Werth des Abschnittes des cykloidalischen Körpers.

Die Constans $-\frac{1}{12}$ ist zugesetzt, damit das Integral $Z = 0$ sey, wenn $\omega = 0$ ist, wofür $\cos\omega$ und $\cos 2\omega$ jeder $= 1$ sind.

XIX. Der Inhalt des ganzen, von der Cykloide durch die Drehung um die Axe beschriebenen Körpers ist $= \pi a^3 (\frac{3}{4}\pi^2 - \frac{8}{3})$. Der Inhalt des Cylinders über derselben Grundfläche mit derselben Höhe ist $\pi . \pi^2 a^2 . 2a = \pi^3 a^3$. Es verhält sich jener Körper zu dem Cylinder wie $\frac{3}{4}\pi^2 - \frac{4}{3} : \pi^2$. Dieses Verhältniß hat schon Roberval gefunden. Torricelli gab es nicht ganz richtig an, da er es wie 11 : 18 setzte.

XX. Die Oberfläche des cykloidalischen Konoids, das durch die Umdrehung des Raumes EQM um EQ entsteht, ist

$= 4\pi a^2 (2\omega . \sin\frac{1}{2}\omega + 3\cos\frac{1}{2}\omega - \frac{1}{3}\cos\frac{3}{2}\omega - \frac{8}{3})$.

Die Oberfläche eines unbestimmten Abschnitts dieser Fläche sey $= s$, und $\frac{du}{dt} = p$, so ist $ds = 2\pi u dt \sqrt{(1 + p^2)}$, (s. Complanation). Es ist $du = a(1 + \cos\omega) da$; $dt = a \sin\omega . d\omega$, also

$$p = \frac{1 + \cos\omega}{\sin\omega}, \text{ und } 1 + p^2 = + \frac{2 + 2\cos\omega}{\sin\omega^2}$$

$$= \frac{4\cos\frac{1}{2}\omega^2}{\sin\omega^2}, \text{ also } \sqrt{(1 + p^2)} = \frac{2\cos\frac{1}{2}\omega}{\sin\omega}.$$

Daher ist $dS = 4\pi a^2(\omega + \sin\omega)\cos\frac{1}{2}\omega.d\omega$. Zu der Integration dieser Formel sind folgende Integralformeln erforderlich:

$$\int \omega\cos\tfrac{1}{2}\omega.d\omega = 2\omega\sin\tfrac{1}{2}\omega + 4\cos\tfrac{1}{2}\omega$$

$$\int \sin\omega.\cos\tfrac{1}{2}\omega.d\omega = \tfrac{1}{2}\int \sin\tfrac{3}{2}\omega.d\omega + \tfrac{1}{2}\sin\tfrac{1}{2}\omega.d\omega$$

$$= -\tfrac{1}{3}\cos\tfrac{3}{2}\omega - \cos\tfrac{1}{2}\omega.$$

Daraus ist $S = 4\pi a^2\ 2\omega\sin\frac{1}{2}\omega + 3\cos\frac{1}{2}\omega - \frac{1}{3}\cos\frac{3}{2}\omega + \text{Const.})$. Für $S = 0$ ist $\omega = 0$, $\sin\frac{1}{2}\omega = 0$, $\cos\frac{1}{2}\omega = 1$; $\cos\frac{3}{2}\omega = 1$, also $\text{Const} = -\frac{8}{3}$.

XXI. Die Oberfläche des ganzen cykloidalischen Konoids ist $= 4\pi a^2(2\pi - \frac{8}{3})$.

XXII. Joh. Bernoulli bemerkte, daß unzählig viele Segmente zwischen einem cykloidalischen Bogen und seiner Chorde, und auch unzählig viele Abschnitte zwischen zwey der Grundlinie parallelen Chorden sich finden lassen, die, jene geometrisch, diese algebraisch quadrirbar sind, ohne von der Rectification eines Kreisbogens abzuhangen. Es seyn (Fig. 99. Tab. VII.) EQ, Eq zwey Abscissen auf der Axe vom Scheitel, QM, qm die zugehörigen Ordinaten. Man nehme den Unterschied der zugehörigen Flächenräume EQM, Eqm aus V. und setze den Theil der Formel, welcher die zugehörigen Winkel enthält, $= 0$, so ist der übrige Theil, der Abschnitt QMmq, algebraisch quadrirbar. Die zu den Areis gehörigen Winkel seyn ω und $n\omega$, so muß seyn $\frac{1}{2} - \cos\omega = n(\frac{1}{2} - \cos n\omega)$. Ist n eine ganze Zahl, so wird $\cos\omega$ durch eine algebraische Gleichung gefunden, (Goniometrie, IV.). Ist n eine gebrochene Zahl, so ist die Gleichung für $\cos\omega$ transscendent, (eb. das.). Bernoulli läßt zwar n auch eine gebrochne Zahl bedeuten. Opp. T. III. p. 327,

Man ziehe durch den Scheitel E die berührende PEp, und nehme sie zur Abscissenlinie, worauf die Ordinaten PM, pm senkrecht sind. Wenn Ep mit EP auf derselben Seite liegt, so ziehe man den Werth der kleinern Area Epm von dem der größern EPM ab, nach der Formel VIII. so hat man den Werth des Quadri-

lineum PMmp. Das geradlinichte Trapezium PMmp ist $= \frac{1}{2}(PM + pm)Pp$: zieht man von diesem das Quadrilineum ab, so bleibt das Segment Mm zwischen dem Bogen Mm und dessen Chorde. In dem Werthe desselben setzt man den von den zugehörigen Winkeln abhängigen Theil $= o$, so ist der übrige geometrisch quadrirbar. Wenn ω und ω' die zu den Segmenten gehörigen Winkel an dem erzeugenden Kreise sind, so muß $\cos\omega + \cos\omega' = 1$ seyn, damit der von den Winkeln abhängige Theil verschwinde.

Fällt Ep auf die entgegengesetzte Seite von E in Beziehung auf EP, so nimmt man die Summe der cykloidalischen Flächenräume EPM, Epm, und zieht sie von dem Trapezium PMmp ab, und es bleibt das cykloidalische Segment MEmM übrig. Soll dieses geometrisch quadrirbar seyn, so muß ebenfalls seyn $\cos\omega + \cos\omega' = 1$.

XXIV. Die gedehnte und verkürzte Cykloide lassen sich auf eine ähnliche Art, wie die ursprüngliche behandeln. Man setze die Grundlinie AB nicht $= 2\pi a$, sondern $= 2m\pi a$, so daß sie länger oder kürzer als der Umfang des erzeugenden Kreises sey, nachdem m größer oder kleiner als die Einheit ist. Der Weg AN (Fig. 96.), den der Kreis bey der Wälzung auf der Grundlinie zurückgelegt hat, verhalte sich zu dem Kreisbogen MN zwischen dem beschreibenden Puncte und dem Berührungspuncte auf AB ebenfalls immer wie $m:1$, so beschreibt M eine gedehnte oder verkürzte Cykloide. Es ist nun $AP = x = a(m\varphi - \sin\varphi)$, und $PM = y = a(1 - \cos\varphi)$; auch $EQ = t = a(1 - \cos\omega)$, und $QM = u = a(m\omega + \sin\omega)$.

XXV. Der Halbmesser des erzeugenden Kreises Cd (Fig. 97 u. 98) sey $= a$; der Halbmesser des Kreises DFE, dessen Umfang der Grundlinie ab gleich ist, sey $= b$, die Abscisse aP, die Ordinate PM, so ist die Tangente des Winkels der Normale MN mit der Ordinate PM, $\text{tang } PMN = \frac{a\sin\varphi}{b - a\cos\varphi}$.

Die Tangente des Winkels der Normale mit der Ordinate ist $= \frac{dy}{dx}$, da die Subnormale $PN = \frac{y\,dy}{dx}$ ist, (berührende, 42.). Nun ist $dx = a(m - \cos\varphi)\,d\varphi$; und $dy = a \sin\varphi . d\varphi$, also ist $\frac{dy}{dx} = \frac{\sin\varphi}{m - \cos\varphi}$. Der Umfang des Kreises DFED ist $= 2\pi b$. Da dieser der Grundlinie gleich ist, so ist $2\pi b = 2m\pi a$, und daher $m = \frac{b}{a}$. Setzt man diesen Werth für m, so ist $\frac{dy}{dx} = \frac{a \sin\varphi}{b - a\cos\varphi}$.

XXVI. Hieraus ergiebt sich folgende Construction für die Normale. Man ziehe durch M mit der Grundlinie die parallele MQ bis an de, welche den erzeugenden Kreis in R schneide. Da $MP = a(1 - \cos\varphi)$ ist, so ist $dQ = a(1 - \cos\varphi)$, also $CQ = a\cos\varphi$, und der Winkel $dCR = \varphi$, spitz, wenn dQ kleiner als dC; stumpf, wenn dQ größer als dC ist, als wodurch $\cos\varphi$ negativ ist. Man ziehe durch D, den Berührungspunct des Kreises DFED mit AB, nach R die gerade DR, so ist in dem Dreyecke DCR die tang $CDR = \frac{a \sin\varphi}{b - a\cos\varphi}$ (trigonom. Formeln); also W. $RDC = PMN$, und die Normale MN ist parallel mit DR.

XXVII. In der gedehnten Cykloide (Fig. 97.) schneidet DR den Halbkreis dRe zweymahl, den Berührungsfall ausgenommen; also sind an dem Theile der Cykloide von a bis e je zwey Normalen, folglich auch je zwey berührende, einander parallel. Man ziehe von D aus die berührende DH an den Halbkreis dRe, so ist

nen kleinern negativ. Alſo iſt dort die krumme Linie gegen die Abſciſſenlinie convex, hier concav, und der Wechſel geſchieht in dem Punkte m, wo die Ordinate eine berührende iſt.

XXIX. Der Halbmeſſer der Krümmung an der gedehnten und an der verkürzten Cykloide iſt

$$= \frac{(aa - 2ab\cos\varphi + bb)^{\frac{3}{2}}}{a(a - b\cos\varphi)}.$$

Es iſt der Halbmeſſer der Krümmung $r = -(1+pp)^{\frac{3}{2}} \cdot \frac{dx}{dp}$, wo $p = \frac{dy}{dx}$ iſt, (Krümmungskreis, 2).

Hier iſt $p = \frac{\sin\varphi}{m - \cos\varphi}$;

$$1 + pp = \frac{mm - 2m\cos\varphi + 1}{(m - \cos\varphi)^2};$$

ferner $dp = \frac{m\cos\varphi - 1}{(m - \cos\varphi)^2} d\varphi$,

und $\frac{dx}{dp} = \frac{a(m - \cos\varphi)^3}{m\cos\varphi - 1}$; folglich

$r = \frac{a(mm - 2m\cos\varphi + 1)^{\frac{3}{2}}}{1 - m\cos\varphi}$. In dieſer Formel ſetze man für m ſeinen Werth, $\frac{b}{a}$, und multiplicire Zähler und Nenner mit a^3 oder $(a^2)^{\frac{3}{2}}$, ſo erhält r den angegebenen Werth. Der Zähler kann überhaupt poſitiv oder negativ genommen werden, weil eine Quadratwurzel beides ſeyn kann. Die Größe $aa - 2ab\cos\varphi + bb$ iſt aber poſitiv, weil ab nothwendig kleiner als $\frac{1}{4}(a+b)^2$, und daher 2ab kleiner als $aa + bb$, und noch mehr $2ab\cos\varphi$ kleiner als dieſe Summe iſt.

XXX. An der gedehnten Cykloide iſt in K, wo $\cos\varphi = \frac{1}{m}$ oder $\frac{a}{b}$ iſt, der Halbmeſſer der Krüm-

s unendlich groß; in a, wo cos φ = 1, iſt derſelbe

$= -\frac{(b-a)^2}{a}$; im Scheitel e, wo cos φ = −1,

derſelbe $= +\frac{(a+b)^2}{a}$.

In der verkürzten Cykloide iſt in m, wo cos φ = m

iſt, der Halbmeſſer der Krümmung $= (aa-bb)^{\frac{1}{2}}$,

iſt derſelbe $= -\frac{(a-b)^2}{a}$; in e iſt er

$+\frac{(a+b)^2}{a}$. Die Vorzeichen ſind ſo genommen,

ein poſitiver Krümmungshalbmeſſer zu einem con-
n Bogen, ein negativer zu einem converen gehört,
dem Puncte m (Fig. 98.) bleibt das Vorzeichen
, weil hier der Übergang von dem Converen zum
aven geſchieht.

XXXI. Die Cykloide hat die Erfindung einer andern
men Linie veranlaßt, welche zuerſt die kleine Cy-
de hieß, hernach aber den Namen, Gefährtinn
Cykloide (Cycloidis socia) erhalten hat. Ehe-
hat man ſich viel mit ihr beſchäftigt. Ihre Con-
tion iſt folgende. Mit dem Halbmeſſer AC (Fig.
.) ſey ein Kreis ANBA beſchrieben. Auf dem
chmeſſer AB errichte man in irgend einem Puncte P
ſenkrechte PM, welche den Halbkreis ANB in N
ide. Dem Bogen AN ſetze man die Ordinate PM
h, ſo iſt M ein Punct dieſer krummen Linie. Ihr
erſchied von der Cykloide beſteht darin, daß hier die
inate PM dem Kreisbogen AN gleich iſt, dagegen
der Cykloide EAM (Fig. 96.) die Ordinate QM
dem Kreisbogen DR + Ordinate am Kreiſe QR iſt.
Ordinate BD im dem Endpuncte B des Durchmeſ-
iſt gleich der Länge des Halbkreiſes, wie an der Cy-
de. Die Gefährtinn beſteht wie jene aus unendlich

vielen wiederholten gleichen Portionen, weil zu demſelben Sinus verſus unendlich viele Bogen gehören.

Es ſey AC = a; AP = x; PM = y, ſo iſt $y = \text{Arc. cos.} \frac{a-x}{a}$; und $dy = \frac{a\,dx}{\sqrt{(2ax-xx)}}$.

In F, wozu die Ordinate CE durch den Mittelpunct des Kreiſes C gehört, iſt ein Wendungspunct. Denn es iſt $\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{a-x}{(2ax-xx)^{\frac{3}{2}}}$. Dieſer Quotient iſt negativ, wenn $a > x$, und die krumme Linie iſt concav gegen AB von A bis E. Er iſt poſitiv, wenn $a < x$, alſo iſt die Linie von E bis D gegen CB convex.

Die Linie EMA heißt auch die Linie der Sinus. Wenn nämlich MQ auf CE ſenkrecht gezogen wird, ſo iſt EQ gleich dem Bogen NF, und MQ, gleich dem linearischen Sinus deſſelben für den Halbmeſſer AC. Die andere der EMA gleiche Hälfte für die Sinus der Bogen über einen Quadranten muß noch hinzugefügt werden. Wallis nennt die Linie AMD lineam sinuum verſorum.

XXXII. Wenn die Ordinaten PM ſich wie die Bogen AN verhalten, ſo entſteht eine verwandte Linie. Ihre Gleichung iſt $y = m\,a\,\text{Arc. cos} \frac{a-x}{a}$. Iſt m größer als die Einheit, ſo iſt die Curve eine Socia cycloidis (trochoidis) elongata. Für ein ſehr großes m nähert ſie ſich der Geſtalt einer ſchwingenden Saite, bey einer Totalſchwingung, und zwar mit dem Theile AME, und dem ihm gleichen in der andern Hälfte. Man ſehe Jo. Bernoulli Opera, vol. III. pag. 210, wo ſie für die Figur einer ſchwingenden Saite ſelbſt erklärt wird. Richtiger aber wird dieſe erhalten, wenn ſtatt des Kreiſes eine Ellipſe genommen wird, deren halbe große Axe CF iſt, mit einer ſehr kleinen Excentricität. Hiervon in der zweyten Abtheilung, Artikel, Saite.

Von der Evolution der Cykloide. ſ. Evolution.
Beſtimmung des Schwerpunctes ihrer Area und
cykloidaliſchen Konoids in dem Artikel, Schwer-
ict. Die Eigenſchaft, daß ſie die Linie des ſchnelle-
Falles iſt, wird in dem Artikel: Variation, vor-
men; die Eigenſchaft, daß ſie ein Pendel ſich gleich-
g ſchwingen läßt, in dem Artikel: Fall der Körper,
er zweyten Abtheilung dieſes Werkes.

Die Schrift von Wallis über die Cykloide iſt mühſam
eſen, wenn man es nicht zur Vergleichung ſeiner Methode
der neuern viel bequemern unternimmt. In den Werken
beiden Bernoulli, beſonders des jüngern, iſt vieles
r die Cykloide enthalten. Man ſehe auch nach Boſco-
ch de cycloide et Logistica. Romae, 1745.
ouvelle manière de démontrer les proprietés de
cycloide par Boſſut. Mem. présentés, T. 3.
ch einige Abhandlungen über dieſe Linie in Mur-
r d's Bibl. math. Tom. II. pag. 357. In den Wer-
über die Inſinitesimalrechnung wird ſie häufig als
yſpiel gebraucht, beſonders in der Analyse des in-
. petits von l'Hopital. Die Geſchichte derſelben hat
ontucla ausführlich vorgetragen in ſeiner Geſchichte
Mathematik. 2. Band, S. 52 — 73. zweyte Ausg.
hat dabey benutzt die Histoire de la Roulette von
ſcal, und Gröningii historia Cycloidis, Ham-
rgi 1701.

Cykloimber, Circulus imbricatus, hohl gebo-
ner Kreis, iſt eine krumme Linie von doppelter Krüm-
ung, auf der Oberfläche eines ſenkrechten Cylinders,
en Abſciſſen Bogen des Kreisumfanges von der
undfläche dieſes Körpers, und die Ordinaten, welche
ſ die Grundfläche ſenkrecht geſtellt ſind, den Ordinaten
er krummen Linie von einfacher Krümmung gleich ſind,
welcher die Abſciſſen mit denjenigen zu den Bogen des
eisumfanges übereinkommen. Dieſe zweyte krumme
ie gehe durch die Endpuncte eines Durchmeſſers der
indriſchen Grundfläche. Der Durchſchnitt zweyer cy-

lindrischen Flächen, deren Axen sich senkrecht schneiden, und die auch auf ihre Grundfläche jede senkrecht stehen, ist ein Cykloimber. Frezier hat diese krumme Linie betrachtet, und ihr den Namen gegeben. Traité de Stéréotomie, T. I. p. 42, Zimmermann de curva imbricata. Göttingae. 1765. S. Stereotomie.

Cyklometrie, ist der Inbegriff der Formeln, welche die Relationen der Kreisbogen und der ihnen zugehörigen geraden Linien darstellen. Sie ist einer der wichtigsten und schönsten Theile der neuern Analysis. Denn was vor der Erfindung unserer Infinitesimalrechnung darin gethan ist, sind nur einzelne, sehr mühsame Versuche. Ich unterscheide die Cyklometrie von der Goniometrie, welche die Vergleichung der Winkel mittelst der von ihnen abhängigen geraden Linien enthält. Die Anwendung der cyklometrischen Formeln auf die numerische Berechnung der zu den Kreisbogen gehörigen geraden Linien, oder dieser aus jenen, nenne ich Cyklotechnie, welche einen besondern Artikel ausmacht, um der Uebersicht jener nicht hinderlich zu fallen. In diesem Artikel werden auch die Bemühungen der ältern Geometer um die Kreismessung erzählt werden.

1. In dem Halbkreise AMB (Fig. 101. Tab VII.) sey der Halbmesser AC = 1; der Bogen AM = φ, dessen Sinus PM = y; es ist

$$\varphi = y + \tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{1}{3}y^3 + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\cdot\tfrac{1}{5}y^5$$

$$+ \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\cdot\tfrac{1}{7}y^7 + \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8}\cdot\tfrac{1}{9}y^9 + \ldots$$

$$+ \frac{1\cdot 3\cdot 5\ldots 2n-1}{2\cdot 4\cdot 6\ldots 2n}\cdot\frac{1}{2n+1}y^{2n+1} + \text{etc.}$$

Denn es ist (Differenz. Formel, 31.), $d\varphi = \ldots \frac{d\sin\varphi}{\cos\varphi} = \frac{dy}{\sqrt{(1-y^2)}} = (1-y^2)^{-\frac{1}{2}}dy$. Die Po-

größe verwandle man in eine Reihe nach dem binom
1 Lehrsatze, 13. IV. wo $-y^2$ statt z zu setzen ist.
en Gliedern dieser Differential-Reihe entstehen
Integration die Glieder der in dem Satze aufge-
Reihe.

Es ist keine Constans in dem Integral zugefügt
, damit φ den kleinsten zu dem Sinus y gehörigen
bedeute, da Bogen und Chorde oder Sinus sich
äher kommen, je kleiner sie sind. Die Constans
ier Null seyn. Wollte man für sie irgend ein
ches der ganzen Peripherie setzen, weil für Bogen,
n ein solches Vielfaches verschieden sind, dieselben
Statt haben, so hätte die Reihe für jedes gegebene
ihlig viele Werthe.

Hierbey kommt in Betrachtung, daß das

$\frac{dy}{\ldots -y^2)}$, oder das $\int \frac{a\,dy}{V(a^2-y^2)}$ für den Halb-

a, nur bey der Anwendung auf die Geometrie einen
ogen vorstellt. Es ist aber allgemein eine analytic
unction, die auch vorkommt, wo nicht von Kreis-
oder Winkeln die Frage ist. In der Reihe selbst
man für y größere Werthe als die Einheit setzen,
daß dieses etwas widersprechendes mit sich führte,

auch in der Reihe für die Potenz $(1-yy)^{-\frac{1}{2}}$.
n geben nur die Form der Größen, die dadurch
tellt werden, nicht schlechthin ihren arithmetischen
. Die Anwendbarkeit einer Reihe zur Berech-
muß aus den Umständen beurtheilt werden.

. Es sey des Bogens AM Cosinus $CP = x$,
er halbe Umfang des Kreises $= \pi$, so ist $\frac{1}{2}\pi - \varphi$

$+ \frac{1}{2}.\frac{1}{3}x^5 + \frac{1.3}{2.4}.\frac{1}{5}x^6 +$ etc. wie in der
(1.).

denn es ist x der Sinus des Bogens $\frac{1}{2}\pi - \varphi$, wel-
durch seinen Sinus eben so dargestellt wird, wie

φ durch y. Eben dieſes erhält man aus der Integration der Formel $d\varphi = -\frac{d\cos\varphi}{\sin\varphi} = -\frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)}}$, worin das Vorzeichen anzeigt, daß die Differentiale des Bogens und des Coſinus ungleichnamig ſind. Es iſt daraus $\text{Const} - \varphi = x + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}x^5 + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\cdot\frac{1}{5}x^6 +$ etc. und die $\text{Const} = \frac{1}{2}\pi$, damit für $x = 0$ auch der Bogen, $\text{Const} - \varphi = 0$ ſey, und damit Coſinus und Bogen ſich einander deſto mehr nähern, je kleiner beide ſind.

5. Es iſt $\sin\varphi = \varphi - \frac{\varphi^3}{1.2.3} + \frac{\varphi^5}{1.2.3.4.5} - \frac{\varphi^7}{1..2..6.7} + \frac{\varphi^9}{1.2..8.9} -$ etc.

Die wirkliche Umkehrung der Reihe in (1.) würde ſehr beſchwerlich fallen. Iſt aber nur die Form der umgekehrten Reihe bekannt, ſo iſt es durch eine leichte Rechnung möglich, die Coefficienten zu beſtimmen. Daß y die Form, $A\varphi + B\varphi^3 + C\varphi^5 + D\varphi^7 +$ etc. haben müſſe, erhellet daraus, daß für gleiche entgegengeſetzte Bogen die Sinus gleich und entgegengeſetzt werden. Darum können erſtlich nicht alle Potenzen von φ in der Reihe für y Statt haben, weil dadurch für entgegengeſetzte Bogen die Werthe der Sinus nicht gleich würden: zweytens auch nicht bloß die geraden Potenzen, welche für entgegengeſetzte φ dieſelbigen und gleichnamigen Sinus geben würden. Die Beſchaffenheit der Vorzeichen muß die Rechnung mit der Größe der Coefficienten zugleich beſtimmen. Ohne aber auf die Beſchaffenheit der Reihe für den Kreis zu achten, kann man dieſes folgendergeſtalt darthun. Man ſetze $y = \varphi - u$, ſo iſt $u = \alpha(\varphi-u)^5 + \beta(\varphi-u)^6 + \gamma(\varphi-u)^7 +$ etc. wo die Coefficienten α, β, γ, etc. der Kürze wegen für die Zahlcoefficienten in der Reihe (1.) geſetzt ſind. Die Entwickelung der Glieder giebt eine

Reihe, worin die veränderlichen Factoren entweder die Form $\varphi^{2m+1}u^{2n}$, oder die, $\varphi^{2m}u^{2n+1}$, haben. Setzt man für einen Factor u jene Reihe, so behalten die Glieder eben die Form. Wird nun solchergestalt u aus einem Gliede der Reihe nach dem andern herausgeschafft, so behält man nur Glieder mit ungeraden Potenzen von φ.

Man setze demnach $y = A\varphi - B\varphi^3 + C\varphi^5 - D\varphi^7 + E\varphi^9 - \text{etc.}$ Ob die Vorzeichen richtig angenommen seyn, muß die Rechnung zeigen. Für das zweyte Glied ist es gleich klar, weil φ größer, als r ist, es müßte denn A ein Bruch seyn. Wir haben die beiden Differentialgleichungen, $x\,d\varphi = dy$, und $y\,d\varphi = -dx$. In der zweyten setze man für y die angenommene Reihe, so ist

$$-A\varphi\,d\varphi + B\varphi^3 d\varphi - C\varphi^5 d\varphi + D\varphi^7 d\varphi - E\varphi^9 d\varphi + \text{etc.} = +dx;$$

also durch die Integration

$$1 - \tfrac{1}{2}A\varphi^2 + \tfrac{1}{4}B\varphi^4 - \tfrac{1}{6}C\varphi^6 + \tfrac{1}{8}D\varphi^8 - \tfrac{1}{10}E\varphi^{10} + \text{etc.} = x,$$

wo die Const. $= 1$ ist, da für $\varphi = 0$, $x = 1$ ist.

Man multiplicire diese Gleichung mit $d\varphi$, so ist

$$1\varphi - \tfrac{1}{2}A\varphi^2 d\varphi + \tfrac{1}{4}B\varphi^4 d\varphi - \tfrac{1}{6}C\varphi^6 d\varphi + \tfrac{1}{8}D\varphi^8 d\varphi - \tfrac{1}{10}E\varphi^{10} d\varphi + \text{etc.} = x\,d\varphi = dy.$$

Daraus ist

$$\varphi - \frac{1}{2\cdot 3}A\varphi^3 + \frac{1}{4\cdot 5}B\varphi^5 - \frac{1}{6\cdot 7}C\varphi^7 + \frac{1}{8\cdot 9}D\varphi^9 - \frac{1}{10\cdot 11}E\varphi^{11} + \text{etc.} = y$$

Diese Reihe mit der für y angenommenen verglichen, zieht

wie aus der Differentiation d
dritte enthält bloß eine gonio

Aus dieſen Integralen
Werth des Abſchnittes des cyl

Die Conſtans $-\frac{1}{12}$ iſt z
$Z=0$ ſey, wenn $\omega=0$ iſt,
der $=1$ ſind.

XIX. Der Inhalt des
durch die Drehung um die A
$=\pi a^3(\frac{3}{4}\pi^2-\frac{8}{3})$. Der I
ſelben Grundfläche mit derſ
$=\pi^3 a^3$. Es verhält ſich je
wie $\frac{3}{4}\pi^2-\frac{4}{3}:\pi^2$. Dieſes
berval gefunden. Torricelli
da er es wie 11 : 18 ſetzte.

XX. Die Oberfläche d
das durch die Umdrehung de
entſteht, iſt
$=4\pi a^2(2\omega.\sin\frac{1}{2}\omega+3c$
Die Oberfläche eines un

Fläche ſey $=s$, und $\frac{du}{dt}$

Daher ist $dS = 4\pi a^2(\omega + \sin\omega)\cos\frac{1}{2}\omega.d\omega$. Zu der Integration dieser Formel sind folgende Integralformeln erforderlich:

$$\int \omega\cos\tfrac{1}{2}\omega.d\omega = 2\omega\sin\tfrac{1}{2}\omega + 4\cos\tfrac{1}{2}\omega$$

$$\int \sin\omega.\cos\tfrac{1}{2}\omega.d\omega = \tfrac{1}{2}\int \sin\tfrac{3}{2}\omega.d\omega + \tfrac{1}{2}\sin\tfrac{1}{2}\omega.d\omega$$

$$= -\tfrac{1}{3}\cos\tfrac{3}{2}\omega - \cos\tfrac{1}{2}\omega.$$

Daraus ist $S = 4\pi a^2(2\omega\sin\frac{1}{2}\omega + 3\cos\frac{1}{2}\omega - \frac{1}{3}\cos\frac{3}{2}\omega + \text{Const.})$. Für $S = 0$ ist $\omega = 0$, $\sin\frac{1}{2}\omega = 0$, $\cos\frac{1}{2}\omega = 1$; $\cos\frac{3}{2}\omega = 1$, also $\text{Const} = -\frac{8}{3}$.

XXI. Die Oberfläche des ganzen cykloidalischen Koneids ist $= 4\pi a^2(2\pi - \frac{8}{3})$.

XXII. Joh. Bernoulli bemerkte, daß unzählig viele Segmente zwischen einem cykloidalischen Bogen und seiner Chorde, und auch unzählig viele Abschnitte zwischen zwey der Grundlinie parallelen Chorden sich finden lassen, die, jene geometrisch, diese algebraisch quadrirbar sind, ohne von der Rectification eines Kreisbogens abzuhangen. Es seyn (Fig. 99. Tab. VII.) EQ, Eq zwey Abscissen auf der Axe vom Scheitel, QM, qm die zugehörigen Ordinaten. Man nehme den Unterschied der zugehörigen Flächenräume EQM, Eqm aus V. und setze den Theil der Formel, welcher die zugehörigen Winkel enthält, $= 0$, so ist der übrige Theil, der Abschnitt QMmq, algebraisch quadrirbar. Die zu den Areis gehörigen Winkel seyn ω und $n\omega$, so muß seyn $\frac{1}{2} - \cos\omega = n(\frac{1}{2} - \cos n\omega)$. Ist n eine ganze Zahl, so wird $\cos\omega$ durch eine algebraische Gleichung gefunden, (Goniometrie, IV.). Ist n eine gebrochene Zahl, so ist die Gleichung für $\cos\omega$ transscendent, (eb. das.). Bernoulli läßt zwar n auch eine gebrochne Zahl bedeuten. Opp. T. III. p. 327,

Man ziehe durch den Scheitel E die berührende PEp, und nehme sie zur Abscissenlinie, worauf die Ordinaten PM, pm senkrecht sind. Wenn Ep mit EP auf derselben Seite liegt, so ziehe man den Werth der kleinern Area Epm von dem der größern EPM ab, nach der Formel VIII. so hat man den Werth des Quadri-

gen [illegible]
$\cos\omega + \cos\omega' = 1$ ſeyn, dar
hängige Theil verſchwinde.

Fällt E p auf die entgeger
ziehung auf E P, ſo nimmt
daliſchen Flächenräume E P I
von dem Trapezium P M m p
kloidaliſche Segment M E m
metriſch quadrirbar ſeyn, ſ
$+ \cos\omega' = 1$.

XXIV. Die gedehnte
ſich auf eine ähnliche Art, wi
Man ſetze die Grundlinie A
$= 2 m \pi a$, ſo daß ſie länge
des erzeugenden Kreiſes ſey,
ner als die Einheit iſt.
den der Kreis bey der Wälzu
gelegt hat, verhalte ſich zu d
dem beſchreibenden Puncte un
A B ebenfalls immer wie m
dehnte oder verkürzte Cykl
$= a(m\varphi - \sin\varphi)$, und
auch E Q $= t = a(1 - co$
$a(m\omega + \sin\omega)$.

Die Tangente des Winkels der Normale mit der Ordinate ist $= \frac{dy}{dx}$, da die Subnormale $PN = \frac{y\,dy}{dx}$ ist, (berührende, 42.). Nun ist $dx = a(m - \cos\varphi)\,d\varphi$; und $dy = a \sin\varphi . d\varphi$, also ist $\frac{dy}{dx} = \frac{\sin\varphi}{m - \cos\varphi}$. Der Umfang des Kreises DFED ist $= 2\pi b$. Da dieser der Grundlinie gleich ist, so ist $2\pi b = 2m\pi a$, und daher $m = \frac{b}{a}$. Setzt man diesen Werth für m, so ist $\frac{dy}{dx} = \frac{a \sin\varphi}{b - a\cos\varphi}$.

XXVI. Hieraus ergiebt sich folgende Construction für die Normale. Man ziehe durch M mit der Grundlinie die parallele MQ bis an de, welche den erzeugenden Kreis in R schneide. Da $MP = a(1 - \cos\varphi)$ ist, so ist $dQ = a(1 - \cos\varphi)$, also $CQ = a\cos\varphi$, und der Winkel $dCR = \varphi$, spitz, wenn dQ kleiner als dC; stumpf, wenn dQ größer als dC ist, als wodurch $\cos\varphi$ negativ ist. Man ziehe durch D, den Berührungspunct des Kreises DFED mit AB, nach R die gerade DR, so ist in dem Dreyecke DCR die tang $CDR = \frac{a \sin\varphi}{b - a\cos\varphi}$ (trigonom. Formeln), also W. $RDC = PMN$, und die Normale MN ist parallel mit DR.

XXVII. In der gedehnten Cykloide (Fig. 97.) schneidet DR den Halbkreis dRe zweymahl, den Berührungsfall ausgenommen; also sind an dem Theile der Cykloide von a bis e je zwey Normalen, folglich auch je zwey berührende, einander parallel. Man ziehe von D aus die berührende DH an den Halbkreis dRe, so ist

der gegen [illegible]
male mit der Abſciſſenlinie
gen iſt concav gegen a d. (

XXVIII. Dieſes folgt auc
die wir hier zur Übung in
wollen. Der Bogen eine
die Abſciſſenlinie, wo für poſi
Quotient $\frac{d^2y}{dx^2}$ poſitiv iſt,
iſt. Dabey iſt dx unveränd
$\cos\varphi)\,d\varphi$, und $d^2x = 0$, ſ

$+\sin\varphi.d\varphi^2$, alſo $d^2\varphi =$

Aus der Gleichung $dy =$
$a\cos\varphi.d\varphi^2 + a\sin\varphi.d^2$

$$d^2y = a\cos\varphi.d\varphi^2 -$$

$$= \frac{a(m\cos\varphi - 1)}{m - \cos\varphi}$$

$$= \frac{m\cos\varphi - 1}{a(m - \cos\varphi)^2}, \text{ obe}$$

An der gedehnten Cyklo
[illegible] $b = a$ iſt, alſo iſt der

Die Tangente des Winkels der Normale mit der Ordinate ist $= \frac{dy}{dx}$, da die Subnormale $PN = \frac{y\,dy}{dx}$ ist, (berührende, 42.). Nun ist $dx = a(m - \cos\varphi)\,d\varphi$; und $dy = a \sin\varphi . d\varphi$, also ist $\frac{dy}{dx} = \frac{\sin\varphi}{m - \cos\varphi}$. Der Umfang des Kreises DFED ist $= 2\pi b$. Da dieser der Grundlinie gleich ist, so ist $2\pi b = 2m\pi a$, und daher $m = \frac{b}{a}$. Setzt man diesen Werth für m, so ist $\frac{dy}{dx} = \frac{a \sin\varphi}{b - a\cos\varphi}$.

XXVI. Hieraus ergiebt sich folgende Construction für die Normale. Man ziehe durch M mit der Grundlinie die parallele MQ bis an de, welche den erzeugenden Kreis in R schneide. Da $MP = a(1 - \cos\varphi)$ ist, so ist $dQ = a(1 - \cos\varphi)$, also $CQ = a\cos\varphi$, und der Winkel $dCR = \varphi$, spitz, wenn dQ kleiner als dC; stumpf, wenn dQ größer als dC ist, als wodurch cos φ negativ ist. Man ziehe durch D, den Berührungspunct des Kreises DFED mit AB, nach R die gerade DR, so ist in dem Dreyecke DCR die tang $CDR = \frac{a \sin\varphi}{b - a\cos\varphi}$ (trigonom. Formeln), also W. RDC = PMN, und die Normale MN ist parallel mit DR.

XXVII. In der gedehnten Cykloide (Fig. 97.) schneidet DR den Halbkreis dRe zweymahl, den Berührungsfall ausgenommen; also sind an dem Theile der Cykloide von a bis e je zwey Normalen, folglich auch je zwey berührende, einander parallel. Man ziehe von D aus die berührende DH an den Halbkreis dRe, so ist

$$= \frac{(aa - 2ab\cos\varphi + b}{a(a - b\cos\varphi)}$$

1. Es ist der Halbmesser b

$$= (1+pp)^{\frac{3}{2}} \cdot \frac{dx}{dp}, \text{ wo } p =$$

Hier ist $p = \frac{\sin\varphi}{m - \cos\varphi}$

$$1 + pp = \frac{mm - 2m}{(m - c}$$

ferner $dp = \frac{m\cos\varphi -}{(m - \cos($

und $\frac{dx}{dp} = \frac{a(m - \cos}{m\cos\varphi -}$

$$r = \frac{a(mm - 2m\cos\varphi +}{1 - m\cos\varphi}$$

setze man für m seinen Wer

Zähler und Nenner mit a^3 o
angegebenen Werth. Der Z

mung unendlich groß; in a, wo cos $\varphi = 1$, iſt derſelbe $= -\frac{(b-a)^2}{a}$; im Scheitel e, wo cos $\varphi = -1$, iſt derſelbe $= +\frac{(a+b)^2}{a}$.

An der verkürzten Cykloide iſt in m, wo cos $\varphi = m = \frac{b}{a}$ iſt, der Halbmeſſer der Krümmung $= (aa-bb)^{\frac{1}{2}}$; in a iſt derſelbe $= -\frac{(a-b)^2}{a}$; in e iſt er $= +\frac{(a+b)^2}{a}$. Die Vorzeichen ſind ſo genommen, daß ein poſitiver Krümmungshalbmeſſer zu einem concaven Bogen, ein negativer zu einem converen gehört. In dem Puncte m (Fig. 98.) bleibt das Vorzeichen weg, weil hier der Übergang von dem Converen zum Concaven geſchieht.

XXXI. Die Cykloide hat die Erfindung einer andern krummen Linie veranlaßt, welche zuerſt die kleine Cykloide hieß, hernach aber den Namen, Gefährtinn der Cykloide (Cycloidis socia) erhalten hat. Ehedem hat man ſich viel mit ihr beſchäftigt. Ihre Conſtruction iſt folgende. Mit dem Halbmeſſer AC (Fig. 100.) ſey ein Kreis ANBA beſchrieben. Auf dem Durchmeſſer AB errichte man in irgend einem Puncte P die ſenkrechte PM, welche den Halbkreis ANB in N ſchneide. Dem Bogen AN ſetze man die Ordinate PM gleich, ſo iſt M ein Punct dieſer krummen Linie. Ihr Unterſchied von der Cykloide beſteht darin, daß hier die Ordinate PM dem Kreisbogen AN gleich iſt, dagegen an der Cykloide EAM (Fig. 96.) die Ordinate QM = dem Kreisbogen DR + Ordinate am Kreiſe QR iſt. Die Ordinate BD im dem Endpuncte B des Durchmeſſers iſt gleich der Länge des Halbkreiſes, wie an der Cykloide. Die Gefährtinn beſteht wie jene aus unendlich

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{a-x}{(2ax-x}$$

negativ, wenn $a > x$, und

gegen AB von A bis E.

so ist die Linie von E bis I

Die Linie EMA heißt

Wenn nämlich MQ auf C

ist EQ gleich dem Bogen

linearischen Sinus desselben

Die andere der EMA gle

der Bogen über einen Quadr

werden. Wallis nennt die Li

Versorium.

XXII. Wenn die Ord

gen AN verhalten, so ent

Die Gleichung ist $y = m a$

größer als die Einheit, so ist

oidis (trochoidis) elonga

nähert sie sich der Gestalt

bey einer Totalschwingung,

AME, und dem ihm glei

Von der Evolution der Cykloide. ſ. Evolution. Die Beſtimmung des Schwerpunctes ihrer Area und es cykloidaliſchen Konoids in dem Artikel, Schwerunct. Die Eigenſchaft, daß ſie die Linie des ſchnellen Falles iſt, wird in dem Artikel: Variation, vorkommen; die Eigenſchaft, daß ſie ein Pendel ſich gleichzeitig ſchwingen läßt, in dem Artikel: Fall der Körper, in der zweyten Abtheilung dieſes Werkes.

Die Schrift von Wallis über die Cykloide iſt mühſam zu leſen, wenn man es nicht zur Vergleichung ſeiner Methode mit der neuern viel bequemern unternimmt. In den Werken der beiden Bernoulli, beſonders des jüngern, iſt vieles über die Cykloide enthalten. Man ſehe auch nach Boscovich de cycloide et Logistica. Romae, 1745. Nouvelle manière de démontrer les proprietés de la cycloide par Bossut. Mem. présentés, T. 3. Noch einige Abhandlungen über dieſe Linie in Murhards Bibl. math. Tom. II. pag. 357. In den Werken über die Infinitesimalrechnung wird ſie häufig als Beyſpiel gebraucht, beſonders in der Analyse des infin. petits von l'Hopital. Die Geſchichte derſelben hat Montucla ausführlich vorgetragen in ſeiner Geſchichte der Mathematik. 2. Band, S. 52 — 73. zweyte Ausg. Er hat dabey benutzt die Histoire de la Roulette von Paſcal, und Gröningii historia Cycloidis, Hamburgi 1701.

Cykloimber, Circulus imbricatus, hohl gebogener Kreis, iſt eine krumme Linie von doppelter Krümmung, auf der Oberfläche eines ſenkrechten Cylinders, deren Abſciſſen Bogen des Kreisumfanges von der Grundfläche dieſes Körpers, und die Ordinaten, welche auf die Grundfläche ſenkrecht geſtellt ſind, den Ordinaten einer krummen Linie von einfacher Krümmung gleich ſind, an welcher die Abſciſſen mit denjenigen zu den Bogen des Kreisumfanges übereinkommen. Dieſe zweyte krumme Linie gehe durch die Endpuncte eines Durchmeſſers der cylindriſchen Grundfläche. Der Durchſchnitt zweyer cy-

lindrischen Flächen, deren Axen sich senkrecht schneiden, und die auch auf ihre Grundfläche jede senkrecht stehen, ist ein Cykloimber. Frezier hat diese krumme Linie betrachtet, und ihr den Namen gegeben. Traité de Stéréotomie, T. I. p. 42, Zimmermann de curva imbricata. Göttingae. 1765. S. Stereotomie.

Cyklometrie, ist der Inbegriff der Formeln, welche die Relationen der Kreisbogen und der ihnen zugehörigen geraden Linien darstellen. Sie ist einer der wichtigsten und schönsten Theile der neuern Analysis. Denn was vor der Erfindung unserer Infinitesimalrechnung darin gethan ist, sind nur einzelne, sehr mühsame Versuche. Ich unterscheide die Cyklometrie von der Goniometrie, welche die Vergleichung der Winkel mittelst der von ihnen abhängigen geraden Linien enthält. Die Anwendung der cyklometrischen Formeln auf die numerische Berechnung der zu den Kreisbogen gehörigen geraden Linien, oder dieser aus jenen, nenne ich Cyklotechnie, welche einen besondern Artikel ausmacht, um der Uebersicht jener nicht hinderlich zu fallen. In diesem Artikel werden auch die Bemühungen der ältern Geometer um die Kreismessung erzählt werden.

1. In dem Halbkreise AMB (Fig. 101. Tab VII.) sey der Halbmesser AC = 1; der Bogen AM = φ, dessen Sinus PM = y; es ist

$$\varphi = y + \tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{1}{3}y^3 + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\cdot\tfrac{1}{5}y^5$$

$$+ \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\cdot\tfrac{1}{7}y^7 + \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8}\cdot\tfrac{1}{9}y^9 + \ldots$$

$$+ \frac{1\cdot 3\cdot 5\ldots 2n-1}{2\cdot 4\cdot 6\ldots 2n}\cdot\frac{1}{2n+1}y^{2n+1} + \text{etc.}$$

Denn es ist (Different. Formel, 31.), $d\varphi = \ldots$

$\frac{d\sin\varphi}{\cos\varphi} = \frac{dy}{\sqrt{(1-y^2)}} = (1-y^2)^{-\frac{1}{2}}dy$. Die Po-

zialgröße verwandle man in eine Reihe nach dem binomischen Lehrsatze, 13. IV. wo $-y^2$ statt z zu setzen ist. Aus den Gliedern dieser Differential-Reihe entstehen durch Integration die Glieder der in dem Satze aufgestellten Reihe.

2. Es ist keine Constans in dem Integral zugefügt worden, damit φ den kleinsten zu dem Sinus y gehörigen Bogen bedeute, da Bogen und Chorde oder Sinus sich desto näher kommen, je kleiner sie sind. Die Constans muß hier Null seyn. Wollte man für sie irgend ein vielfaches der ganzen Peripherie setzen, weil für Bogen, um ein solches Vielfaches verschieden sind, dieselben Sinus Statt haben, so hätte die Reihe für jedes gegebene unzählig viele Werthe.

3. Hierbey kommt in Betrachtung, daß das $\frac{dy}{\sqrt{(1-y^2)}}$, oder das $\int \frac{a\,dy}{\sqrt{(a^2-y^2)}}$ für den Halbmesser a, nur bey der Anwendung auf die Geometrie einen Kreisbogen vorstellt. Es ist aber allgemein eine analytische Function, die auch vorkommt, wo nicht von Kreisbogen oder Winkeln die Frage ist. In der Reihe selbst kann man für y größere Werthe als die Einheit setzen, ohne daß dieses etwas widersprechendes mit sich führte, wie auch in der Reihe für die Potenz $(1-yy)^{-\frac{1}{2}}$. Reihen geben nur die Form der Größen, die dadurch dargestellt werden, nicht schlechthin ihren arithmetischen Werth. Die Anwendbarkeit einer Reihe zur Berechnung muß aus den Umständen beurtheilt werden.

4. Es sey des Bogens AM Cosinus $CP = x$, und der halbe Umfang des Kreises $= \pi$, so ist $\frac{1}{2}\pi - \varphi = x + \frac{1}{2}.\frac{1}{3}x^3 + \frac{1.3}{2.4}.\frac{1}{5}x^5 + \text{etc.}$ wie in der Reihe (1.).

Denn es ist x der Sinus des Bogens $\frac{1}{2}\pi - \varphi$, welcher durch seinen Sinus eben so dargestellt wird, wie

φ durch y. Eben dieſes erhält man aus der Integration der Formel $d\varphi = -\frac{d\cos\varphi}{\sin\varphi} = -\frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)}}$, worin das Vorzeichen anzeigt, daß die Differentiale des Bogens und des Coſinus ungleichnamig ſind. Es iſt daraus $\text{Const} - \varphi = x + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}x^3 + \frac{1\cdot3}{2\cdot4}\cdot\frac{1}{5}x^5 +$ etc. und die $\text{Const} = \frac{1}{2}\pi$, damit für $x = 0$ auch der Bogen, $\text{Const} - \varphi = 0$ ſey, und damit Coſinus und Bogen ſich einander deſto mehr nähern, je kleiner beide ſind.

5. Es iſt $\sin\varphi = \varphi - \frac{\varphi^3}{1.2.3} + \frac{\varphi^5}{1.2.3.4.5} - \frac{\varphi^7}{1..2..6.7} + \frac{\varphi^9}{1.2..8.9} -$ etc.

Die wirkliche Umkehrung der Reihe in (1.) würde ſehr beſchwerlich fallen. Iſt aber nur die Form der umgekehrten Reihe bekannt, ſo iſt es durch eine leichte Rechnung möglich, die Coefficienten zu beſtimmen. Daß y die Form, $A\varphi + B\varphi^3 + C\varphi^5 + D\varphi^7 +$ etc. haben müſſe, erhellet daraus, daß für gleiche entgegengeſetzte Bogen die Sinus gleich und entgegengeſetzt werden. Darum können erſtlich nicht alle Potenzen von φ in der Reihe für y Statt haben, weil dadurch für entgegengeſetzte Bogen die Werthe der Sinus nicht gleich würden: zweytens auch nicht bloß die geraden Potenzen, welche für entgegengeſetzte φ dieſelbigen und gleichnamigen Sinus geben würden. Die Beſchaffenheit der Vorzeichen muß die Rechnung mit der Größe der Coefficienten zugleich beſtimmen. Ohne aber auf die Beſchaffenheit der Reihe für den Kreis zu achten, kann man dieſes folgendergeſtalt darthun. Man ſetze $y = \varphi - u$, ſo iſt $u = \alpha(\varphi-u)^5 + \beta(\varphi-u)^5 + \gamma(\varphi-u)^7 +$ etc. wo die Coefficienten α, β, γ, etc. der Kürze wegen für die Zahlcoefficienten in der Reihe (1.) geſetzt ſind. Die Entwickelung der Glieder giebt eine

Reihe, worin die veränderlichen Factoren entweder die Form $\varphi^{2m+1}u^{2n}$, oder die, $\varphi^{2m}u^{2n+1}$, haben. Setzt man für einen Factor u jene Reihe, so behalten die Glieder eben die Form. Wird nun solchergestalt u aus einem Gliede der Reihe nach dem andern herausgeschafft, so behält man nur Glieder mit ungeraden Potenzen von φ.

Man setze demnach $y = A\varphi - B\varphi^3 + C\varphi^5 - D\varphi^7 + E\varphi^9 - \text{etc.}$ Ob die Vorzeichen richtig angenommen sind, muß die Rechnung zeigen. Für das zweyte Glied ist es gleich klar, weil φ größer, als y ist, es müßte denn A ein Bruch seyn. Wir haben die beiden Differentialgleichungen, $x\,d\varphi = dy$, und $y\,d\varphi = -dx$. In der zweyten setze man für y die angenommene Reihe, so ist

$$-A\varphi\,d\varphi + B\varphi^3 d\varphi - C\varphi^5 d\varphi + D\varphi^7 d\varphi - E\varphi^9 d\varphi + \text{etc.} = +dx;$$

also durch die Integration

$$1 - \tfrac{1}{2}A\varphi^2 + \tfrac{1}{4}B\varphi^4 - \tfrac{1}{6}C\varphi^6 + \tfrac{1}{8}D\varphi^8 - \tfrac{1}{10}E\varphi^{10} + \text{etc.} = x,$$

wo die Const. $= 1$ ist, da für $\varphi = 0$, $x = 1$ ist.

Man multiplicire diese Gleichung mit $d\varphi$, so ist

$$d\varphi - \tfrac{1}{2}A\varphi^2 d\varphi + \tfrac{1}{4}B\varphi^4 d\varphi - \tfrac{1}{6}C\varphi^6 d\varphi + \tfrac{1}{8}D\varphi^8 d\varphi - \tfrac{1}{10}E\varphi^{10} d\varphi + \text{etc.} = x\,d\varphi = dy.$$

Daraus ist

$$\varphi - \frac{1}{2.3}A\varphi^3 + \frac{1}{4.5}B\varphi^5 - \frac{1}{6.7}C\varphi^7 + \frac{1}{8.9}D\varphi^9 - \frac{1}{10.11}E\varphi^{11} + \text{etc.} = y$$

Diese Reihe mit der für y angenommenen verglichen, giebt

der Grad der Gleichung, diese Werthe auch ganz gleichförmig, ohne Unterbrechung auf einander folgen.

9. In der Formel für φ (1), setze man $y = 1$, und die Binomial-Coefficienten, $\frac{1}{2} = \alpha$; $\frac{1 \cdot 3}{3 \cdot 4} = \beta$; $\frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} = \gamma$; $\frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8} = \delta$; etc. so ist der Quadrant $\frac{1}{2}\pi = 1 + \frac{1}{3}\alpha + \frac{1}{5}\beta + \frac{1}{7}\gamma + \frac{1}{9}\delta +$ etc. Dieser Werth läßt sich auf unzählig viele Arten abändern. Es ist

$$\alpha.\ \tfrac{1}{2}\pi = \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{5}\alpha + \tfrac{1}{7}\beta + \tfrac{1}{9}\gamma + \tfrac{1}{11}\delta + \text{ etc.}$$

$$\beta.\ \tfrac{1}{2}\pi = \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{7}\alpha + \tfrac{1}{9}\beta + \tfrac{1}{11}\gamma + \tfrac{1}{13}\delta + \text{ etc.}$$

und überhaupt

$$\frac{1 \cdot 3 \ldots (2m+1)}{2 \cdot 4 \ldots (2m+2)} \cdot \tfrac{1}{2}\pi = \frac{1}{2m+3} + \frac{\alpha}{2m+5} + \frac{\beta}{2m+7} + \frac{\gamma}{2m+9} + \text{etc.}$$

Auch ist

$$\frac{1 \cdot 3 \ldots (2m-1)}{2 \cdot 4 \ldots 2m} \cdot \frac{1}{m+1} \cdot \tfrac{1}{4}\pi = \frac{1}{2m+1} - \frac{1}{2(m+3)} - \frac{\alpha}{4(2m+5)} - \frac{\beta}{6(2m+7)} - \frac{\gamma}{8(2m+9)} - \text{etc.}$$

Man sehe meine Abhandlung über die verschiedenen Zusammensetzungen des Umfanges eines Kreises aus denselben Elementen, im Archiv der Mathem. 2r Bd. 5s Heft.

10. Man ziehe in A (Fig. 101. Tab. VII.) die berührende AT, welche von der verlängerten CM in N geschnitten werde, und setze $AN = t$, für $AC = 1$, so ist $\varphi = t - \frac{1}{3}t^3 + \frac{1}{5}t^5 - \frac{1}{7}t^7 + \frac{1}{9}t^9 -$ etc.

Die Differentialgleichung für die Tangente des Bogens $\varphi = AM$, nämlich $d\varphi = \frac{dt}{1+tt}$ (Differential-

mel, 31.) verwandelt sich mittelst der wirklichen Divi- 1 der Einheit durch $1+tt$ in diese, $d\varphi=(1-t^2$ $t^4-t^6+t^8-$ etc.) dt, woraus durch die Integra- n die angegebene Formel folgt. Da das Gränzver- niß zwischen φ und t das $1:1$ ist, so muß die nst $=0$ seyn.

11. Die Reihe divergirt, wenn t größer als die nheit, oder wenn der Bogen φ größer, als ein halber adrant ist. Sie convergirt äußerst langsam, wenn φ halber Quadrant, und $t=1$ ist. Nach Eulers Be- rkung, Comment. Petrop. vet. T. IX. pag. 226. ißte man von ihr 10^{50} Glieder berechnen, den Umfang f 100 Stellen zu erhalten, welches eine ungeheure Zeit ordern würde. Wenn t größer als die Einheit ist, giebt die Reihe bloß die Form des Bogens durch die ngente. Das Verhältniß $d\varphi:dt$ hat immer dieselbe rm $1:1+tt$; es mag t größer oder kleiner als die nheit seyn. Daher hat auch $\varphi\cdot t$ dieselbe Form in den Fällen. Um φ durch t auszudrücken in dem Falle, t größer als die Einheit ist, muß bey der Division der nheit durch $1+tt$ in der Differentialgleichung der eil tt zum ersten Theile genommen werden.

12. Es ist $\varphi=\frac{1}{2}\pi-\frac{1}{t}+\frac{1}{3t^3}-\frac{1}{5t^5}$

$\frac{1}{7t^7}-\frac{1}{9t^9}+$ etc.

Denn $d\varphi=(\frac{1}{t^2}-\frac{1}{t^4}+\frac{1}{t^6}-\frac{1}{t^8}$

$+$ etc.$)dt$,

ö

$$\varphi-\text{Const}=-\frac{1}{t}+\frac{1}{3t^3}-\frac{1}{5t^5}+\frac{1}{7t^7}$$

etc.

ie Reihe wird $=0$, wenn t unendlich groß ist; alsdann ist $\varphi=\frac{1}{2}\pi$, daher Const $=\frac{1}{2}\pi$.

13. Es sey $u=\text{cotang}\,\varphi$, so ist

$\varphi=\frac{1}{2}\pi-u+\frac{1}{3}u^3-\frac{1}{5}u^5+\frac{1}{7}u^7-\frac{1}{9}u^9+$ etc.

Dieſe Formel folgt aus der vorhergehenden, da $a = \frac{1}{t}$ iſt, (Goniometrie, 9.).

14. Es iſt $t = \text{tang}\,\varphi = \varphi + \frac{1}{3}\varphi^3 + \frac{2}{3\cdot5}\varphi^5 + \frac{17}{3\cdot3\cdot5\cdot7}\varphi^7 + \frac{2\cdot31}{3\cdot3\cdot5\cdot7\cdot9}\varphi^9 + \frac{2\cdot691}{3\cdot3\cdot5\cdot5\cdot7\cdot9\cdot11}\varphi^{11} + \text{etc.}$

Man ſetze, wie in (5), $t = a\varphi + b\varphi^3 + c\varphi^5 + d\varphi^7 + e\varphi^9 + f\varphi^{11} + \text{etc.}$, und $t^2 = \alpha\varphi^2 + \beta\varphi^4 + \gamma\varphi^6 + \delta\varphi^8 + \varepsilon\varphi^{10} + \text{etc.}$ wo die Coefficienten α, β, etc. durch a, b, etc. gegeben ſind. Da $dt = (1+t^2)d\varphi$, ſo iſt,

$$t = \varphi + \tfrac{1}{3}\alpha\varphi^3 + \tfrac{1}{5}\beta\varphi^5 + \tfrac{1}{7}\gamma\varphi^7 + \tfrac{1}{9}\delta\varphi^9 + \text{etc.}$$

Es iſt $\alpha = a^2$; $\beta = 2ab$; $\gamma = 2ac + bb$;
$\delta = 2ad + 2bc$; $\varepsilon = 2ae + 2bd + cc$;
$\zeta = 2af + 2be + 2cd$; etc.

Die Vergleichung der gefundenen Reihe für t mit der angenommenen, giebt

$a = 1$; $3b = \alpha$; $5c = \beta$; $7d = \gamma$; $9e = \delta$, etc.

folglich iſt

$a = 1$; $3b = a^2$;
$5c = 2ab$; $7d = 2ac + bb$;
$9e = 2ad + 2bc$;
$11f = 2ae + 2bd + cc$;
$13g = 2af + 2be + 2cd$;
$15h = 2ag + 2bf + 2ce + dd$;
etc.

Wenn die Stellen der a, b, c, etc. durch 1, 2, 3. etc. bezeichnet werden, ſo ſind in jedem Coefficienten alle Combinationen je zweyer vorhergehenden enthalten, deren Stellenzahlen zuſammengenommen die Stellenzahl jenes ausmachen, von ihren Verſetzungszahlen begleitet. Die

Summe aller wird durch $2n-1$ dividirt, wenn n die Stellenzahl des Coefficienten ist. Da jeder Coefficient aus allen vorhergehenden zusammengesetzt wird, so entsteht daher die scheinbare Unregelmäßigkeit der numerischen Coefficienten, deren Gesetz inzwischen ganz faßlich ist.

15. Es sey $u = \text{cotang}\,\varphi$, so ist

$$u = \frac{1}{\varphi} - \frac{1}{3}\varphi - \frac{1}{3\cdot 3\cdot 5}\varphi^3 - \frac{2}{3\cdot 3\cdot 3\cdot 5\cdot 7}\varphi^5$$
$$- \frac{1}{3\cdot 5\cdot 5\cdot 7\cdot 9}\varphi^7 - \frac{2}{3\cdot 3\cdot 3\cdot 5\cdot 7\cdot 9\cdot 11}\varphi^9$$
$$- \frac{2\cdot 17\cdot 19}{3\cdot 3\cdot 5\cdot 5\cdot 7\cdot 7\cdot 9\cdot 9\cdot 11\cdot 13}\varphi^{11} - \text{etc.}$$

Die Reihe für u ist der Quotient von 1 dividirt durch die Reihe für t. Das erste Glied ist also $\frac{1}{\varphi}$. Man setze $u = \frac{1}{\varphi} - a\varphi - b\varphi^3 - c\varphi^5 - d\varphi^7 - e\varphi^9 - f\varphi^{11} - \text{etc.}$ wo die Werthe von a, b, c, etc. andere sind, als in der Reihe für t. Man setze auch $u^2 = \frac{1}{\varphi^2} + \alpha + \beta\varphi^2 + \gamma\varphi^4 + \delta\varphi^6 + \varepsilon\varphi^8 + \zeta\varphi^{10} + \text{etc.}$ so ist

$\alpha = -2a$; $\quad \beta = -2b + a^2$
$\gamma = -2c + 2ab$; $\quad \delta = -2d + 2ac + bb$
$\varepsilon = -2e + 2ad + 2bc$;
$\zeta = -2f + 2ae + 2bd + cc$.
etc.

Da $u = \frac{1}{t}$, so ist $du = -\frac{dt}{t^2} = -(1+u^2)\,d\varphi$, weil $d\varphi = \frac{dt}{1+t^2}$; also entsteht für du die Reihe

$$du = -\frac{d\varphi}{\varphi^2} - (1+\alpha)\,d\varphi - \beta\varphi^2 d\varphi - \gamma\varphi^4 d\varphi$$
$$- \text{etc.}$$

und daher

$$u = \frac{r}{\varphi} - (1+\alpha)\varphi - \tfrac{1}{3}\beta\varphi^3 - \tfrac{1}{5}\gamma\varphi^5 - \tfrac{1}{7}\delta\varphi^7 - \text{etc.}$$

Die Vergleichung dieser Reihe mit der angenommenen giebt

$$\begin{aligned}
a &= 1+\alpha = 1-2a\\
3b &= \beta = -2b+aa\\
5c &= \gamma = -2c+2ab\\
7d &= \delta = -2d+2ac+bb\\
9e &= \varepsilon = -2e+2ad+2bc\\
&\text{etc.}
\end{aligned}$$

Das ist

$$\begin{aligned}
3a &= 1; & 5b &= aa\\
7c &= 2ab; & 9d &= 2ac+bb\\
11e &= 2ad+2bc; & 13f &= 2ae+2bd+cc\\
15g &= 2af+2be+2cd;\\
17h &= 2ag+2bf+2ce+dd;\\
&\text{etc.}
\end{aligned}$$

Das Gesetz der Formation der Coefficienten für die Cotangente ist dasselbe, wie für die Coefficienten in der Reihe für die Tangente, außer daß die Divisoren andere sind.

16. Die Bernoulliſchen Zahlen seyn A, B, C, D, etc. diejenigen, welche in dem Artikel, Bernoull. Zahlen, durch A, B, C, D, etc. bezeichnet sind. Die Vertauschung der Buchstabenzeichen geschieht, um Verwechslung mit den Coefficienten in der Reihe für sin φ zu verhüten. Es ist daselbst (7.) gefunden

$$\cot\tfrac{1}{2}\varphi = \frac{2}{\varphi} - \frac{2\mathfrak{A}}{1\cdot 2}\varphi - \frac{2\mathfrak{B}}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}\varphi^3$$
$$- \frac{2\mathfrak{C}}{1\cdot 2\ldots 6}\varphi^5 - \frac{2\mathfrak{D}}{1\cdot 2\ldots 8}\varphi^7 - \frac{2\mathfrak{E}}{1\cdot 2\ldots 10}\varphi^9$$

Setzt man hier 2φ für φ, so ist

$$\cot\varphi = \frac{1}{\varphi} - \frac{4\mathfrak{A}}{1.2}\varphi - \frac{4^2.\mathfrak{B}}{1.2.3.4}\varphi^3$$

$$- \frac{4^6.\mathfrak{C}}{1..6}\varphi^5 - \frac{4^4.\mathfrak{D}}{1..8}\varphi^7 - \frac{4^5.\mathfrak{E}}{1..10}\varphi^9$$

- etc.

17. Da $\tang\varphi = \cot\varphi - 2\cot 2\varphi$, (Goniomet
e, 4.) und $2\cot 2\varphi = \frac{1}{\varphi} - \frac{4^2.\mathfrak{A}}{1.2}\varphi - \frac{4^4.\mathfrak{B}}{1..4}\varphi^3$

$- \frac{4^6.\mathfrak{C}}{1..6}\varphi^5$ — etc. ist, so wird durch die Subtrac
on dieser Reihe von jener erhalten,

$$\text{ng}\,\varphi = \frac{4(4-1)\mathfrak{A}}{1..2}\varphi + \frac{4^2(4^2-1)\mathfrak{B}}{1..4}\varphi^3$$

$$\frac{4^3(4^3-1)\mathfrak{C}}{1..6}\varphi^5 + \frac{4^4(4^4-1)\mathfrak{D}}{1..8}\varphi^7 + \text{etc.}$$

18. Da die Formation der Coefficienten in den eihen für tang φ und cot φ einfacher ist, als die For- ation der Bernoullischen Zahlen, (a. a O 9.), so nnte man eher diese aus jenen, als jene aus diesen zu mmensetzen. Der Zusammenhang zwischen jenen Coef- ienten und denen des niedrigsten Gliedes in den Sum- en der geraden Potenzen ganzer Zahlen ist sehr merk- ürdig.

19. Die Coefficienten in der Reihe für die Tangente ben insbesondere eine nähere Beziehung auf die Aggre- te der ungeraden Potenzen der natürlichen Zahlen mit wechselnden Vorzeichen (Potenz IV.). Diese Aggregate n, absolut genommen, ohne Rücksicht auf ihre wechseln- n Vorzeichen, P, Q, R, S, T, etc. nämlich P für e ersten, Q für die zweyten, R für die dritten Poten- n, u. s. f., so ist

$= \frac{4-1}{2}\mathfrak{A}$; $Q = \frac{4^2-1}{4}\mathfrak{B}$; $R = \frac{4^3-1}{6}\mathfrak{C}$;

$= \frac{4^4-1}{8}\mathfrak{D}$; $T = \frac{4^5-1}{10}\mathfrak{E}$; etc.

(a. a. O. 11; von der Änderung der Symbole iſt der Grund die Verhütung einer Verwechslung mit den hier gebrauchten). Alſo iſt

$$\text{tang}\,\varphi = 4P\varphi + \frac{4^3}{1.2.3}Q\varphi^5 + \frac{4^5}{1\ldots5}R\varphi^6 + \frac{4^4}{1..7}S\varphi^7 + \frac{4^5}{1..9}T\varphi^9 + \text{etc.}$$

Die Relationen der Größen α, β, γ, δ, etc. (a. a. O. 9), welche jene Aggregate von Potenzen, durch die Produkte der natürlichen Zahlen, 1; 1.2; 1.2.3; etc. dividirt ſind, und die Relationen der Coefficienten in der Reihe für die Tangente, a, b, c, etc. ſind einander ganz ähnlich. Nur iſt $\alpha = \frac{1}{4}$, und $a = 1$. Setzt man $a = 4\alpha$; $b = 4^2\beta$; $c = 4^3\gamma$; $d = 4^4\delta$; u. ſ. f. ſo entſtehen aus den Relationen zwiſchen a, b, c, etc. die zwiſchen α, β, γ, etc. a. a. O.

20. Die Gleichung $0 = \varphi + \frac{1}{3}\varphi^3 + \frac{2}{3.5}\varphi^5$ + etc. aus (14.) hat gar keine mögliche Wurzel auſſer $\varphi = 0$. Denn der Werth derſelben, der die Tangente, t, iſt, nimmt zu, ſo wie φ zunimmt, mit einem beſtandig gröſſern Verhältniſſe der Zunahmen, und wird nicht negativ, obgleich für $\varphi > \frac{1}{2}\pi$ die Tangente negativ iſt. Man kann auf ſie das nicht anwenden, was von den Gleichungen gilt, die aus den Werthen der Sinus und Coſinus, wenn dieſe $= 0$ ſind, entſtehen. Wenn eine Gleichung lauter mögliche Wurzeln haben ſoll, ſo müſſen ihre Werthe von 0 an bis zu einer gewiſſen endlichen Größe, abſolut genommen (ohne Rückſicht auf ihre poſitive oder negative Beſchaffenheit), zunehmen, dann wieder abnehmen, null werden, wieder zunehmen, und jenen entgegengeſetzt werden, ſo oftmahl als viele Wurzeln vorhanden ſind.

21. Es ist $\operatorname{cosec}\varphi = \frac{1}{\varphi} + \frac{2(2-1)\mathfrak{A}}{1\cdot 2}\varphi + \frac{2(2^3-1)\mathfrak{B}}{1\cdot\cdot 4}\varphi^3 + \frac{2(2^5-1)\mathfrak{C}}{1\cdot\cdot 6}\varphi^5 + \frac{2(2^7-1)\mathfrak{D}}{1\cdot\cdot 8}\varphi^7 + \text{etc.}$

Diese Formel folgt aus der Gleichung $\operatorname{cosec}\varphi = \operatorname{tang}\frac{1}{2}\varphi + \cot\varphi$. (Goniometrie, 44.)

22. Es ist $\sec\varphi = 1 + \frac{1}{1\cdot 2}\varphi^2 + \frac{5}{1.2.3.4}\varphi^4 + \frac{61}{1\cdot 2\cdot\cdot 6}\varphi^6 + \frac{277\cdot 5}{1\cdot 2\cdot\cdot 8}\varphi^8 + \frac{2659\cdot 19}{1\cdot 2\cdot\cdot 10}\varphi^{10} + \text{etc.}$

Denn es ist $\sec\varphi = \frac{1}{\cos\varphi}$. Man setze $\cos\varphi = 1 - a\varphi^2 + b\varphi^4 - c\varphi^6 + d\varphi^8 - \text{etc.}$ und $\sec\varphi = 1 + \alpha\varphi^2 + \beta\varphi^4 + \gamma\varphi^6 + \delta\varphi^8 + \text{etc.}$ so ist das Product beider Reihen $= 1$. Daraus ergeben sich folgende Gleichungen

$\alpha = a$
$\beta = a\alpha - b$
$\gamma = a\beta - b\alpha + c$
$\delta = a\gamma - b\beta + c\alpha - d$
$\varepsilon = a\delta - b\gamma + c\beta - d\alpha + e$
etc.

wo $a = \frac{1}{1\cdot 2}$; $b = \frac{a}{3\cdot 4}$; $c = \frac{b}{5\cdot 6}$, etc. ist.

Oder die Coefficienten α, β, γ, etc. machen eine rücklaufende Reihe aus, deren Scale der Relation ist $\frac{1}{1\cdot 2}$;

$-\frac{1}{1.2.3.4}$; $+\frac{1}{1\cdot\cdot 6}$; $-\frac{1}{1\cdot\cdot 8}$; $+$ etc.

23. Es ist log. nat. sin $\varphi = \log\varphi - \frac{4\mathfrak{A}}{1.2}\cdot\frac{1}{2}\varphi^2$

$- \frac{4^2\mathfrak{B}}{1..4}\cdot\frac{1}{4}\varphi^4 - \frac{4^3\mathfrak{C}}{1..6}\cdot\frac{1}{6}\varphi^6 - \frac{4^4\mathfrak{D}}{1..8}\cdot\frac{1}{8}\varphi^8$

$- \frac{4^5\mathfrak{E}}{1..10}\cdot\frac{1}{10}\varphi^{10} - \text{etc.}$

Denn es sey $y = \sin\varphi$, so ist $d\log.\text{nat.}\, y = \frac{dy}{y}$. Es ist aber $dy = \cos\varphi\, d\varphi$, also $d\log. y = \cot\varphi. d\varphi$. Daher ist es nur nöthig, die Reihe für $\cot\varphi$ in (16.) mit $d\varphi$ zu multipliciren, und dann das Product zu integriren. Die Reihe für $\cot\varphi$ ist nämlich der Differentialquotient, $\frac{d\log y}{d\varphi}$, durch eine Function von φ ausgedruckt.

24. Es ist log. nat. cos. $\varphi = -\frac{4(4-1)\mathfrak{A}}{1\ .\ 2}\cdot\frac{1}{2}\varphi^2$

$- \frac{4^2\ 4^2-1)\mathfrak{B}}{1\ .\ .\ 4}\cdot\frac{1}{4}\varphi^4 - \frac{4^3(4^3-1)\mathfrak{C}}{1\ .\ .\ .\ 6}\cdot\frac{1}{6}\varphi^6$

$- \frac{4^4(4^4-1)\mathfrak{D}}{1\ .\ .\ 8}\cdot\frac{1}{8}\varphi^8 - \text{etc.}$

Denn es sey $x = \cos\varphi$, so ist $d\log\text{nat}\ x = \frac{dx}{x} = -\frac{\sin\varphi\, d\varphi}{\cos\varphi} = -\text{tang}\,\varphi. d\varphi$. Die Reihe für tang φ in (17.) giebt als Differentialquotient den Logarithmen von $\cos\varphi$.

25. Es ist log. nat. tang. $\varphi = \log\varphi$

$+ \frac{2^3(2-1)\mathfrak{A}}{1.2}\cdot\frac{1}{2}\varphi^2 + \frac{2^5(2^3-1)\mathfrak{B}}{1\ .\ .\ .\ 4}\cdot\frac{1}{4}\varphi^4$

$+ \frac{2^7(2^5-1)\mathfrak{C}}{1\ .\ .\ 6}\cdot\frac{1}{6}\varphi^6 + \frac{2^9(2^7-1)\mathfrak{D}}{1\ .\ .\ 8}\cdot\frac{1}{8}\varphi^8$

$+ \text{etc.}$

Denn da tang $\varphi = \frac{\sin\varphi}{\cos\varphi}$ ist, so ist log. tang φ = log. sin φ — log. cos φ.

26. Die in (5.) für sin φ gefundene Reihe, $\varphi - \frac{1}{6}\varphi^3 + \frac{1}{120}\varphi^5 -$ etc. oder $\varphi(1 - \frac{1}{6}\varphi^4 + \frac{1}{120}\varphi^4 -$ etc.) wird Null, wenn für φ entweder o oder ein Vielfaches von $\pm\pi$ gesetzt wird, durch jene Annahme der nitheilige Factor φ, durch die andere der infinitinomische Factor. Erhält der Bogen irgend einen andern durch φ bezeichneten Werth, so ist der Werth des infinitimonischen Factors

$$= (1 - \frac{\varphi}{\pi})(1 + \frac{\varphi}{\pi})(1 - \frac{\varphi}{2\pi})(1 + \frac{\varphi}{2\pi}) \text{ etc.}$$

wo der Quotient $\frac{\varphi}{\pi}$ alle ganze Zahlen nach der Reihe zum Divisor erhält, und sowohl additiv als subtractiv zu nehmen ist. (Gleichung. X. 4.)

Die Reihe für den cos φ, nämlich $1 - \frac{1}{2}\varphi^2 + \frac{1}{24}\varphi^4 - \frac{1}{720}\varphi^6 +$ etc. wird Null, wenn φ ein ungerades Vielfaches von $\pm\frac{1}{2}\pi$ ist. Daher ist der Werth dieser Reihe $= (1 - \frac{2\varphi}{\pi})(1 + \frac{2\varphi}{\pi})(1 - \frac{2\varphi}{3\pi})$

$(1 + \frac{2\varphi}{3\pi})(1 - \frac{2\varphi}{5\pi})(1 + \frac{2\varphi}{5\pi})$. etc. wo der Quotient $\frac{2\varphi}{\pi}$ alle ungerade Zahlen nach der Reihe zu Divisoren erhält, und mit beiderley Vorzeichen zu nehmen ist.

27. Es verhalte sich φ zum Quadranten oder zum rechten Winkel wie m:n, so daß $\varphi = \frac{m\pi}{2n}$, und es ist

23. Es ist log. nat. sin $\varphi = \log\varphi - \frac{4\mathfrak{A}}{1.2}\cdot\frac{1}{2}\varphi^2$

$- \frac{4^2\mathfrak{B}}{1..4}\cdot\frac{1}{4}\varphi^4 - \frac{4^3\mathfrak{C}}{1..6}\cdot\frac{1}{6}\varphi^6 - \frac{4^4\mathfrak{D}}{1..8}\cdot\frac{1}{8}\varphi^8$

$- \frac{4^5\mathfrak{E}}{1..10}\cdot\frac{1}{10}\varphi^{10} - \text{etc.}$

Denn es sey $y = \sin\varphi$, so ist $d\log.\text{nat.}\, y = \frac{dy}{y}$.

Es ist aber $dy = \cos\varphi\, d\varphi$, also $d\log. y = \cot\varphi. d\varphi$. Daher ist es nur nöthig, die Reihe für $\cot\varphi$ in (16.) mit $d\varphi$ zu multipliciren, und dann das Product zu integriren. Die Reihe für $\cot\varphi$ ist nämlich der Differentialquotient, $\frac{d\log y}{d\varphi}$, durch eine Function von φ ausgedruckt.

24. Es ist log. nat. cos. $\varphi = -\frac{4(4-1)\mathfrak{A}}{1.2}\cdot\frac{1}{2}\varphi^2$

$- \frac{4^2\ 4^2-1)\mathfrak{B}}{1..4}\cdot\frac{1}{4}\varphi^4 - \frac{4^3(4^3-1)\mathfrak{C}}{1...6}\cdot\frac{1}{6}\varphi^6$

$- \frac{4^4(4^4-1)\mathfrak{D}}{1..8}\cdot\frac{1}{8}\varphi^8 - \text{etc.}$

Denn es sey $x = \cos\varphi$, so ist $d\log\text{nat}\, x = \frac{dx}{x} = -\frac{\sin\varphi.\, d\varphi}{\cos\varphi} = -\text{tang}\,\varphi.\, d\varphi$. Die Reihe für tang φ ist (17.) giebt als Differentialquotient den Logarithmen von $\cos\varphi$.

25. Es ist log. nat. tang. $\varphi = \log\varphi$

$+ \frac{2^3(2-1)\mathfrak{A}}{1.2}\cdot\frac{1}{2}\varphi^2 + \frac{2^5(2^3-1)\mathfrak{B}}{1....4}\cdot\frac{1}{4}\varphi^4$

$+ \frac{2^7(2^5-1)\mathfrak{C}}{1..6}\cdot\frac{1}{6}\varphi^6 + \frac{2^9(2^7-1)\mathfrak{D}}{1..8}\cdot\frac{1}{8}\varphi^8$

$+ \text{etc.}$

Denn da tang $\varphi = \frac{\sin\varphi}{\cos\varphi}$ ist, so ist log. tang φ log. sin φ — log. cos φ.

26. Die in (5.) für sin φ gefundene Reihe, . . $-\frac{1}{6}\varphi^3 + \frac{1}{120}\varphi^5$ — etc. oder $\varphi(1 - \frac{1}{6}\varphi^4 + \frac{1}{120}\varphi^4$ etc.) wird Null, wenn für φ entweder o oder ein lfaches von $\pm\pi$ gesetzt wird, durch jene Annahme der heilige Factor φ, durch die andere der infinitinomische tor. Erhält der Bogen irgend einen andern durch φ ichneten Werth, so ist der Werth des infinitimonischen tors

$$(1 - \frac{\varphi}{\pi})\ (1 + \frac{\varphi}{\pi})\ (1 - \frac{\varphi}{2\pi})\ (1 + \frac{\varphi}{2\pi}).\ \text{etc.}$$

der Quotient $\frac{\varphi}{\pi}$ alle ganze Zahlen nach der Reihe 1 Divisor erhält, und sowohl additiv als subtractiv zu men ist. (Gleichung. X. 4.)

Die Reihe für den cos φ, nämlich $1 - \frac{1}{2}\varphi^2$ $\frac{1}{24}\varphi^4 - \frac{1}{720}\varphi^6 +$ etc. wird Null, wenn φ ein unges es Vielfaches von $\pm\frac{1}{2}\pi$ ist. Daher ist der Werth die- Reihe $= (1 - \frac{2\varphi}{\pi})\ (1 + \frac{2\varphi}{\pi})\ (1 - \frac{2\varphi}{3\pi})$

$1 + \frac{2\varphi}{3\pi})\ (1 - \frac{2\varphi}{5\pi})\ (1 + \frac{2\varphi}{5\pi})$. etc. wo der otient $\frac{2\varphi}{\pi}$ alle ungerade Zahlen nach der Reihe zu bisoren erhält, und mit beiderley Vorzeichen zu neh- 1 ist.

27. Es verhalte sich φ zum Quadranten oder zum ten Winkel wie m:n, so daß $\varphi = \frac{m\pi}{2n}$, und ist

$$1 + \frac{1}{9^3} + \frac{1}{25^3} + \text{etc.} =$$

u. s. f. wo A, B, C, etc. die
deuten. Bezeichnet man die
E, D, etc. so ist

$$\log. \text{nat. } \pi = \log 4 - \tfrac{1}{1}(A -$$
$$- \tfrac{1}{3}(C -$$

Die Werthe der Summen A, B
jede bis auf die 23ste Decimal
geliefert a. a. O. § 190. Di
die Bernoullischen Zahlen hat
nicht gebraucht.

38. Da π auch auf folg
kann, $\pi = 2 \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{16}{15} \cdot \frac{36}{35} \cdot \frac{64}{63} \cdot$
$- \log(1 - \frac{1}{4}) - \log(1 - \frac{1}{1}$
Daher ist

$$\log. \text{nat. } \pi = \log 2$$
$$+ \frac{1}{1}\left(\frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \frac{1}{36} \cdot\right.$$
$$+ \frac{1}{2}\left(\frac{1}{4^2} + \frac{1}{16^2} + \frac{1}{36}\right.$$

$$\frac{1}{4}+\frac{1}{16}+\frac{1}{36}+\text{etc.}=\frac{A}{1\cdot 2}\cdot\frac{\pi^2}{2}$$

$$\frac{1}{4^2}+\frac{1}{16^2}+\frac{1}{36^2}+\text{etc.}=\frac{B}{1\ldots 4}\cdot\frac{\pi^4}{2}$$

$$\frac{1}{4^3}+\frac{1}{16^3}+\frac{1}{36^3}+\text{etc.}=\frac{C}{1\ldots 6}\cdot\frac{\pi^6}{2}$$

etc.

zeichnet man diese Summen durch α, β, γ, etc. so ist

log. nat. $\pi = \log 2 + \alpha + \frac{1}{2}\beta + \frac{1}{3}\gamma + \frac{1}{4}\delta + \text{etc.}$

ler hat die Summen α, β, γ, etc. auf gleiche Art, die Summen, A, B, C, etc. berechnet. a. a. O. 193. Diese zweyte Formel für log π hat er nicht in entwickelten Gestalt beygebracht. Sie erfordert mehr chnung als die erste, weil log 2 von log π mehr unter- eben ist als log 4. Da $-\log(1-\frac{1}{4}) = \frac{1}{4}+\frac{1}{2\cdot 4^2}$

$\frac{1}{3\cdot 4^3}+\frac{1}{4\cdot 4^4}+$ etc. und $\log 2 - l(1-\frac{1}{4})$

$\log 2 + l\frac{4}{3} = \log 8 - \log 3$, so ist

; nat. $\pi = \log 8 - \log 3 + \frac{1}{2}(\alpha-\frac{1}{4})+\frac{1}{3}(\beta-\frac{1}{16})$

$\frac{1}{4}(\gamma-\frac{1}{4^3})+\frac{1}{5}(\delta-\frac{1}{4^4})+\text{etc.}$

ese Formel giebt den Werth des Logarithmen leich- Es ist log 8 — log 3 näher an log π als log 4. rauf nicht gesehen, ist es doch gut zu wissen, wie ; nat. π sowohl durch die reciproken geraden Po- jen der geraden Zahlen als die der ungeraden aus- ruckt wird.

34. Die Logarithmen der Sinus und Cosinus lassen ebenfalls aus den Formeln in (27.), die sie als Pro- te darstellen, herleiten. Nimmt man daselbst je 9 Factoren nach dem ersten zusammen, so ist

In dem Artikel, Potenz V, 9. wird gezeigt, daß die Summen der reciproken geraden Potenzen der ungeraden Zahlen,

$$1+\frac{1}{9}+\frac{1}{25}+\text{etc.}=\frac{(4-1)\mathfrak{A}}{1\cdot 2}\cdot\frac{\pi^2}{2}$$

$$1+\frac{1}{9^2}+\frac{1}{25^2}+\text{etc.}=\frac{(4^2-1)\mathfrak{B}}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}\cdot\frac{\pi^4}{2}$$

$$1+\frac{1}{9^3}+\frac{1}{25^3}+\text{etc.}=\frac{(4^3-1)\mathfrak{C}}{1\cdot\cdot 6}\cdot\frac{\pi^6}{2}$$

u. s. f. wo $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, etc. die Bernoullischen Zahlen bedeuten. Bezeichnet man diese Summen durch A, B, C, D, etc. so ist

$$\log.\text{nat.}\,\pi=\log 4-\tfrac{1}{2}(A-1)-\tfrac{1}{3}(B-1)$$
$$-\tfrac{1}{3}(C-1)-\tfrac{1}{4}(D-1)-\text{etc.}$$

Die Werthe der Summen A, B, C, etc bis zur 22sten, jede bis auf die 23ste Decimalstelle berechnet, hat Euler geliefert a. a. O. § 190. Die Ausdrücke derselben durch die Bernoullischen Zahlen hat er in diesem Werke noch nicht gebraucht.

38. Da π auch auf folgende Art dargestellt werden kann, $\pi=2\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{16}{15}\cdot\frac{36}{35}\cdot\frac{64}{63}\cdot$ etc. so ist $\log\pi=\log 2-\log(1-\frac{1}{4})-\log(1-\frac{1}{16})-\log(1-\frac{1}{36})-\log(1-\frac{1}{64})-$ etc. Daher ist

$$\log.\text{nat.}\,\pi=\log 2$$
$$+\frac{1}{1}\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{16}+\frac{1}{36}+\frac{1}{64}+\text{etc.}\right)$$
$$+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{4^2}+\frac{1}{16^2}+\frac{1}{36^2}+\frac{1}{64^2}+\text{etc.}\right)$$
$$+\frac{1}{3}\left(\frac{1}{4^3}+\frac{1}{16^3}+\frac{1}{36^3}+\frac{1}{64^3}+\text{etc.}\right.$$
$$+\text{etc.}$$

In dem Artikel, Potenz V. 10 wird gezeigt, daß die Summen der reciproken geraden Potenzen der geraden Zahlen,

$$\frac{1}{4}+\frac{1}{16}+\frac{1}{36}+\text{etc.}=\frac{A}{1\cdot 2}\cdot\frac{\pi^2}{2}$$

$$\frac{1}{4^2}+\frac{1}{16^2}+\frac{1}{36^2}+\text{etc.}=\frac{B}{1\cdot 4}\cdot\frac{\pi^4}{2}$$

$$\frac{1}{4^3}+\frac{1}{16^3}+\frac{1}{36^3}+\text{etc.}=\frac{C}{1\cdot 6}\cdot\frac{\pi^6}{2}$$

etc.

Bezeichnet man dieſe Summen durch α, β, γ, etc. ſo iſt

$$\text{log. nat. } \pi = \log 2+\alpha+\tfrac{1}{2}\beta+\tfrac{1}{3}\gamma+\tfrac{1}{4}\delta+\text{etc.}$$

Euler hat die Summen α, β, γ, etc. auf gleiche Art, wie die Summen, A, B, C, etc. berechnet. a. a. O. §. 193. Dieſe zweyte Formel für $\log \pi$ hat er nicht in der entwickelten Geſtalt beygebracht. Sie erfordert mehr Rechnung als die erſte, weil log 2 von log π mehr unterſchieden iſt als log 4. Da $-\log(1-\frac{1}{4})=\frac{1}{4}+\frac{1}{2\cdot 4^2}+\frac{1}{3\cdot 4^3}+\frac{1}{4\cdot 4^4}+$ etc. und $\log 2-1(1-\frac{1}{4})=\log 2+1\frac{1}{3}=\log 8-\log 3$, ſo iſt

$$\text{log. nat. } \pi=\log 8-\log 3+\tfrac{1}{2}(\alpha-\tfrac{1}{4})+\tfrac{1}{3}(\beta-\tfrac{1}{16})+\tfrac{1}{3}(\gamma-\tfrac{1}{4^3})+\tfrac{1}{4}(\delta-\tfrac{1}{4^4})+\text{etc.}$$

Dieſe Formel giebt den Werth des Logarithmen leichter. Es iſt log 8 — log 3 näher an log π als log 4. Darauf nicht geſehen, iſt es doch gut zu wiſſen, wie log. nat. π ſowohl durch die reciproken geraden Potenzen der geraden Zahlen als die der ungeraden ausgedruckt wird.

34. Die Logarithmen der Sinus und Coſinus laſſen ſich ebenfalls aus den Formeln in (27.), die ſie als Producte darſtellen, herleiten. Nimmt man daſelbſt je zwey Factoren nach dem erſten zuſammen, ſo iſt

$$\log.\text{nat.}\sin\frac{m\pi}{2n} = \log\frac{m\pi}{2n} + \log\left(1-\frac{mm}{4nn}\right)$$

$$+\log\left(1-\frac{mm}{16nn}\right)+\text{l.}\left(1-\frac{mm}{36nn}\right)+\text{etc.}$$

und

$$\log.\text{nat.}\cos\frac{m\pi}{2n} = \log\left(1-\frac{mm}{nn}\right)+\log\left(1-\frac{mm}{9nn}\right)$$

$$+\log\left(1-\frac{mm}{25nn}\right)+\text{etc.}$$

35. Man entwickele die logarithmischen Größen nach der in (32.) für $\log(1-x)$ angeführten Formel, ordne sie nach den Potenzen von $\frac{m}{n}$, und setze für die Summen der reciproken Potenzen die vorhin dafür angenommenen Bezeichnungen, A, B, C, D, etc. und α, β, γ, δ, etc. so ist

$$\log.\text{nat.}\sin\frac{m\pi}{2n} = \log\frac{m\pi}{2n} - \alpha\cdot\frac{m^2}{n^2}$$

$$-\tfrac{1}{2}\beta\cdot\frac{m^4}{n^4} - \tfrac{1}{3}\gamma\cdot\frac{m^6}{n^6} - \tfrac{1}{4}\delta\cdot\frac{m^8}{n^8} - \text{etc.}$$

$$\log.\text{nat.}\cos\frac{m\pi}{2n} = -\text{A}\cdot\frac{m^2}{n^2} - \tfrac{1}{2}\text{B}\cdot\frac{m^4}{n^4}$$

$$-\tfrac{1}{3}\text{C}\cdot\frac{m^6}{n^6} - \tfrac{1}{4}\text{D}\cdot\frac{m^8}{n^8} - \text{etc.}$$

Setzt man hier für α, β, γ, etc. und A, B, C, etc. ihre Werthe durch die Bernoull.schen Zahlen ausgedrückt, und φ für $\frac{m\pi}{2n}$, so erhält man die in (23. u. 24.) gefundenen Formeln.

36. Um die Coefficienten von $\frac{m^2}{n^2}$, besonders in der Formel für den Logarithmen des Cosinus, kleiner zu machen, hat Euler die Logarithmen von $1 - \frac{mm}{4nn}$, und von $1 - \frac{mm}{nn}$ nicht entwickelt. Da

$$\log\left(1 - \frac{mm}{4nn}\right) = -\frac{mm}{4nn} - \frac{m^4}{2.4^2 n^4} - \frac{m^6}{3.4^3 n^6} - \frac{m^8}{4.4^4 n^8} - \text{etc.}$$

so ist

$$\log.\text{nat.}\sin\frac{m\pi}{2n} = \log\frac{m\pi}{2n} + \log\left(1 - \frac{mm}{4nn}\right) - \left(\alpha - \frac{1}{4}\right)\frac{m^2}{n^2} - \frac{1}{2}\left(\beta - \frac{1}{4^2}\right)\frac{m^4}{n^4} - \frac{1}{3}\left(\gamma - \frac{1}{4^3}\right)\frac{m^6}{n^6} - \frac{1}{4}\left(\delta - \frac{1}{4^4}\right)\frac{m^8}{n^8} - \text{etc.}$$

37. Desgleichen, da $\log\left(1 - \frac{mm}{nn}\right) = -\frac{m^2}{n^2} - \frac{m^4}{2n^4} - \frac{m^6}{3n^6} - \text{etc.}$ so ist

$$\log.\text{nat.}\cos\frac{m\pi}{2n} = \log\left(1 - \frac{mm}{nn}\right) - (A-1)\frac{m^2}{n^2} - \frac{1}{2}(B-1)\frac{m^4}{n^4} - \frac{1}{3}(C-1)\frac{m^6}{n^6} - \text{etc.}$$

38. Auf gleiche Weise verfährt Euler mit den Coefficienten in der Reihe für die Tangente und Cotangente. Die Art, wie er diese Reihen findet, ist eine ganz andere, als die in diesem Artikel vorgetragene. Das Resultat seiner Rechnung ergiebt sich aus den Formeln in (17, 18) folgendergestalt.

In der Formel (17.) für tang φ führe man statt der Bernoulliſchen Zahlen die Summen der geraden reciproken Potenzen der ungeraden Zahlen ein, welche durch A, B, C, D, etc. bezeichnet ſind. So iſt

$$\text{tang } \varphi = \frac{4}{\pi} A \cdot \frac{2\varphi}{\pi} + \frac{4}{\pi} B \cdot \frac{2^3\varphi^3}{\pi^3} + \frac{4}{\pi} C \cdot \frac{2^5\varphi^5}{\pi^5} + \frac{4}{\pi} D \cdot \frac{2^7\varphi^7}{\pi^7} + \text{etc.}$$

Dann ſetze man $\frac{m\pi}{2n}$ ſtatt φ, ſo iſt

$$\text{tang } \frac{m\pi}{2n} = \frac{4}{\pi} A \cdot \frac{m}{n} + \frac{4}{\pi} B \cdot \frac{m^3}{n^3} + \frac{4}{\pi} C \cdot \frac{m^5}{n^5} + \frac{4}{\pi} D \cdot \frac{m^7}{n^7} + \text{etc.}$$

Da $\frac{mn}{nn-mm} = \frac{m}{n} + \frac{m^3}{n^3} + \frac{m^5}{n^5} + \text{etc.}$

ſo addire man den Bruch, und ſubtrahire den Quotienten, beide mit $\frac{4}{\pi}$ multiplicirt, und es iſt

$$\text{tang } \frac{m\pi}{2n} = \frac{4}{\pi} \cdot \frac{mn}{nn-mm} + \frac{4}{\pi}(A-1)\frac{m}{n} + \frac{4}{\pi}(B-1)\frac{m^3}{n^3} + \frac{4}{\pi}(C-1)\frac{m^5}{n^5} + \frac{4}{\pi}(D-1)\frac{m^7}{n^7} + \text{etc.}$$

wie bey Euler §. 198.

39. In der Formel für cot φ in (16.) führe man ſtatt der Bernoulliſchen Zahlen die durch α, β, γ, etc. bezeichneten Summen der geraden reciproken Potenzen der geraden Zahlen ein, ſo iſt

$$\text{ot } \varphi = \frac{1}{\varphi} - \frac{4}{\pi}\alpha \cdot \frac{2\varphi}{\pi} - \frac{4}{\pi}\beta \cdot \frac{2^3\varphi^3}{\pi^3} - \frac{4}{\pi}\gamma \cdot \frac{2^5\varphi^5}{\pi^5}$$

$$- \frac{4}{\pi}\delta \cdot \frac{2^7\varphi^7}{\pi^7} - \text{etc.}$$

ver

$$\text{ot } \frac{m\pi}{2n} = \frac{2n}{m\pi} - \frac{4}{\pi}\alpha \cdot \frac{m}{n} - \frac{4}{\pi}\beta \cdot \frac{m^3}{n^3} - \frac{4}{\pi}\gamma \cdot \frac{m^5}{n^5}$$

$$- \frac{4}{\pi}\delta \cdot \frac{m^7}{n^7} - \text{etc.}$$

$$\text{da } \frac{mn}{4nn-mm} = \frac{m}{4n} + \frac{m^3}{4^2n^3} + \frac{m^5}{4^3n^5} + \frac{m^7}{4^4n^7}$$

$$+ \text{etc.}$$

) iſt

$$\text{ot } \frac{m\pi}{2n} = \frac{2n}{m\pi} - \frac{4mn}{\pi(4nn-mm)} - \frac{4}{\pi}\left(\alpha - \frac{1}{4}\right)\frac{m}{n}$$

$$- \frac{4}{\pi}\left(\beta - \frac{1}{4^2}\right)\frac{m^3}{n^3} - \frac{4}{\pi}\left(\gamma - \frac{1}{4^3}\right)\frac{m^5}{n^5} - \text{etc.}$$

ie bey Euler, a. a. O. §. 198.

40. Die Reihe für die Logarithmen der Sinus und oſinus kann man noch convergenter machen, wenn man

en $\log\left(1 - \frac{mm}{16nn}\right)$, und $\log\left(1 - \frac{mm}{9nn}\right)$

nentwickelt läßt. Es iſt alsdann

$$\text{log. nat. sin } \frac{m\pi}{2n} = \log\frac{m\pi}{2n} + \log\left(1 - \frac{mm}{4nn}\right)$$

$$+ \log\left(1 - \frac{mm}{16nn}\right) - \left(\alpha - \frac{1}{4} - \frac{1}{16}\right)\frac{m^2}{n^2}$$

$$- \frac{1}{2}\left(\beta - \frac{1}{4^2} - \frac{1}{16^2}\right)\frac{m^4}{n^4} - \frac{1}{3}\left(\gamma - \frac{1}{4^3} - \frac{1}{16^3}\right)\frac{m^6}{n^6}$$

$$- \frac{1}{4}\left(\delta - \frac{1}{4^4} - \frac{1}{16^4}\right) \cdot \frac{m^8}{n^8} - \text{etc.}$$

und

$$\log.\text{nat.}\cos\frac{m\pi}{2n} = \log\left(1-\frac{mm}{nn}\right)+\log\left(1-\frac{mm}{9nn}\right)$$
$$-\left(A-1-\frac{1}{9}\right)\frac{m^2}{n^2}-\frac{1}{2}\left(B-1-\frac{1}{9^2}\right)\frac{m^4}{n^4}$$
$$-\frac{1}{3}\left(C-1-\frac{1}{9^3}\right)\frac{m^6}{n^6}-\text{etc.}$$

Cyklometrische Verhältnisse.

Es sey das Verhältniß des Durchmessers zum Umfange $=1:\pi$, so ist

$\pi = 3,\ 141592\ 653589\ 793238$
$\quad 462643\ 383279\ 502884$
$\quad 197169\ 399375\ 105820$
$\quad 974944\ 592307\ 816406$
$\quad 286208\ 998628\ 034825$
$\quad 342117\ 067982\ 148086$
$\quad 513282\ 306647\ 093844$
$\quad 609550\ 582261\ 36\ ..$

S. Cyklotechnie. Diese Zahl ist der halbe Umfang des Kreises, wenn der Halbmesser zur Einheit genommen wird.

$\frac{1}{\pi} = 0,\ 318309\ 886183\ 790671\ 53+$

berechnet von Hübsch in der Arithmet. Portensi, III. Th. 116 §.

Werthe von π, abgekürzt mit möglichster verhältnißmäßiger Genauigkeit

$$\frac{3}{1},\ \frac{22}{7},\ \frac{333}{106},\ \frac{355}{113},\ \frac{103993}{33102},\ \text{etc.}$$

Der vierte dieser Brüche ist von Metius, Landmesser in holländischen Diensten, Vater des Adrian Metius, Professors der Mathematik zu Franecker, herausgebracht. Adr. Metii Geom. pract. p. 89.

log. tab. $\pi = 0,497149\ 872694\ 133854\ 351268\ldots$

log. tab. $\frac{1}{\pi} = 9,502850\ 127305\ 866145\ 648731\ldots$

Arc. $1^\circ = 0,017453\ 292519\ 943295\ 769236\ldots$

Arc. $1' = 0,000290\ 888208\ 665721\ 596153\ldots$

Arc. $1'' = 0,000004\ 848136\ 811095\ 359935\ldots$

$\log 1^\circ = 8,241877\ 3676 - 10$

$\log 1' = 6,463726\ 1172 - 10$

$\log 1'' = 4,685574\ 8668 - 10.$

Der Bogen, welcher dem Halbmesser gleich ist, hält $7^\circ\ 17'\ 44''\ 48'''\ 22^{IV}\ 29^{V}\ 21^{VI}$ etc. oder ist in Graden und Decimaltheilen des Grades . . . . . $= 57^\circ,2957\ 79\ 5129\ldots$ In Secunden . . . . $= 206264'',806247\ldots$ Diese Zahlen werden gefunden durch die Proportion, der halbe Umfang (π) zum Halbmesser, wie 180 Grad (oder $648000''$) zu der Anzahl von Graden oder Secunden in dem Bogen, der dem Halbmesser gleich ist. Die Division durch π ist Multiplication mit $\frac{1}{\pi}$.

$$\log. \frac{180}{\pi} = 1,758122\ 6324$$

$$\log. \frac{10800}{\pi} = 3,536273\ 8827$$

$$\log. \frac{648000}{\pi} = 5,314425\ 1331$$

Diese sind die Complemente der obigen Logarithmen von 1°, $1'$, $1''$, in Theilen des Halbmessers.

Es sey r der Halbmesser eines Kreises, a ein Bogen desselben, n die Anzahl der Grade in demselben, so ist $r\pi : a = 180^\circ : n$, woraus ist $\frac{n\pi}{180} = \frac{a}{r}$.

Der Bogen, welcher durch n Grade ausgedruckt wird, sey durch den Halbmesser gemessen, $= \varphi$, so ist $\varphi = \frac{a}{r}$, also $\varphi = \frac{n\pi}{180}$.

Bedeutet n Secunden, so ist statt der Zahl 180 in diesen Formeln zu setzen, 648000.

Exempel. Die Parallaxe der Sonne sey 8″, 6, d. i. der Halbmesser der Erde (a) sey ein Bogen von 8, 6 Sec. mit dem Abstande der Erde von der Sonne als Halbmesser (r) beschrieben, so ist $\frac{648000}{8,6\pi} = \frac{r}{a}$.

Da $\frac{648000}{\pi} = 206264,8$ ist, so ist $\frac{r}{a} = 23984$, aber der Abstand der Erde von der Sonne beträgt 23984 Halbmesser der Erde.

Das Quadrat des Durchmessers verhält sich zu der Kreisfläche wie 1 zu 0,785398 163397 . . In abgekürzten, verhältnißmäßig möglichst genauen rationalen Brüchen, ist $\frac{\text{area circ}}{\text{quadr. diam}} = \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \frac{7}{9}, \frac{11}{14}, \frac{178}{226}, \frac{333}{424}$ etc.

Es ist log. 0,7853 . . = 9,8950898814.

Der Würfel des Durchmessers verhält sich zu dem Inhalt der Kugel wie 1 zu $\frac{1}{6}\pi$, das ist, wie . . . 1 : 0,523598 775598. In abgekürzten Ausdrücken ist möglichst nahe

$\frac{\text{Sphaera}}{\text{cub. diam}} = \frac{1}{2}, \frac{11}{21}, \frac{111}{212}, \frac{128}{233}, \frac{233}{445}, \frac{333}{636}$ etc.

Es ist log. 0,5235 . . = 9,7189986 223.

Cyklotechnie ist der Inbegriff der Methoden zur numerischen Berechnung des Kreisumfanges, der Bogen aus den zugehörigen Linien, der Linien aus den Bogen, und aus einander selbst, wenn die Verhältnisse der zugehörigen Bogen gegeben sind. Sie gründet sich auf die allgemeinen Formeln der Cyklometrie und Goniometrie, welche die Relationen dieser Größen enthalten.

Archimedes war der erste, der es unternahm, den Umfang des Kreises mit seinem Durchmesser zu vergleichen. Er suchte aus der halben Seite des umgeschriebenen Sechsecks nach der Reihe die halbe Seite des Vielecks von 12, von 24, von 48, von 96 Seiten, immer so,

ıß die Zahlwerthe der Seiten größer waren, als ihre ahren irrationalen Werthe, dieſen aber doch nahe ka- en. Dadurch fand er, daß der Umfang des regulären ngeſchriebenen Vielecks von 96 Seiten zu dem Durch- eſſer ein kleineres Verhältniß habe, als 14688 zu 673½, das iſt, die erſtere Zahl iſt etwas größer, als der mfang des Vielecks, wenn der Durchmeſſer 4673½ Theile at, und iſt alſo mehr noch größer als der Umfang des reiſes für denſelben Durchmeſſer.

Ferner berechnete er aus der Seite des eingeſchriebenen Sechsecks (dem Halbmeſſer) folgweiſe die Seiten des Vielecks von 12, von 24, von 48, von 96 Seiten, im- ier ſo, daß die Zahlwerthe kleiner waren, als die eigent- chen Irrationalwerthe. Er fand, daß der Umfang des ngeſchriebenen Vielecks von 96 Seiten zu dem Durch- eſſer ein größeres Verhältniß habe, als 6336 zu 2017¼, as iſt, die erſtere Zahl iſt etwas kleiner als der Umfang es Vielecks für den Durchmeſſer von 2017¼ Theilen, nd mehr noch kleiner, als der Umfang des Kreiſes.

Nun iſt 3⅐ ein ſehr weniges größer, als der Quo- ent von 14688 durch 4673½, und 3$\frac{10}{71}$ iſt ein ſehr we- iges kleiner als der Quotient von 6336 durch 2017¼; lſo fällt der Umfang des Kreiſes, den Durchmeſſer zur inheit genommen, zwiſchen die Zahlen 3⅐ und 3$\frac{10}{71}$, eren jene etwas zu groß, dieſe etwas zu klein iſt. Die tztere kommt dem wahren Verhältniſſe etwas näher, als ie erſtere. Der Bruch $\frac{10}{71}$ iſt vom Archimedes ſo ausge- ählt, daß der Überſchuß des Quotienten von 6336 urch 2017¼ mit zwey Ziffern im Zähler und Nenner m genaueſten dadurch ausgedruckt wird. Er iſt auch, ie es hier erforderlich war, kleiner als der vollſtändige lberſchuß $\frac{11}{70}\frac{37}{70}$. — Man muß das Verhältniß 7 : 22 icht das Archimedeiſche Verhältniß, des Durchmeſſers im Umfange nennen, da er es gar nicht dafür anſetzt, ndern vielmehr zwey Verhältniſſe angiebt, zwiſchen wel- en das wahre liegt.

Die Genauigkeit, mit welcher Archimedes bey der nnäherung zu einer Irrationalgröße verfuhr, verdient

bemerkt zu werden. Bey der Berechnung des umgeschriebenen Vielecks gieng er von einem rechtwinklichten Dreyeck aus, worin Hypotenuse und die kleinere Kathete wie 2 : 1 sind; die kleinere Kathete zu der größern wie $1 : \sqrt{3}$ sich verhält. Archimedes setzt für dieses Irrationalverhältniß das rationale 153 : 265, aber mit der Bemerkung, daß die letztere Zahl den Werth der Kathete zu klein angiebt, wie es hier erforderlich war. Jene Zahlen geben das Verhältniß, $1 : \sqrt{3}$ genauer an, als je zwey andere, die kleiner sind, wie die Rechnung in dem Artikel: Aufheben der Brüche, zeigt. Wie Archimedes sie ausgesucht haben möge, ist in dem Artikel, Arithmetik, gewiesen. Es ist $153^2 = 23409$, und $265^2 = 70225$, nur um 2 kleiner, als das Dreyfache jenes Quadrats.

Bey der Berechnung des eingeschriebenen Vielecks fieng Archimedes ebenfalls mit einem rechtwinklichten Dreyecke an, dessen Seiten sich wie $2 : 1 : \sqrt{3}$ verhalten. Hier mußte aber die irrationale Seite durch eine Zahl ausgedruckt werden, die etwas größer ist, als der Irrationalwerth. Archimedes setzt für das Verhältniß $1 : \sqrt{3}$ das nahe kommende 780 : 1351. Dieses ist so genau als es seyn kann, wenn nicht größere Zahlen genommen werden. Es ist $780^2 = 608400$, und $1351^2 = 1825201$, nur um 1 größer, als das Dreyfache von jenem Quadrate.

Eine kritische Ausgabe der kleinen Schrift des Archimedes über die Kreismessung mit dem Commentar des Eutocius ist in Wallis Werken, 3ten Bd. enthalten. Eine deutsche Uebersetzung mit Erläuterungen bey Haubers Übersetzung der Archimedeischen Bücher über Kugel und Cylinder. Tübingen 1798.

Nach dem Berichte des Eutocius hat Apollonius Pergäus das Verhältniß des Umfanges eines Kreises zum Durchmesser schärfer als Archimedes angegeben. Es ist dieses in einer Schrift, Okytoboos betitelt, geschehen, die verloren gegangen, und deren Titel vermuthlich nicht einmal richtig zu uns gekommen ist. Sie mag eine Anleitung zum Rechnen mit großen Zahlen

enthalten haben. S. Käſtners geometriſche Abhandl. II. Samml. 172 S.

Man wird auf dem von Archimedes gewieſenen Wege etwas fortgegangen ſeyn. Denn Purbach im 15ten Jahrhundert ſagt, daß einige das Verhältniß des Durchmeſſers zum Umfange, wie 20000 zu 62832 ſetzten, welches in der vierten Decimalſtelle faſt richtig iſt. Aber nicht eher, als gegen das Ende des 16ten Jahrhunderts ward der Umfang des Kreiſes mit einer Schärfe berechnet, die man zu höherm Gebrauch verlangen mag. Dieſes leiſtete Vieta. Er hat den Umfang des Kreiſes für den Durchmeſſer als Einheit bis auf die zehnte Decimalſtelle richtig berechnet. Seine Methode durch eingeſchriebene Vielecke ſich dem Kreiſe zu nähern, ſteht in der Sammlung ſeiner Werke, die Schooten beſorgt hat, in der Abtheilung: Variorum de reb. mathem. responsorum L. VIII. c. 18. Die ganze Rechnung iſt in einer andern Sammlung einiger Werke von ihm enthalten, die den Titel hat: Fran: Vietaei varia opera mathematica, in quibus tractatur Canon mathematicus, seu ad triangula, item Canonion triangulorum laterum rationalium, una cum universalium inspectionum ad canonem mathematicum libro singulari. Parisiis, 1609, groß folio. Dieſe Ausgabe, welche ich beſitze, iſt ohne Zweifel ganz die ältere von 1579, nur mit einem neuen Titel verſehen. Die ältere iſt nach Montucla (Hist. des Mathém. Tom. I. p. 610), und Hutton in der Einleitung zu ſeiner Ausgabe von Sherwins Tafeln äuſſerſt ſelten. Vieta hat wegen des fehlerhaften Drucks ſo viele Exemplare, als er erhalten konnte, wieder an ſich gebracht, und dann vermuthlich vernichtet. Der Canon mathematicus iſt eine Tafel der Sinus, Tangenten und Secanten, für einen Radius von 100000 Theilen, bey einigen mit Bruchtheilen begleitet. Die universales inspectiones ſind eine ebene und ſphäriſche Trigonometrie, in tabellariſcher Form, mit einigen Anwendungen auf geometriſche Aufgaben. Unter dieſen kommt die Kreisrechnung vor.

Die Tafeln, worin die Rechnungen enthalten ſind, ha-

ben die Aufschriften: demonstratio limitum analogiae perimetri circuli ad diametrum; particularis methodus, qua comparata fuerunt quadrata faecundorum (tangentium); quadrata sinuum minora majoravе veris. Vieta berechnet die Seiten eines eingeschriebenen und umgeschriebenen Vielecks von 393216 ($=6\times 2^{16}$) Seiten. Zuerst suchte er die Quadrate der Sinus der halben Centriwinkel. Nämlich es ist $\frac{1}{2}(1-\cos A) = \sin\frac{1}{2}A^2$ (Goniometrie, 36). Ist nun der Sinus eines Winkels bekannt, so wird auch dessen Cosinus gefunden, daraus das Quadrat des Sinus des halben Winkels, und dann das Quadrat des Cosinus dieses Winkels, welcher zu dem Quadrate des Sinus des vierten Theils verhilft. Auf dieselbe Art wird das Quadrat des Sinus des achten Theils und der folgenden halbirten Theile gefunden. Aus den Quadraten der Sinus und Cosinus ergiebt sich das Quadrat der Tangente. Die Quadrate der Cotangenten werden von ihm mittelst des Satzes: . . $2\operatorname{cosec} A^2 + 2\cot A^2 - \operatorname{tang}\frac{1}{2}A^2 = \cot\frac{1}{2}A^2$ (Goniometrie, 44.) gefunden, wenn nur die Cotangente und Cosecante des ersten in der Reihe der Winkel bekannt sind, wie sie es sind, wenn der erste Winkel 30 Gr. hält. Es wird hieraus das Quadrat der Cotangente des folgenden Winkels, 15 Gr. gefunden; dazu das Quadrat des Halbmessers addirt, giebt das Quadrat der Cosecante von 15 Gr. Auf diese Weise wird die Rechnung bis zu der angenommenen Gränze der Halbtheilung fortgesetzt In allen diesen Berechnungen sind zwey an den wahren Werth angränzende Zahlen, eine größer, die andere kleiner, gefunden. Der Durchmesser des Kreises verhält sich zu der Seite des letzten eingeschriebenen Vielecks wie die Cosecante des halben Centriwinkels zum Radius. Dieses giebt den Umfang des Vielecks, also die kleinere Gränze des Umfanges. Der Halbmesser des Kreises verhält sich zu der halben Seite des umgeschriebenen Vielecks wie die Cotangente des halben Centriwinkels zum Radius. Daraus wird der Umfang des umgeschriebenen Vielecks erhalten, die größere Gränze des Umfanges des Kreises.

Vieta fand auch einen Ausdruck für die Fläche des Kreises durch ein Product von einer unendlichen Anzahl Factoren. Wegen einer Erinnerung, die ich bey seiner Formel zu machen finde, kann ich sie erst in dem Artikel, Goniometrie, am Ende anführen.

Adrianus Romanus (Adriaen van Romen) aus Löwen gebürtig (gest. 1616) hat, nach der Anzeige von Montucla, den Umfang bis auf 17 Decimalstellen berechnet; wo er dieses gethan habe, giebt M. nicht an.

Ludolph von Ceulen oder van Collen, aus Hildesheim gebürtig, hat sich die ungeheure Mühe gegeben, durch Berechnung der umgeschriebenen und eingeschriebenen Vielecke den Umkreis bis zur 32sten Decimalstelle zu bestimmen. In der Schrift de circulo et adscriptis, welche einer Sammlung von arithmetischen und geometrischen Abhandlungen desselben Verfassers unter eben diesem, auf alle nicht passenden Titel, in der lateinischen aus dem holländischen gemachten Übersetzung von Snellius, Lugd. Bat. 1619, beygefügt ist, trägt van Ceulen sein ganzes Verfahren vor. Er erzählt, daß er im September 1586 diese Berechnung angefangen habe. Zuerst fand er durch fortgesetzte Zweytheilung des Bogens von 72 Gr. bis zur 25sten den Umfang bis auf die zwölfte Decimalstelle; dann durch 28 Halbtheilungen des Bogens von 90 Gr. den Umfang bis auf die 16te Decimalstelle; darauf durch 30 Halbirungen des Bogens von 60 Gr. bis auf die 18te Stelle; endlich durch 29 Halbirungen des Bogens von 6 Gr. bis auf die 20ste Stelle. Die Seiten der eingeschriebenen Vielecke fand er durch eine sehr verwickelte Formel, worin eine quadratische Irrationalgröße in einer andern dieser Art enthalten ist, diese wieder in einer solchen, und so fort, bis zu Ende, (Goniometrie, X.). Die Seiten der umgeschriebenen Vielecke fand er durch Division jener Seiten durch die halben Chorden der Complemente zum Halbkreise, für welche ähnliche Formeln Statt haben. Ob nun gleich das gefundene Verhältniß des Dyrchmessers zum Umfange zu jedem praktischen Gebrauch mehr als überflüssig hinreichend ist, so begnügte sich doch

van Ceulen damit noch nicht. Er erzählt in der angeführten Sammlung von Abhandlungen pag. 92, und in den Fundament. arithm. et geometr. Lugd. Bat. 1615. p. 144. *) daß ihn eine unersättliche Forschungsbegierde angetrieben habe, die Gränzen für den Umfang des Kreises einander noch näher zu bringen, und daß er mit Hülfe eines Zöglings, Peter Corneliß, den Kreisumfang bis zu der 32sten Decimalstelle, den Durchmesser als Einheit genommen, berechnet habe. Die Abweichung von der wahren Größe beträgt noch nicht so viel, als ein Bruch, dessen Zähler 1, und der Nenner 100 Quinquillionen oder 1 mit 32 Nullen ist, in Vergleichung mit dem Durchmesser weniger als ein kleines Sandkorn gegen die ganze Erde.

Snellius gab in einem Buche, betitelt, Cyclometricus, Lugd. Bat. 1621 geometrische Lehrsätze, vermittelst welcher die Rechnung beträchtlich abgekürzt wird. Aus dem Vieleck von 96 Seiten, woraus Archimedes den Umfang nur zwischen $3\frac{1}{7}$ und $3\frac{10}{71}$ für den Durchmesser als Einheit einschränkte, d. i. ihn nur bis auf die dritte Decimalstelle angeben konnte, findet Snellius den Umfang bis auf sieben Decimalstellen.

Es sey (Fig. 101. Tab. VII.) ADB ein Halbkreis, dessen Mittelpunct C. Auf der verlängerten AB nehme man BE dem Halbmesser CA gleich, und ziehe die willkührliche EDF, welche den Kreis zum zweytenmale in D, und die in A auf AB senkrechte AF in F schneide: es ist AF kleiner als der Bogen AD.

Wird aber (Fig. 103.) zwischen dem nach E verlängerten Durchmesser AB und dem Kreise die gerade Linie EG

*) Dieses Buch ist eine Uebersetzung aus dem Holländischen, worin der Verfasser es geschrieben hat. Es enthält dieselben Abhandlungen, welche in der vorher angeführten Sammlung, die den Titel hat, de circulo et adscriptis, stehen, aber nicht die eigentliche Schrift von der Kreisrechnung, dagegen eine Sammlung von geometrischen Elementar-Sätzen. Die Abhandlung de zetematum geometricorum epilogismo, welche Kästner als ein ihm nicht zu Gesicht gekommenes Buch anführt, Geometr. Abhandl. zweyte Samml. S. 159, ist darin enthalten.

so gelegt, daß sie dem Halbmesser gleich ist, und schneidet sie verlängert den Kreis noch einmal in D, und die bey A berührende AF in F, so ist AF größer als der Bogen AD.

Snellius hat zwar diese Sätze gefunden, aber seine Beweise sind unbefriedigend, weil darin das zu beweisende zum Grunde liegt. Hungens hat sie genau erwiesen, in der schönen Schrift, de circuli magnitudine inventa, die zuerst 1654 herauskam. Sie ist in dem zweyten Theile seiner Operum variorum enthalten.

Man setze AC = 1; den Bogen AD = φ, so ist die senkrechte DH = sin φ, und CH = cos φ. In dem ersten Satze (Fig. 102) ist EH = 2 + cos φ, und AF $= \frac{3 \sin \varphi}{2 + \cos \varphi}$, da EH : DH = EA : AF ist. Aus Cyklometrie (5 und 6.) ist

$$3 \sin \varphi = 3\varphi - \tfrac{1}{2}\varphi^3 + \tfrac{1}{40}\varphi^5 - \text{etc.}$$

$$2 + \cos \varphi = 3 - \tfrac{1}{2}\varphi^2 + \tfrac{1}{24}\varphi^4 - \text{etc.}$$

also ist $AF = \varphi - \frac{1}{180}\varphi^5 - \frac{1}{3024}\varphi^7 - \text{etc.}$

Daß die folgenden Glieder subtractiv sind, mag man aus den erstern schließen. Auch ist für $\varphi = \frac{1}{2}\pi$, oder den Quadranten, der Werth von AF kleiner als der Bogen, da alsdann $AF = \frac{3}{2}$ ist.

In dem Falle des zweyten Satzes (Fig. 103.) ziehe man gleichfalls DH senkrecht auf AB, und die Halbmesser CD, CG an die Durchschnitte der EF mit dem Kreise. Da GE = CG, so ist der W. CGD = 2E, also W. CDE = 2E, und W. ACD = 3E. Es sey der W. CED = ω, so ist ACD = 3ω, und der Bogen AD = 3ω, für den Halbmesser als Einheit. Also HD = sin 3ω; HC = cos 3ω, und in dem gleichschenklichten Dreyeck CGE die Grundlinie CE = 2 cos ω. Dadurch ist EH = cos 3ω + 2 cos ω, also

$$AF = \frac{(1 + 2\cos\omega)\sin 3\omega}{\cos 3\omega + 2\cos\omega}.$$ Nun ist $1 + 2\cos\omega = 3 - \omega^2 + \frac{1}{12}\omega^4 - \frac{1}{360}\omega^6 + \text{etc.}$

$\sin 3\omega = 3\omega - \frac{9}{2}\omega^5 + \frac{81}{40}\omega^5 - \frac{243}{560}\omega^7 + \text{etc.}$

Das Product dieser beiden Reihen ist

$$9\omega - \frac{33}{2}\omega^5 + \frac{433}{40}\omega^5 - \frac{933}{1680}\omega^7 + \text{etc.}$$

Ferner ist

$$\cos 3\omega = 1 - \frac{9}{2}\omega^2 + \frac{27}{8}\omega^4 - \frac{81}{80}\omega^6 + \text{etc.}$$

$$2\cos\omega = 2 - \omega^2 + \frac{1}{12}\omega^4 - \frac{1}{360}\omega^6 + \text{etc.}$$

Die Summe dieser beiden Reihen ist

$$3 = \frac{11}{2}\omega^2 + \frac{83}{24}\omega^4 - \frac{731}{720}\omega^6 + \text{etc.}$$

Der Quotient des Products durch die Summe ist $3\omega + \frac{3}{80}\omega^5 + \frac{15}{88}\omega^7 + \text{etc.} = AF$. Setzt man $3\omega = \varphi$, so ist

$$AF = \varphi + \frac{1}{20.81}\varphi^5 + \frac{5}{28.729}\varphi^7 + \text{etc.}$$

Auch hier darf man aus der Beschaffenheit der Vorzeichen von den erstern Gliedern schließen, daß die folgenden auch additiv sind. Es ist also AF größer, als der Bogen φ. Für $\varphi = \frac{1}{2}\pi$ oder 90° und $\omega = \frac{1}{6}\pi$ oder 30°, ist . . . .

$$AF = \frac{1+\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{1}{3}\sqrt{3} + 1.$$

Da $\sqrt{3} = 1{,}73205..$ so ist $AF = 1{,}57735..$ größer als $\frac{1}{2}\pi$.

Aus dieser Berechnung sieht man, wie viel enger die Gränzen für einen gegebenen Bogen durch des Snellius Verfahren gefunden werden, als nach der alten Methode. Nach der letztern sind die Seiten eines eingeschriebenen und die eines umgeschriebenen Vielecks, oder, welches dasselbe ist, Sinus und Tangente die Gränzen ihres zugehörigen Bogens. Diese sind also (nach Cyklometrie 5 und 14.), $\varphi - \frac{1}{6}\varphi^3 + \text{etc.}$ und $\varphi + \frac{1}{3}\varphi^3 + \text{etc.}$ Nach des Snellius Methode sind sie aber $\varphi - \frac{1}{1680}\varphi^5 - \text{etc.}$ und $\varphi + \frac{1}{1620}\varphi^5 + \text{etc.}$ Je kleiner φ, oder der Quotient des Bogens durch den Halbmesser ist, desto näher, und zwar viel näher kommen die Gränzen einander, als nach jener Methode.

Es ist nur nöthig von zwey Bogen, die sich wie 1 : 3 verhalten, die Sinus und Cosinus zu kennen. Man nehme φ gleich dem 32sten Theil des Umfanges, so läßt sich der Sinus dieses Bogens (oder die halbe Seite

des eingeschriebenen Vielecks von 16 Seiten) aus dem Sinus des 8ten Theils des Umfanges herleiten. Der Sinus des 96sten Theils aber (oder die halbe Seite des 48 Ecks) wird aus dem Sinus von 30 Gr. (oder der halben Seite des Sechsecks) gefunden.

Huygens fand, und zwar auf eine sehr sinnreiche Art, aus dem Schwerpuncte eines Kreisabschnittes, noch nähere Gränzen für den Umfang eines Kreises. Die analytische Rechnung mag nützlich mit der geometrisch-mechanischen verglichen werden, weswegen sie hier einen Platz verdient.

Es sey $y = \sin\varphi$, und $z = \text{chord}\ \varphi$, so ist erstlich $\varphi > z + \frac{1}{3}(z-y)$; zweytens

$$\varphi < z + \frac{4z+y}{2z+3y} \cdot \frac{z-y}{3}.$$ Dieses ist der 19te Satz in der angeführten Schrift von Huygens.

Es sey noch $u = \sin\text{vers}\,\varphi$, so ist $z^2 = 2u$, und auch $z^2 = u^2 + y^2$, also $y^2 = z^2 - \frac{1}{4}z^4$, und $y = z\sqrt{(1-\frac{1}{4}z^2)}$, oder (Binom. Lehrsatz, 13, 18.)

$$y = z - \tfrac{1}{8}z^3 - \tfrac{1}{128}z^5 - \tfrac{1}{1024}z^7 - \text{etc.}$$

und

$$z + \tfrac{1}{3}(z-y) = z + \tfrac{1}{24}z^3 + \tfrac{1}{384}z^5 + \tfrac{1}{3072}z^7 + \text{etc.}$$

Da $z = 2\sin\frac{1}{2}\varphi$, so ist (Cyklometrie, 1.)

$$\varphi = z + \tfrac{1}{24}z^3 + \tfrac{3}{640}z^5 + \tfrac{5}{7168}z^7 + \text{etc.}$$

also ist $\varphi > z + \frac{1}{3}(z-y)$.

Zweytens, es ist

$$4z + y = 5z - \tfrac{1}{8}z^3 - \tfrac{1}{128}z^5 - \text{etc.}$$
$$2z + 3y = 5z - \tfrac{3}{8}z^3 - \tfrac{3}{128}z^5 - \text{etc.}$$

und $$\frac{4z+y}{2z+3y} = 1 + \tfrac{1}{80}z^2 + \tfrac{11}{1000}z^4 + \text{etc.}$$

Da $z - y = \frac{1}{8}z^3 + \frac{1}{128}z^5 + \frac{1}{1024}z^7 + \text{etc.}$

so ist

$$\frac{4z+y}{2z+3y} \times \frac{z-y}{3} = \tfrac{1}{24}z^3 + \tfrac{3}{640}z^5 + \tfrac{19}{23000}z^7 + \text{etc.}$$

und $$\varphi < z + \frac{4z+y}{2z+3y} \times \frac{z-y}{3}.$$

Dieſe zweyte Gränze kommt dem Bogen φ ſehr nahe, da ſie erſt in dem vierten Gliede der Reihe für φ von dem Bogen abweicht, nämlich um $+\frac{1}{3200}z^7$. Der Abſtand der Gränzen von einander ſelbſt iſt $\frac{1}{480}z^5+\frac{1}{2400}z^7$. Hungens giebt ſtatt der entferntern kleinern Gränze noch eine nähere, auch kleinere, im 20ſten Satze, und ſagt, daß dieſe aus einer genauern Unterſuchung der Schwerpuncte hergeleitet werde. Sie kommt mit der Reihe für φ durch z in den drey erſten Gliedern überein, und faſt noch in dem vierten. Da wir jetzt die Reihe für den Bogen durch den Sinus haben, ſo bedarf es dieſer mühſamen Verbeſſerung nicht. Die Vergleichung jener Gränzen mit dem wahren Werthe des Bogens zeigt, wie viele Mühe es den ältern Mathematikern machte, ein paar Glieder der Reihe für den Bogen zu erhaſchen, die wir durch Hülfe der Integralrechnung, wegen des bekannten Geſetzes der Fortſchreitung ihrer Glieder, vollſtändig haben. Hungens findet durch die beiden Gränzen aus der Chorde und dem Sinus des Bogens von 6 Gr. den Umfang bis auf die neunte Decimalſtelle richtig.

Wallis fand durch eine gewiſſe ſehr künſtliche Art der Interpolation die Gränzen für $\frac{4}{\pi}$ auf eine ganz andere Art, durch einen Bruch, der aus der Multiplication unendlich vieler Brüche, welche ſich der Einheit immer mehr nähern, entſteht. In der Arithmetica Infinitorum, Operum Vol. I. pag. 468, ſagt er, das Quadrat des Durchmeſſers eines Kreiſes, die Kreisfläche zur Einheit genommen, iſt

kleiner als $\frac{3\cdot3\cdot5\cdot5\cdot7\cdot7\cdot9\cdot9\cdot11\cdot11\cdot13\cdot13}{2\cdot4\cdot4\cdot6\cdot6\cdot8\cdot8\,10\cdot10\cdot12\cdot12\cdot14}\cdot\sqrt{1\tfrac{1}{13}}$,

größer als $\frac{3\cdot3\cdot5\cdot5\cdot7\cdot7\cdot9\cdot9\cdot11\cdot11\cdot13\cdot13}{2\cdot4\cdot4\cdot6\cdot6\cdot8\cdot8\cdot10\cdot10\cdot12\cdot12\cdot14}\cdot\sqrt{1\tfrac{1}{14}}$.

Nach dieſer Form kann der Bruch, ſo weit man will, fortgeſetzt werden. Giebt man dem Bruche unendlich viele Factoren im Zähler und Nenner, ſo erhält man den Werth von $\frac{4}{\pi}$, der in der Cyklometrie, §. 29. aus den

unendlichen Reihen für sin φ und cos φ hergeleitet ist. Zur Berechnung des Kreisumfanges, oder der Kreisfläche ist diese Form nicht brauchbar.

Als Wallis dem Lord Brouncker die von ihm gefundene Form für das Quadrat des Durchmessers in Beziehung auf die Kreisfläche als Einheit mittheilte, erwiederte dieser, daß er auch durch eine ihm eigene Infinitesimal-Rechnung folgende sehr bequeme Form gefunden habe, welche das Quadrat des Durchmessers ausdrückt.

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{9}{2} + \frac{25}{2} + \frac{49}{2} + \frac{81}{2} + \text{etc.}$$

Dabey sey zu bemerken, daß, wenn man mit einem der Brüche abbricht, anstatt der Zwey eine der ungeraden Zahlen 3, 5, 7, 9, etc. zu setzen ist, diejenige, deren Stelle dieselbe mit der Stelle des zuletzt gesetzten Bruchs in der Reihe der Brüche ist, wodurch die Werthe des Quadrats, des Durchmessers abwechselnd zu groß und zu klein ausfallen. So ist

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{9}{2} + \frac{25}{7}$$

zu groß.

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{9}{2} + \frac{25}{2} + \frac{49}{2}$$

zu klein.

Der erstere Bruch giebt $\frac{4}{\pi} < \frac{1880}{1441}$; der zweyte

$\frac{4}{\pi} > \frac{1680}{1312}$; also $\pi > 3,133$, und $\pi < 3,145$.

Die Brounckersche Reihe in einander geschobener Brüche entsteht aus der Reihe für den Bogen durch die Tangente (Cyklometrie, 10.), wenn darin der Bogen $= \frac{1}{4}\pi$, und $t = 1$ gesetzt wird, s. Kettenbruch. Sie nähert sich aber auch mit der angebrachten Abänderung zu langsam. Brouncker hat den Weg, auf welchem er zu dieser Darstellung gekommen ist, nicht bekannt gemacht. Wallis bemüht sich zu zeigen, wie Brouncker den Kettenbruch gefun-

den haben möge. Man muß aber seinen Vortrag sich geläufig gemacht haben, wenn man es verstehen will.

Die neue Rechnung unendlicher Größen machte die Berechnung des Kreises nur zu einem Beyspiele allgemeiner Methoden der Rectificirung und Quadrirung krummer Linien. Was vorher große Mühe gemacht, und vielen Scharfsinn erfordert hatte, ward fast ein Spiel, und ein gleichsam mechanisches Verfahren.

Newton gab in der Schrift, Analysis per aequationes numero terminorum infinitas, die Reihe für einen Kreisbogen durch den Sinus, aus dieser durch Umkehrung die Reihe für den Sinus durch den Bogen, und aus dieser die Reihe für den Cosinus, mittelst Quadrirung der Reihe, und Ausziehung der Wurzel. Die Schrift ist vor 1669 verfaßt, s. Differentialrechnung. In dem zweyten Briefe an Oldenburg, der für Leibnitz bestimmt ward, vom 24. Oct. 1676. zeigt er an, daß die Reihe, $1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} + \frac{1}{11} - \frac{1}{13} - \frac{1}{15}$ etc. dem Quadranten des Kreises gleich ist, wenn die Chorde dieses Bogens zur Einheit genommen wird. Wie Newton diese Reihe gefunden habe, erhellt nicht aus der kurzen Anzeige, die er davon macht, noch aus andern Stellen seiner Schriften. Auf einem andern Wege, als Newton zu ihr gelangt seyn mag, bringt Euler die Reihe heraus in der Introd. in Anal. infin. T. I. §. 179.

Die Reihe für den Bogen durch die Tangente, und für die Tangente durch den Bogen, fand Jacob Gregory, im Jahre 1670, machte sie aber nicht öffentlich bekannt, sondern theilte sie nur Collins schriftlich mit. Er fand auch die Reihe, welche die Secante durch den Bogen ausdruckt, nebst zwey Reihen, wodurch der Logarithme einer Tangente und Secante unmittelbar berechnet werden können; und noch eine Reihe zur Rectification der Ellipse, wobey er bemerkt, daß es nur nöthig ist, einige Zeichen zu vertauschen, um die Rectification der Hyperbel zu erhalten.

Die Reihe für den Kreisbogen durch die ungeraden Potenzen der Tangente hat Leibnitz auch für sich gefun-

den, und um 1673 seinen mathematischen Freunden mitgetheilt. In den Actis Erud. 1682 machte er sie, doch ohne Beweis, bekannt. Die Reihe für den Sinus durch den Bogen gab er eb. das. im J. 1693. Er findet sie durch Differentiation einer angenommenen Reihe mittelst der Methode der unbestimmten Coefficienten, auf zweyerley Wegen, durch einfache und durch gedoppelte Differentiation. Das letztere Verfahren ist das von Kästner in der Anal. d. Unendlichen, §. 285. gebrauchte. Den Bogen durch den Sinus hätte er auf diese Art auch leicht finden können, ohne die Entwickelung der Potenz $(1-z^2)^{-\frac{1}{2}}$ zu gebrauchen, welches er aber nicht scheint unternommen zu haben.

Mehrere Rechner waren nun beschäftigt, den Umfang des Kreises mit sehr großer Genauigkeit zu finden. Abraham Sharp, ein großer Rechner in England, gegen das Ende des 17ten Jahrhunderts, berechnete, nach Halleys Anweisung, aus der Tangente des Bogens von 30 Grad, welche $\sqrt{\frac{1}{3}}$ oder $\frac{1}{3}\sqrt{3}$ ist, den Umfang bis auf die 72ste Decimalstelle, den Durchmesser zur Einheit genommen. Die ganze Rechnung steht in Sherwin's mathematical Tables, dritte Ausg. von 1742. Eben daselbst wird auch die Berechnung des Umfanges aus der Tangente von 18 Gr. bis zur 45sten Stelle, aus der Tangente von $22\frac{1}{2}$ Gr. bis zur 22sten Stelle, und aus der Tangente von 15 Gr. bis zur 27sten Stelle gleichfalls von Sharp ausgeführt gefunden. Daraus in der Sammlung der Scriptorum Logarithmicorum durch Mäsetes, im 3ten Bande. Der Aufsatz, worin die erste dieser Berechnungen mitgetheilt wurde, erschien, wie Hutton anführt, um 1706.

Um dieselbe Zeit berechnete Machin, Professor der Astronomie am Gresham College zu London, den Umfang des Kreises bis auf die hundertste Decimalstelle, vermittelst zweyer Reihen, deren Unterschied den Bogen von 45 Grad giebt. Es ist nämlich Arc. $45° =$ 4 Arc. tang $\frac{1}{5}$ — Arc. tang $\frac{1}{239}$. Die daraus entspringende

Doppelreihe hat Jones in seiner Synopsis Palmario
Matheseos, 1706, mitgetheilt, doch ohne Erklä
wie sie gefunden sey. Machins eigene Erklärung
Verfahrens, die sich handschriftlich erhalten hat, ist
Mäsres in die gleich vorher angeführte Samm
Vol. III. p. 159. seqq. eingerückt. Jones stellt
Doppelreihe als eine einfache dar, indem er zwey g
stellige Glieder der beiden Reihen mit dem gemeinsch
chen Divisor als ein einziges Glied verband. Daher
ein sehr guter Mathematiker, Thomas Simpson, v
bens bemüht, den Grund der Reihe zu entdecken.
auf dem festen Lande lange unbekannt geblieben.
nachher erst fand Euler eine ähnliche Formel, nämlich
Arc. tang. 45° = Arc. tang. $\frac{1}{2}$ + Arc. tang $\frac{1}{3}$, w
aber nicht so schnell convergirende Reihen, wie jene, g
Introd. in Anal. Infin. T. I. §. 142.

Lagny gab in den Abhandlungen der Pariser A
mie vom J. 1719, das Resultat seiner Berechnu
über den Umfang des Kreises, wobey er sich der Tang
des Bogens von 30 Gr. bedient hat. Er sagt erst
daß er die Leibnitzische Reihe für den achten Theil des
fanges schon im J. 1682 gefunden habe. Da sie
viel zu langsam convergire, so habe er die Tangente
30 Gr. angewandt, und durch zwey wesentlich verschie
Operationen, bey der einen durch fortgesetztes Addiren
Glieder, bey der andern durch wechselndes Addiren
Subtrahiren, den Umfang bis zu 127 Decimalste
für den Durchmesser, als Einheit, gefunden. Die R
nung sey mit äusserster Leichtigkeit geführt. Er versp
den Beweis in einer andern Abhandlung zu geben, wel
aber nicht geschehen ist. Euler in der Abhandl. de
riis modis circuli quadraturam proxime exprim
di Comm. Petr. vet. T. IX., glaubt, Lagny habe
noch besonderer Vortheile zur Abkürzung bedient.
der Zahl für den Umfang ist ein Druck- oder Schreib
ler, da die 113te Decimalstelle die Ziffer 7, anstatt 8
hält. Diesen Fehler hat Vega entdeckt.

Endlich hat Vega nach der Formel,

Arc 45° = 5 Arc. tang $\frac{1}{7}$ + 2 Arc. tang $\frac{3}{79}$

den Umfang bis zur 140ſten Decimalſtelle berechnet, und zur Prüfung die Rechnung noch nach der Formel

Arc. 45° = Arc. tang $\frac{1}{7}$ + 2 Arc. tang $\frac{1}{3}$

bis zur 126ſten Decimalſtelle vorgenommen. Thesaurus Logarithmorum completus, p. 633. In der Ratcliffeschen Bibliothek zu Oxford befindet ſich ein Manuſcript, worin die Rechnung bis zu der 154ſten Decimalſtelle getrieben iſt, nach dem Berichte des Barons von Zach.

In der That iſt alſo der Umfang des Kreiſes ſehr viel ſchärfer berechnet, als es je zum praktiſchen Gebrauche nöthig iſt. Dazu ſind die erſten zehn oder zwölf Decimalſtellen mehr als hinreichend. Denn ein Billiontheilchen iſt gegen die Einheit weniger, als eine Secunde Zeit gegen 31000 Jahre. Man gedenke ſich eine Kugel A, welche unſere Erdkugel ſo oft enthält, als dieſe Sandkörner faſſen könnte (man nehme 10 Quinquillionen), ferner eine Kugel B, die A eben ſo oft enthält, noch eine dritte C, die B eben ſo oft enthält, und noch eine D, die ſo groß iſt, als 1000 C, ſo iſt durch die von Lagny gefundene Zahl der Umfang bis auf ein Theilchen des Durchmeſſers berechnet, das in Vergleichung mit demſelben nicht größer iſt, als ein kleines Sandkorn gegen die Kugel D, und durch die von Vega hinzugefügten Ziffern noch zehn Billionenmahl genauer. Es kann gar nichts helfen, den Werth des Umfanges noch ſchärfer zu ſuchen, da einige hundert Ziffern gegen die unendlich vielen noch übrigen immer ein unbedeutender Zuſatz ſind. Nur das Künſtliche einer ſchnell annähernden Reihe könnte dadurch gezeigt werden.

Goniometriſche Formeln zur Berechnung des Umfanges eines Kreiſes.

Man ſetze in der Formel für den Bogen durch den Sinus (Cyklometrie, 1.) den Sinus, $y = \frac{1}{2}$, ſo iſt φ ein Bogen von 30 Grad oder der 12te Theil des Umfanges. Es iſt

$$\text{Arc. } 30^\circ = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^3 + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\cdot\frac{1}{5}\left(\frac{1}{2}\right)^5 + \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\cdot\frac{1}{7}\left(\frac{1}{2}\right)^7 + \text{etc.}$$

Der vierte Terminus ist $= \frac{5}{14336} = 0{,}00034\ldots$

Jeder Terminus ist mehr denn viermahl kleiner als der vorhergehende.

Newton schlug schon die Reihe für die Tangente $\sqrt{\frac{1}{3}}$ zur Berechnung des Umfanges vor. Die Formel a. a. O. 10. giebt

$$\text{Arc. } 30^\circ = \left(1 - \frac{1}{3\cdot 3} + \frac{1}{5\cdot 3^2} - \frac{1}{7\cdot 3^3} + \frac{1}{9\cdot 3^4} - \frac{1}{11\cdot 3^5} + \text{etc.}\right)\sqrt{\tfrac{1}{3}}.$$

Es ist nämlich $\sin 30^\circ = \frac{1}{2}$; $\cos 30^\circ = \sqrt{\frac{3}{4}} = \frac{1}{2}\sqrt{3}$, also $\text{tang } 30^\circ = \sqrt{\frac{1}{3}}$. Folglich

$$\pi = \left(1 - \frac{1}{3\cdot 3} + \frac{1}{5\cdot 3^2} - \frac{1}{7\cdot 3^3} + \text{etc.}\right)\sqrt{12},$$

oder bequemer,

$$\pi = \frac{8}{3}\left(\frac{1}{1\cdot 3} + \frac{2}{5\cdot 7\cdot 9} + \frac{3}{9\cdot 11\cdot 9^2} + \frac{4}{13\cdot 15\cdot 9^3} + \frac{5}{17\cdot 19\cdot 9^4} + \text{etc.}\right)\sqrt{12}.$$

Es ist $\sqrt{12} = 3{,}46410\ 16151\ 37754\ldots$ Die Ausziehung der Quadratwurzel aus 12 macht dieses Verfahren beschwerlich.

Man kann hier auch die Tangente von 18 Gr. gebrauchen, welche eine schneller convergirende Reihe giebt, als die von 30 Gr. Es ist $\sin 18^\circ = \frac{1}{4}(\sqrt{5} - 1)$; $\cos 18^\circ = \frac{1}{4}\sqrt{(10 + 2\sqrt{5})}$, (Goniometrie, IX.), also $\text{tang } 18^\circ = \frac{\sqrt{5} - 1}{\sqrt{(10 + 2\sqrt{5})}}$. Multiplicirt man Zäh-

ler und Nenner mit $\sqrt{(10-2\sqrt{5})}$, so ist tang 18° $= \frac{(\sqrt{5}-1)\sqrt{(10-2\sqrt{5})}}{\sqrt{80}}$. Den Zähler divi- dire man durch $\sqrt{5}-1$, und multiplicire dagegen die Größe unter dem Wurzelzeichen mit dem Quadrate von $\sqrt{5}-1$, d. i. mit $6-2\sqrt{5}$, so ist tang 18° $=$ $\frac{\sqrt{(80-32\sqrt{5})}}{\sqrt{80}} = \sqrt{(1-2\sqrt{\frac{1}{5}})}$. Die gedop- pelte Ausziehung der Quadratwurzel ist zwar zuerst be- schwerlich; allein die Potenzen der Tangente lassen sich leicht aus einander herleiten. Man setze tang 18° $= t$, so ist $t^2 = 1-2\sqrt{\frac{1}{5}}$, und $2\sqrt{\frac{1}{5}} = 1-t^2$, also $\frac{4}{5} = 1-2t^2+t^4$, und $t^4 = 2t^2-\frac{4}{5}$. Daher $t^5 = 2t-\frac{4}{5}t^{-1}$. Hieraus ist $t^5 = 2t^3-\frac{4}{5}t$; dann $t^7 = 2t^5-\frac{4}{5}t^3$, u. s. f. so daß die ungeraden Po- tenzen von t eine rücklaufende Reihe bilden, deren Ver- hältniß-Scale $+2$; $-\frac{4}{5}$ ist. Die Potenz t^{-1} ist $\frac{1}{t}$ $= \sqrt{(5+2\sqrt{5})}$.

Die Ausziehungen der Wurzeln zu vermeiden, zerlege man den Bogen von 45 Gr. in zwey Theile, deren Tan- genten rationale sind, und addire die Reihen, wodurch sie mittelst ihrer Tangenten gegeben werden. Die Zerle- gung kann auf unendlich viele Arten geschehen. Man wird aber für die beiden Tangenten die einfachsten Brüche zu suchen haben. Die beiden Theile des Bogens von 45 Gr. seyn A und B, so ist $A+B = \frac{1}{4}\pi$, und tang $(A+B)$ $= 1$, zugleich auch tang $(A+B) =$ $\frac{\text{tang } A + \text{tang } B}{1 - \text{tang } A \cdot \text{tang } B}$. (Goniometrie, 34.) Also ist $1 - \text{tg } A \text{ tg } B = \text{tg } A + \text{tg } B$. Setzt man $\text{tg } A = \frac{1}{2}$, so ist $\text{tg } B = \frac{1}{3}$. Diese beiden Brüche sind so einfach als möglich, und kommen sich nahe genug. Nähme man eine der Tangenten klein gegen die andere, so würde zwar die Reihe für jene schnell convergiren, die Reihe für die an- dere aber auch desto langsamer.

Es ist

$$A = \frac{1}{1.2} - \frac{1}{3.2^3} + \frac{1}{5.2^5} - \frac{1}{7.2^7} + \frac{1}{9.2^9} - \text{etc.}$$

$$B = \frac{1}{1.3} - \frac{1}{3.3^3} + \frac{1}{5.3^5} - \frac{1}{7.3^7} + \frac{1}{9.3^9} - \text{etc.}$$

Die Glieder dieser Reihen lassen sich sehr leicht berechnen. Jede besteht in der That aus zweyen. Diese vereinige man durch die wirkliche Subtraction der subtractiven Glieder, und theile sie wieder in zwey folgende:

$$A = \frac{11}{8}\left(\frac{1}{1.3} + \frac{1}{5.7.4^2} + \frac{1}{9.11.4^4} + \text{etc.}\right) + \frac{12}{8}\left(\frac{1}{5.7.4^2} + \frac{2}{9.11.4^4} + \text{etc.}\right).$$

$$B = \frac{26}{27}\left(\frac{1}{1.3} + \frac{1}{5.7.9^2} + \frac{1}{9.11.9^4} + \text{etc.}\right) + \frac{32}{27}\left(\frac{1}{5.7.9^2} + \frac{2}{9.11.9^4} + \text{etc.}\right).$$

Die Glieder nehmen stärker ab als in jenen Reihen, und ausserdem muß in eben diesen der größere Theil weiter berechnet werden. Wenn $P - Q = p + q$ ist, so ist $P > p$.

Um die Tangenten noch kleiner zu machen, zerlege man den Bogen von 45 Gr. in drey Theile, $2A + B$, von welchen zwey einander gleich genommen sind, um nicht drey verschiedene Reihen anzuwenden. Man setze

$\text{tang } A = t$, $\text{tang } B = u$, so ist $\text{tang } 2A = \frac{2t}{1 - t^2}$.

Es ist aber $\text{tang } 45^\circ = 1 = \frac{\text{tang } 2A + \text{tg } B}{1 - \text{tg } 2A \,.\, \text{tg } B}$, also $\frac{1 - \text{tg } 2A}{1 + \text{tg } 2A} = \text{tang } B$. Setzt man für $\text{tang } 2A$ ihr

nen Werth, so ist $(1+2t-t^2)u = 1-2t-t^2$. Nimmt man $t=\frac{1}{2}$, so ist $u=-\frac{1}{7}$, und B ist subtractiv. Es ist nämlich $A=26°\,34'-$, und $B=-(8°\,8'-)$. Setzt man $t=\frac{1}{3}$, so ist $u=+\frac{1}{7}$; und $A=18°\,26'+$; $B=8°\,8'-$. Demnach

$$A=\frac{1}{1\cdot 3}-\frac{1}{3\cdot 3^3}+\frac{1}{5\cdot 3^5}-\frac{1}{7\cdot 3^7}+\text{etc.}$$

$$B=\frac{1}{1\cdot 7}-\frac{1}{3\cdot 7^3}+\frac{1}{5\cdot 7^5}-\frac{1}{7\cdot 7^7}+\text{etc.}$$

oder

$$A=\frac{26}{27}\left(\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{5\cdot 7\cdot 9^2}+\frac{1}{9\cdot 11\cdot 9^4}+\text{etc.}\right)$$
$$+\frac{32}{27}\left(\frac{1}{5\cdot 7\cdot 9^2}+\frac{2}{9\cdot 11\cdot 9^4}+\text{etc.}\right).$$

$$B=\frac{146}{343}\left(\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{5\cdot 7\cdot 49}+\frac{1}{9\cdot 11\cdot 49^4}+\text{etc.}\right)$$
$$+\frac{192}{343}\left(\frac{1}{5\cdot 7\cdot 49}+\frac{2}{9\cdot 11\cdot 49^4}+\text{etc.}\right).$$

Man setze Arc. $45°=3A+B$, so ist $\text{tang}\,3A=\frac{3t-t^3}{1-3t^2}$ (Goniometrie, IV.), und $\frac{1-\text{tg}\,3A}{1+\text{tg}\,3A}=\text{tang}\,B$, das ist $\frac{1-3t-3t^2+t^3}{1+3t-3t^2-t^3}=\text{tang}\,B$.

Setzt man t oder $\text{tang}\,A=\frac{1}{4}$, so ist $\text{tang}\,B=\frac{3}{99}$. Hieraus ist $A=14°\,2'+$; $B=2°\,54'-$.

Man setze noch Arc. $45°=4A+B$, so ist

$$\text{tang}\,4A=\frac{4t-4t^3}{1-6t^2+t^4}, \text{ und}$$

$$\frac{1-4t-6t^2+4t^3+t^4}{1+4t-6t^2-4t^3+t^4}=\text{tang}\,B.$$ Nimmt man $t=\frac{1}{5}$, so ist $\text{tang}\,B=-\frac{1}{239}$, das ist, Arc. $45°=4\,\text{Arc.}\,\text{tg}\,\frac{1}{5}-\text{Arc.}\,\text{tg}\,\frac{1}{239}$. Dieses ist die von Machin zur Berechnung des Umfanges gebrauchte Reihe.

Es ist $A = 11° 15' 36''$, und $B = -14' 23''$. Nach der vorher gebrauchten Zusammenziehung und Zerlegung ist

$$A = \frac{74}{125}\left(\frac{1}{1.3} + \frac{1}{5.7.25^2} + \frac{1}{9.11.25^4} + \text{etc.}\right)$$
$$+ \frac{96}{125}\left(\frac{1}{5.7.25^2} + \frac{2}{9.11.25^4} + \text{etc.}\right).$$

$$B = \frac{171362}{239^3}\left(\frac{1}{1.3} + \frac{1}{5.7.239^2} + \frac{1}{9.11.239^4} + \text{etc.}\right)$$
$$+ \frac{228480}{239^3}\left(\frac{1}{5.7.239^2} + \frac{1}{9.11.239^4} + \text{etc.}\right).$$

In den Reihen für A ist der Vortheil, daß man die Division durch 25 in die Multiplication mit $\frac{4}{100}$ verwandeln kann; die Reihen für B convergiren stark. Es möchte also diese Formel für den Bogen von 45 Gr. die bequemste zur Berechnung des Kreisumfanges seyn. Bürmann von der Berechnung des Kreises, in dem Archiv für Mathematik, 8. Heft.

Um die Formeln für Arc. 45° zu vergleichen, stelle ich sie hier zusammen:

$$\text{Arc. } 45° = \text{Arc. tg } \tfrac{1}{2} + \text{Arc. tg } \tfrac{1}{3}$$
$$\text{Arc. } 45° = 2\,\text{Arc. tg } \tfrac{1}{3} + \text{Arc. tg } \tfrac{1}{7}$$
$$\text{Arc. } 45° = 3\,\text{Arc. tg } \tfrac{1}{4} + \text{Arc. tg } \tfrac{5}{99}$$
$$\text{Arc. } 45° = 4\,\text{Arc. tg } \tfrac{1}{5} - \text{Arc. tg } \tfrac{1}{239}$$

Man kann dergleichen Formeln noch mehrere machen, dergleichen die schon vorher angegebene,
$\text{Arc. } 45° = 2\,\text{Arc. tang } \frac{1}{2} - \text{Arc. tang } \frac{1}{7}$; und
$\text{Arc. } 45° = 3\,\text{Arc. tang } \frac{1}{3} - \text{Arc. tang } \frac{3}{11}$, sind.

Hutton in der angeführten Abhandlung über die leichte Berechnung des Kreis-Umfanges, Philos. Trans. 1776, giebt drey dieser Formeln als von ihm gefunden an. Den Reihen, die aus der Eulerischen Formel, $\text{Arc. } 45° = \text{Arc. tg } \frac{1}{2} + \text{Arc. tg } \frac{1}{3}$, entstehen, giebt er folgende Form:

$$\text{Arc. } 45° = \frac{4}{10}\left(1 + \frac{4}{3.10} + \frac{8\alpha}{5.10} + \frac{12\beta}{7.10} + \frac{16\gamma}{9.10} + \text{etc.}\right)$$

$$+ \frac{3}{10}\left(1 + \frac{2}{3.10} + \frac{4\alpha}{5.10} + \frac{6\beta}{7.10} + \frac{8\gamma}{9.10} + \text{etc.}\right).$$

wo α, β, γ, etc. in jeder Reihe das nächst vorhergehende Glied bedeuten. Wegen der Transformation beruft er sich auf die Differential series in Th. Simpson's mathematical dissertations, p. 64. Auch den Reihen aus zwey andern Formeln giebt er eine ähnliche Gestalt.

Vega hat den Umfang des Kreises nach der dritten unter den folgenden Formeln berechnet.

$$\text{Arc. } 45° = \text{Arc. tg } \tfrac{1}{7} + 2 \text{ Arc tg } \tfrac{1}{3}$$
$$\text{Arc. } 45° = 3 \text{ Arc. tg } \tfrac{1}{7} + 2 \text{ Arc. tg } \tfrac{3}{11}$$
$$\text{Arc. } 45° = 5 \text{ Arc. tg } \tfrac{1}{7} + 2 \text{ Arc. tg } \tfrac{1}{79}$$
$$\text{Arc. } 45° = 7 \text{ Arc. tg } \tfrac{1}{7} - 2 \text{ Arc. tg } \tfrac{29}{278}.$$

Wenn Arc. $45° = m$. Arc. tang $t + 2$ Arc. tg u, gesetzt wird, so muß t so angenommen werden, daß das Verhältniß von $t : u$ rational werde. Die Herleitung dieser Formeln habe ich in dem Archiv der Mathematik, VII Heft gegeben: Formeln zur leichten Berechnung des Umfanges eines Kreises.

Man zerlege den Bogen der Tangente $\frac{1}{5}$ in . . 2 Arc. tg $\frac{1}{10}$ — Arc. tg u, und suche die Tangente u. Es ist tang 2 Arc. tg $\frac{1}{10} = \frac{2 : 10}{1 - 1 : 100} = \frac{20}{99}$. Also die Tangente der Summe jener Bogen, nämlich $\frac{1}{5} = \frac{20 : 99 - u}{1 + 20u : 99} = \frac{20 - 99u}{99 + 20u}$. Hieraus folgt $u = \frac{1}{239}$, so daß Arc. tg $\frac{1}{5} = 2$ Arc. tg $\frac{1}{10}$ — Arc. tg $\frac{1}{239}$ ist.

Folglich ist

Arc. $45° = 8$ Arc. tg $\frac{1}{10} - 4$ Arc. tg $\frac{1}{515} -$ Arc. tg $\frac{1}{239}$.

Diese Formel hat zwar drey Theile, allein alle Reihen in derselben convergiren sehr schnell. Sie ist mir von einem sehr geschickten Analysten, Herrn Magister Buzengeiger in Ansbach, mitgetheilt worden.

Methoden, die goniometrischen Linien zu berechnen.

Den ersten Versuch in der Berechnung der goniometrischen (trigonometrischen) Linien treffen wir in des Ptolemäus Astronomie an, im 1. Buche, wo eine Tafel der Chorden von halben zu halben Graden geliefert ist. Die Chorden werden durch Sexagesimaltheile des Halbmessers angegeben, z. B. ch. $45° = 45.55.19$, das ist $\frac{45}{60} + \frac{55}{60^2} + \frac{19}{60^3}$ oder 0,765366 des Halbmessers. Die Hälfte 0,382683 ist der Sinus von 22° 30′ wie in unsern Tafeln. In derselben Tafel ist für jede der angegebenen Chorden auch das Increment auf eine Minute beygefügt, der Interpolation wegen. So steht bey 45° das Increment 0.58.0, das ist $\frac{58}{60^3} = 0,0002685$. Die Hälfte hiervon ist der Unterschied der Sinus von 22° 30′ und 22° 30′ 30″. Nach unsern Tafeln ist dieser 0,0001344.

Ptolemäus gebraucht zu dieser Berechnung die Lehrsätze von der Zusammensetzung der Bogen mittelst ihrer Chorden. Der in der Goniometrie (25.) zur Grundlage genommene geometrische Satz ist es bey ihm auch. Die Chorde der Hälfte eines Bogens aus der Chorde des Bogens findet er folgendergestalt. Zuerst sucht er die Chorde des Complements des Bogens A zum Halbkreise; den Unterschied derselben vom Durchmesser halbirt er, so ist die Chorde von $\frac{1}{2}$A die mittlere Proportionale zwischen dem Durchmesser und diesem halben Unterschiede. Dieser Satz kommt mit der Formel in Goniometrie (36.) überein.

Die numerischen Werthe der Seiten des Vierecks, Sechsecks, Fünfecks und Zehnecks dienen ihm die Rechnung daran zu knüpfen. Wo er genöthigt ist, eine Chorde durch Interpolation zu finden, z. E. bey der Chorde von 1 Gr. sucht er Gränzen, zwischen welchen sie enthalten ist. Seine Tafeln geben die Chorden innerhalb $\frac{1}{21600}$ des Halbmessers, oder zwischen 4 bis 5 Millionentheilchen desselben. (Vergl. Kästners geometrische Abhandl. 1 Samml. S. 525. II. S. 354.).

Vor Ptolemäus hat man sich schon mit der Berechnung der Chorden beschäftigt, wovon aber nichts zu uns gekommen ist. Hipparchus (im 2ten Jahrh. vor C. G.) hat, nach Theons Bericht (Comm. in Almag. L. I. c. 9), die Lehre von den Chorden des Kreises in zwölf Büchern abgehandelt. Menelaus (zu den Zeiten Trajans) hat auch sechs Bücher von den Chorden des Kreises geschrieben, die nicht mehr vorhanden sind. Von diesen Verfassern hat Ptolemäus ohne Zweifel seine Lehrsätze genommen; die Tafel der Chorden scheint er selbst berechnet zu haben. Theon rühmt die Geschicklichkeit, womit Ptolemäus die Berechnung der Chorden auf einige wenige und bequeme Sätze gegründet hat.

Die Araber führten statt der Chorden die Hälften derselben ein. Wo nur spitze Winkel vorkommen, da ist es gleichgültig, ob das Dreyeck zwischen dem Durchmesser, der Chorde eines Bogens und der Chorde seines Complements zum Halbkreise, oder das diesem ähnliche, zwischen dem Halbmesser, Sinus und Cosinus gebraucht wird. Allein diese, im Anfang vielleicht unnöthige, Veränderung hat die Folge, daß stumpfe Winkel, und selbst Winkel über zwey Rechte, bequem in Rechnung gebracht werden können.

Georg Purbach (auch Peurbach, oder wie er auf dem Titel einer seiner Schriften heißt, Burbach, gebürtig aus einem Dorfe dieses Namens an der österreichisch-bäyrischen Gränze, gest. 1461) verließ die alte Sexagesimaltheilung des Halbmessers, dem er dagegen 600000 Theile gab. Er berechnete die Sinus der Winkel von 10 zu

10 Minuten. (Gaſſendi in den Lebensbeſchreibungen einiger Aſtronomen, pag. 341. Weidleri hist. Astron. p. 301. Käſtner glaubt in den geom. Samml. II. S. 541. und Geſch. der Math. I. S. 537, daß Purbachs Tafeln durch alle Minuten gegangen ſeyn möchten). Dieſe Tafel der Sinus ſcheint nicht gedruckt zu ſeyn. In der Schrift de Quadrato geometrico, die zu Nürnberg 1516 gedruckt, und auch einer ſehr ſeltenen Sammlung einiger Schriften von Regiomontanus (Scripta clariss. Mathematici M. Jo. Regiomontani. Norib. 1544. 4). beygefügt iſt, liefert Purbach eine Tafel der Winkel, deren Tangente eine der Zahlen von 0 bis 1200 iſt, den Halbmeſſer = 1200 genommen, in Graden, Minuten und Secunden, alſo die Winkel von 0° bis 45°. Er hat dieſe Tafel aus ſeiner Tafel der Sinus hergeleitet. Sie iſt zum Gebrauche bey einem Winkelmeſſer beſtimmt, das die Form eines Quadrats hat, mit einem Diopternlinial, das ſich um einen Winkelpunct deſſelben drehen läßt. Von ſeiner Tafel der Sinus ſagt er, daß der Sinus totus darin 600 000 genommen ſey. Gaſſendi, Weidler und Bailly ſetzen 6000000.

Johann Müller, gewöhnlich Johannes Regiomontanus (von ſeinem Geburtsorte, Königsberg in Franken, geſt. 1476) berechnete zwey Sinustafeln, eine für den Halbmeſſer ſechs Millionen, und eine andere für den Halbmeſſer zehn Millionen. Die Bogen gehen von Minute zu Minute. Die Tafeln ſind, nebſt einer Abhandlung über die Berechnung der Sinus, und einer dahin gehörigen von Purbach verfaßten Schrift zu Nürnberg 1541 von Schoner herausgegeben. Ein Auszug findet ſich bey des Regiomontanus Tabulis directionum profectionumque, Vitemb. 1584. die ſchon im Jahre 1490 zu Augsburg herausgekommen ſind. Hier hat der Halbmeſſer 6000 Theile. Die Unterſchiede für eine Secunde ſind in Tauſendtheilchen eines dieſer Theile des Halbmeſſers beygefügt. Z. B. $\sin 31^\circ 1' = 30917$ mit dem Unterſchiede 249. Dieſer mit 60 multiplicirt giebt 14,940 oder 15 nächſtens, welche zu jenem Sinus addirt

0932 als sin 31° 2′ geben. Bey der Berechnung der Sinus hat Regiomontanus den Sinus totus 600 Millionen groß genommen, um die Zahlen in den Tafeln bis 3 der letzten Ziffer genau zu erhalten. Die Sinus leitete er, wie Ptolemäus, aus den Seiten einiger Vielecke durch Halbirungen und Zusammensetzungen der Winkel her, so daß er sie von 45 zu 45 Min. bekam. Den Sinus von 1 Grad findet er dadurch, daß sin 1° kleiner als sin 45′, und größer als $\frac{1}{3}$(sin 90′ + 2 sin 45′) ist. So konnte er ferner die Sinus von 15 zu 15 Min erhalten, und dann durch geschicktes Einschieben die zwischen liegenden. Dieses hat er auch bey den Sinus der Winkel, deren Unterschied 45′ beträgt, zugleich angewandt. Er zeigt sein Verfahren nur mit wenigen Worten an, daher Kästner in der Geschichte d. Mathem. I. S. 553 gesteht, daß er Regiomontans Vorschrift wegen der Unterschiede nicht vollkommen verstehe. Das Verfahren ist mit den Gründen, worauf es beruht, folgendes. Es seyn drey Winkel, A, B, C, in arithmetischer Proportion, zwischen welchen die Winkel α, β, γ, δ, in arithmetischer Progression mit jenen und unter sich eingeschoben werden, nämlich α, β zwischen A, B, und γ, δ zwischen B, C. Nun ist $\frac{1}{3}$(sin B — sin A) kleiner als sin α — sin A, aber größer als sin B — sin β, daher $\frac{1}{3}$(sin B — sin A) = sin β — sin α nahe. Gleichergestalt ist $\frac{1}{3}$(sin C — sin B) = sin δ — sin γ nahe. Man nehme die Unterschiede I. sin β — sin α; II. sin B — sin β; III. sin γ — sin B; IV. sin δ — sin γ, in arithmetischer Progression, so werden, weil die beiden äussern Glieder, der Voraussetzung gemäß, bekannt sind, die beiden mittlern leicht gefunden, also auch sin β und sin γ, daraus dann auch sin α und sin δ. Das Verfahren giebt die eingeschalteten Sinus so weit richtig, als es richtig ist, daß die zweyten Unterschiede sich gleich sind.

Bis zum Regiomontan enthielten die trigonometrischen Tafeln nur die Sinus. Er fügte noch die Tangenten hinzu. Die Tafel derselben nannte er wegen ihres nützlichen Gebrauchs, tabulam foecundam. Bey den vorher an-

geführten aſtronomiſchen Tafeln des Regiomontanus iſt eine ſolche für den Halbmeſſer 100000, aber nur von Grad zu Grad enthalten.

Beträchtlich weiter gieng Georg Joachim von ſeinem Vaterlande gewöhnlich Rhäticus, genannt, (geb. 1514 zu Feldkirch in einem Theile des alten Rhätien; geſt. 1576), der aber doch ſein mühſeliges großes Werk nicht vollendete. Er nahm ſich vor, die Sinus, Tangenten und die von ihm zuerſt eingeführten Secanten *), für einen in 10000 Millionen getheilten Halbmeſſer von 10 zu 10 Secunden zu liefern. Bey der Berechnung ſelbſt nahm er, zur Sicherheit bis auf die letzte Ziffer, den Halbmeſſer 1000 Billionen groß an. Als er über der Ausarbeitung verſtarb, nahm ſein Schüler und Gehülfe, Valentin Otho, ſich des Werkes an, zu deſſen Vollendung ihm von dem Kaiſer Maximilian II. die Koſten bewilliget wurden. Nach dem Tode dieſes Kaiſers konnte man am öſterreichiſchen Hofe für trigonometriſche Tafeln nichts thun. Otho bekam einen Ruf nach Wittenberg als Profeſſor der Mathematik mit dem Verſprechen der zu ſeiner Arbeit nöthigen Koſten, worauf er ſich dahin begab. Allein wegen gewiſſer Vorfälle mußte er nebſt einigen andern dieſen Ort verlaſſen. Er reiſete einige Jahre herum, bis er von D. Caſpar Peucer in die Pfalz am Rhein zu kommen eingeladen ward. Hier erhielt er von dem Pfalzgrafen Johann Caſimir, dem Vormunde des noch minderjährigen Kurfürſten Friedrich IV. die Koſten zur Vollendung und Herausgabe des Werks. Er gab ſeines Lehrers und ſeine eigene Arbeit in einem großen Folianten heraus, unter dem Titel: Opus Palatinum de triangulis, a Georg. Joach. Rhetico coeptum; L. Valentinus Otho Principis Palatini Friderici IV. Electoris Mathematicus conſummavit, 1596. In dieſem Werke ſind enthalten von Rhäticus ſelbſt, Libri tres de fabrica canonis doctrinae triangulorum; de triquetris recta-

*) Zu gleicher Zeit mit Rhäticus berechnete Maurolycus in Sicilien (geſt. 1575) eine Tafel der Secanten, die er tabulam benefícam nannte.

im linearum in planitie liber unus; de triangulis obi cum angulo recto libri quatuor. Dann von tho, de triangulis globi sine angulo recto libri inque, quibus tria meteoroscopia numerorum ceſſerunt. Dieſe Meteoroſcopia ſind Tafeln zur ſphäſchen Trigonometrie gehörig. Auf dieſe folgt der große anon doctrinae triangulorum ad decades ſecundoum scrupulorum et ad partes 10000 000 000. Dier enthält die Sinus, Tangenten und Secanten, in ey Reihen oder Abtheilungen. Die erſte Reihe enthält e Sinus und Coſinus der Winkel von 0 bis 45 Gr. unr den Benennungen, Perpendiculum et Baſis. Die veyte Reihe enthält die Secanten und Tangenten derſelen unter den Benennungen, Hypotenusa und Perpeniculum; die dritte Reihe die Coſecanten und Cotangenn derſelben unter den Benennungen, Hypotenuſa und aſis. Dieſe Überſchriften ſtehen über den Columnen; nten ſind die Benennungen, Perpendiculum und Baſis rtauſcht, da die Complemente jener Winkel von unten uf gezählt werden, wie es in den neuern Tafeln gewöhnch iſt. Die Unterſchiede aller dieſer Größen ſind beyefügt.

Die Berechnung der goniometriſchen Linien, ohne die Hülfe der Analyſis, zeigt die Methode des Rhäticus am ollſtändigſten. Die dazu nöthigen Zahlen ſind mit den Reſultaten der arithmetiſchen Operationen größtentheils ufgeſtellt, ſo daß man die ganze Rechnung in ihren einelnen Theilen verfolgen kann. Auſſer den Lehrſätzen ſeier Vorgänger hat Rh. noch zwey Sätze über die Sinus nd Coſinus, deren Winkel gleichförmig zunehmen, (de fabrica canonis, prop. 9.). Der eine iſt, in unſere Formularausdrücke gebracht: $\cos(a+nb)=\cos(a+n-2)b)-2\sin b.\sin(a+(n-1)b)$. Der zweyte iſt: $\sin(a+nb)=2\cos b.\sin(a+(n-1)b)-\sin(a+(n-2)b)$. (Goniometrie, 58, 55).

Rhäticus findet auch durch algebraiſche Rechnung (wie r es nennt, per maxima Logistices praecepta) den Sinus der Hälfte und des dritten Theils aus dem Sinus

eines gegebenen Bogens. Bey der Halbirung er eine längere Rechnung einer kürzern vor, weil er g daß jene mehr Sicherheit gewähre. Er addirt das drat des Sinus verſus eines Bogens A zu dem Qu des Sinus, zieht aus der Summe die Quadratw und halbirt dieſe, wodurch er den Sinus von $\frac{1}{2}$A Kürzer iſt die Rechnung nach der Formel $1 - \cos A = 2 \sin \frac{1}{2} A^2$, und ohne Zweifel eben ſo ſicher. Be nen Winkeln bedient Rhäticus ſich einer algebraiſche löſung.

Aus den Seiten des Zehnecks und Sechsecks Rhäticus durch Halbirung und Zuſammenſetzunge Winkel die Sinus von anderthalb zu anderthalb G her. Durch die Verbindung des Winkels von 45′, Sinus und Coſinus durch fortgeſetzte Halbirung des kels von 12° gefunden ſind, werden die Sinus und C von 45 zu 45 Min. gefunden. Hierauf nimmt er 4 ceſſive Halbirungen des Winkels von 45′ vor, und die Sinus und Coſinus der Theile. Der Sinus de ten dieſer Winkel iſt einer der Theile, deren der Hal ſer 1000 Billionen enthält. Nun iſt ſeine Abſicht Sinus und Coſinus von 1 Min. genau zu finden. geht er folgenden Weg. Aus den Sinus und Coſinu Winkel, 33° 45′ und 22′ 30″, findet er den Sinu Coſinus von 34° 7′ 30″. Unter den Winkeln, die die fortgeſetzte Halbirung von 45′ entſtehen, ſind deren Summe iſt 12″. 11. 41. 22. etc. wo die ab derten Zahlen Sexageſimaltheile ſind. Dieſen W nenne man α. Der Sinus deſſelben wird aus den C und Coſinus der Theile berechnet. Ferner giebt die ſ Halbirung den Winkel 42″. 11. 15. Dieſer ſey = Der Unterſchied von β von α iſt 29″. 59. 33. 37 = γ. Da dieſer Winkel ſehr wenig von 30″ verſch iſt, ſo kann man die Proportion ſetzen, γ : 30″ = s sin 30″, wo sin γ aus den Sinus und Coſinus von β gefunden iſt. Die Verbindung der Winkel 34° 7 und 30″ giebt sin 34° 8′ und cos 34° 8′. Aus werden die Sinus und Coſinus der ſucceſſiven Winke

geleitet, bis zu dem von 1 Min. Nun iſt Rhäticus im Stande, die Sinus und Coſinus der Winkel von 1 bis 45 Min. zu berechnen. Mit Hülfe dieſer konnte er darauf die Reihe von 45 zu 45 Min. für jede Minute ausfüllen. Nun waren noch die Sinus und Coſinus der Winkel, die 10, 20, 30, 40, 50 Secunden über die Grade und Minuten enthalten, zu berechnen. Zuerſt ſucht Rhäticus den Sinus von 5 Sec. folgendermaßen. Er nimmt aus dem Canon der Halbirungen von 45 Min. vier Winkel heraus, deren Summe iſt 4″. 56. 37. 51. etc. und berechnet den Sinus deſſelben aus den Sinus und Coſinus der Theile. Aus dem Sinus findet er, wie vorher den dem Sinus von 30 Sec., durch eine einfache Proportion den Sinus von 5 Sec. und aus dieſem auch den Coſinus. Da aus sin 30″ der sin 15″ gefunden wird, ſo ergeben ſich nun sin 10″; sin 20″, und ferner sin 40″; sin 50″, nebſt den Coſinus dieſer Winkel. Da dieſe gefunden ſind, ſo werden die Sinus und Coſinus von 10 zu 10 Sec. in der Reihe derer von Minute zu Minute eingeſchaltet, mittelſt der Lehrſätze von den Sinus und Coſinus der Summe oder des Unterſchiedes zweyer Winkel.

Die Tangenten und Secanten findet Rhäticus unmittelbar durch die Proportionen, cos : sin = rad : tang. und cos : rad = rad : sec. Auf ähnliche Weiſe findet er auch die Cotangenten und Coſecanten. Nach Schulze's Verſicherung (Einleit. zu ſeinen Tafeln) ſind von den Tangenten in dem Op. Palat. im Anfang des Quadranten nur die 5 bis 6 erſten Stellen richtig. Hobert und Ideler ſagen in der Einleitung zu ihren neuen Tafeln, daß ſie für 0°27′ = 127, 321 336 4689 gefunden haben, da daſſelbe in dem Op. Palat. 127, 321 336 2801 iſt.

Ein Canon der Sinus für den Halbmeſſer 1000 Billionen, von 10 zu 10 Secunden mit den erſten, zweyten und dritten Unterſchieden, iſt in Pitiſci theſauro mathematico (Francof. 1613.) enthalten. Es iſt der von Rhäticus ſelbſt berechnete, aus dem Nachlaſſe deſſelben noch erhaltene. Käſtners geometriſche Abhandlungen I. 573. In dem Opere Palatino ſind die Sinus,

Tangenten und Secanten für einen so großen Ha
von 45 zu 45 Min. enthalten.

Die Analysis des Unendlichen hat zu der Ber
der goniometrischen Linien viel leichtere und kürzer
eröffnet, als jene unverdrossenen Rechner zu nehm
thigt waren. Mittelst der Formeln, welche d
nien durch ihre Bogen darstellen, kann man jede u
gig von den andern finden, so genau als man nur
ne einen, bloß zur Sicherheit bey den Resultaten
Aufwand von Berechnungen. Wollte man den
Canon oder ein Stück desselben berechnen, so ka
diejenigen Größen, zwischen welchen die übriger
schaltet werden sollen, vortheilhaft auswählen, und
Einschaltung mehrere, sowohl bequeme als sichere Me

Um die Berechnung der goniometrischen Li
erleichtern, hat Euler die unveränderlichen
in den Formeln für dieselben sehr weit berechnet,
Introd. in Anal Infin. T. I. cap. 8. Die
bekommen dadurch folgende Gestalt. Es sey
Halbmesser als Einheit der Bogen $= \varphi$, und φ
sich zum Quadranten wie m zu n,

so ist $\varphi = \frac{m}{n} \cdot \frac{\pi}{2}$ und es ist

$\text{Sin}\,\varphi =$		$\text{Col}\,\varphi =$	
$+\frac{m}{n}$	$\cdot$ 1, 570796 3267	$+$	1, 000000
$-\frac{m^3}{n^3}$	$\cdot$ 0, 645964 0975	$-\frac{m^2}{n^2}$	$\cdot$ 1, 233700
$+\frac{m^5}{n^5}$	$\cdot$ 0, 079692 6262	$+\frac{m^4}{n^4}$	$\cdot$ 0, 253669
$-\frac{m^7}{n^7}$	$\cdot$ 0, 004681 7541	$-\frac{m^6}{n^6}$	$\cdot$ 0, 020863
$+\frac{m^9}{n^9}$	$\cdot$ 0, 000160 4411	$+\frac{m^8}{n^8}$	$\cdot$ 0, 000919
$-\frac{m^{11}}{n^{11}}$	$\cdot$ 0, 000003 5988	$-\frac{m^{10}}{n^{10}}$	$\cdot$ 0, 000025
$+\frac{m^{13}}{n^{13}}$	$\cdot$ 0, 000000 0569	$+\frac{m^{12}}{n^{12}}$	$\cdot$ 0, 000000
+ etc.		+ etc.	

leitet, bis zu dem von 1 Min. Nun ist Rhäticus im ſtande, die Sinus und Coſinus der Winkel von 1 bis 5 Min. zu berechnen. Mit Hülfe dieſer konnte er darauf e Reihe von 45 zu 45 Min. für jede Minute ausfüllen. tun waren noch die Sinus und Coſinus der Winkel, die o, 20, 30, 40, 50 Secunden über die Grade und Mi- uten enthalten, zu berechnen. Zuerſt ſucht Rhäticus den ſinus von 5 Sec. folgendermaßen. Er nimmt aus dem anon der Halbirungen von 45 Min. vier Winkel heraus, ren Summe iſt 4″. 56. 37. 51. etc. und berechnet den ſinus deſſelben aus den Sinus und Coſinus der Theile. us dem Sinus findet er, wie vorher bey dem Sinus von o Sec., durch eine einfache Proportion den Sinus m 5 Sec. und aus dieſem auch den Coſinus. Da aus n 30″ der sin 15″ gefunden wird, ſo ergeben ſich nun n 10″; sin 20″, und ferner sin 40″; sin 50″, nebſt n Coſinus dieſer Winkel. Da dieſe gefunden ſind, ſo rden die Sinus und Coſinus von 10 zu 10 Sec. in r Reihe derer von Minute zu Minute eingeſchaltet, mit- ſt der Lehrſätze von den Sinus und Coſinus der Summe er des Unterſchiedes zweyer Winkel.

Die Tangenten und Secanten findet Rhäticus un- ittelbar durch die Proportionen, cos: sin = rad : tang. d cos : rad = rad : sec. Auf ähnliche Weiſe findet auch die Cotangenten und Coſecanten. Nach Schulze's erſicherung (Einleit. zu ſeinen Tafeln) ſind von den Co- ngenten in dem Op. Palat. im Anfang des Quadranten r die 5 bis 6 erſten Stellen richtig. Hobert und Ideler gen in der Einleitung zu ihren neuen Tafeln, daß ſie t 0°27′ = 127, 321 336 4689 gefunden haben, da ſelbe in dem Op. Palat. 127, 321 336 2801 iſt.

Ein Canon der Sinus für den Halbmeſſer 1000 Bil- nen, von 10 zu 10 Secunden mit den erſten, zweyten d dritten Unterſchieden, iſt in Pitiſci theſauro mathe- atico (Francof. 1613.) enthalten. Es iſt der von häticus ſelbſt berechnete, aus dem Nachlaſſe deſſelben ch erhaltene. Käſtners geometriſche Abhandlungen I. . 573. In dem Opere Palatino ſind die Sinus,

Quadranten gehen die Sinus, Cosinus, Tangenten und Cotangenten durch alle einzelne Hunderttausendtheilchen des Quadranten, das ist, durch je 3″, 240 der Sexagesimaltheilung, von 0, 05 an durch alle einzelne Zehntausendtheilchen. Die Berechnungsart ist hauptsächlich eine Interpolation einer Reihe von 25 Sinus und Cosinus in der ersten Hälfte des Quadranten. Diese sind bis auf 30 Decimalstellen berechnet. Die Unterschiede sind bis zum sechsten genommen; und in den ersten drey Hunderttheilen, wo die Glieder der Hauptreihe sich viel näher kommen, bis zum fünften. Die Herausgeber haben ihr Verfahren in der sehr lehrreichen Einleitung ausführlich beschrieben.

Um die Anwendung verschiedener Hülfsmittel bey einer so weitläuftigen Rechnung zu zeigen, will ich ein Verfahren beschreiben, welches sie, ohne Gefahr für die Genauigkeit, sehr abkürzt.

Wenn die Sinus und Cosinus nach der Decimaleintheilung des Quadranten berechnet werden sollen, so suche man

I. Dieselben für 0,1; 0,01; 0,001; 0001; 0,00001 des Quadranten nach den gleich vorher mitgetheilten Eulerischen Formeln. Dieses geschieht sehr leicht.

II. Man berechne die Sinus und Cosinus der Bogen 0,1; 0,2; 0,3; 0,4; 0,5, nach den Formeln

$$\sin n A = \sin(n-2)A + 2 \sin A . \cos(n-1)A,$$

$$\cos n A = \cos(n-2)A - 2 \sin A . \sin(n-1)A,$$

welche man aus den Formeln (Goniometrie 56, 58.) erhält, wenn daselbst a = 0, und A für b gesetzt wird. Hier ist A = 0,1 des Quadranten, und sin A ein beständiger Factor. Das letzte Glied der Reihe, sin 0,5, und cos 0,5 ist $= \sqrt{0,5}$, welches leicht berechnet ist, und zur Prüfung der Rechnung dient.

III. Man schalte zwischen den Sinus und Cosinus von 0; 0,1; 0,2; 0,3, des Quadranten neue Glieder ein, mittelst des Sinus und Cosinus von 0,01 des Quad. nach den Formeln (a. a. O.)

$$\sin(a+nb) = \sin(a+(n-2)b) + 2\sin b.\cos(a+(n-1)b)$$
$$\cos(a+nb) + \cos(a+(n-2)b) - 2\sin b.\sin(a+(n-1)b).$$

Hier ist $b = 0{,}01$ des Quadranten, und a ein Glied der zu ergänzenden Reihe. Die Sinus und Cosinus brauchen nur bis 0, 25 des Quadranten berechnet zu werden, da nach (Goniometrie 50)

$$\sin(\tfrac{1}{2}R - A) = \tfrac{1}{2}(\cos A - \sin A)\sqrt{2}$$
$$\cos(\tfrac{1}{2}R - A) = \tfrac{1}{2}(\sin A + \cos A)\sqrt{2}$$

ist Die schon berechneten Glieder der ursprünglichen Reihe, dienen zur Prüfung der Rechnung.

IV. In der derivirten Reihe der S. und C. von 0; 0, 01: 0, 02; . . . . 0, 24; 0, 25, schalte man wieder je neun Glieder ein, mittelst des S. und C. von 0, 001, nach den gleich vorher angeführten Formeln.

V. Man schalte in der zweyten derivirten Reihe entweder durchgehends, oder in einem Theile derselben, nach dem Grade der vorgesetzten Genauigkeit, je neun Glieder ein; oder bediene sich, wenn die Differenzen klein genug sind, zugleich folgender Differenzen-Formeln. Es sey φ ein Bogen für den Halbmesser als Einheit; $\Delta\varphi$ ein endliches Wachsthum desselben; $\Delta\sin\varphi$ das zugehörige Wachsthum des Sinus, und $-\Delta\cos\varphi$ die zugehörige Abnahme des Cosinus, so ist (Differenzen-Rechnung, 27. 28.)

$$\Delta\sin\varphi = \cos\varphi(\Delta\varphi - \tfrac{1}{6}\Delta\varphi^3 + \text{etc.}) - \sin\varphi(\tfrac{1}{2}\Delta\varphi^2 - \tfrac{1}{24}\Delta\varphi^4 + \text{etc.})$$
$$-\Delta\cos\varphi = \sin\varphi(\Delta\varphi - \tfrac{1}{6}\Delta\varphi^3 + \text{etc.}) + \cos\varphi(\tfrac{1}{2}\Delta\varphi^2 - \tfrac{1}{24}\Delta\varphi^4 + \text{etc.})$$

In diesem Falle schalte man durch die goniometrischen Formeln nur vier Glieder statt neun ein, welches 5 Intervalle giebt, und fülle die Intervalle mittelst der Differenzenformeln aus.

VI. In eben diesem Falle lassen sich auch folgende indirecte Formeln zum Einschalten anwenden. Wenn drey

Winkel, A, B, C, in arithmetiſcher Proportion ſind, iſt (Goniometrie, III.)

$$\sin B = \tfrac{1}{2}(\sin A + \sin C) + 2 \sin B . \sin \tfrac{1}{2}(B - A)^2,$$

$$\cos B = \tfrac{1}{2}(\cos A + \cos C) + 2 \cos B . \sin \tfrac{1}{2}(B - A)^2,$$

wo man in dem zweyten Terminus des zweyten Theils Gleichung für sin B und cos B den erſten Terminus ſet oder ſie aus ſchon berechneten Tafeln, ſo weit dieſe ſie fern, zur ſchärfern Berechnung nehmen mag, wofern $\sin \tfrac{1}{2}(B - A)^2$ klein genug iſt, um den Fehler in d Factor sin B oder cos B dem vorgeſetzten Grade der G nauigkeit unſchädlich ſeyn zu laſſen.

VII. Man wird ſich auch mit Vortheil der Form für die Anfangsglieder der Differenzenreihen von Si und Coſinus, deren Winkel in arithmetiſcher Progreſſ ſind, aus Goniometrie III. bedienen können. Nämli wenn die Winkel ſind A, $A + \alpha$, $A + 2\alpha$, $A + 3\alpha$, etc. ſ

$\Delta \sin A = +2 \cos(A + \alpha) . \sin \alpha$; $\Delta^2 \sin A = -4 \sin(A + 2\alpha) . \sin \alpha^2$; $\Delta^3 \sin A = -8 \cos(A + 3$ $\sin \alpha^3$; $\Delta^4 \sin A = +16 \sin(A + 4\alpha) . \sin \alpha^4$; u. ſ. f

VIII. Wenn die dritten Unterſchiede der Glieder i einer derivirten Reihe nahe ſich gleich ſind, ſo interpo man auf folgende Art. Es ſeyn Q; $Q + \alpha$; $Q + \beta$ $Q + \beta + \omega$, vier Glieder einer Reihe, in den Stellen, w durch 0; 1; 10; 11 bezeichnet werden; zwiſchen dies ſoll in der Stelle x das Glied $Q + y$ eingeſchaltet werd ſo iſt, wenn die dritten Unterſchiede der Glieder, bey gl großen Abſtänden, unveränderlich ſind,

$$y = \frac{x}{10}\beta + \frac{x(10-x)(11-x)}{90}\left(\alpha - \frac{\beta}{10}\right) + \frac{x(10-x)(x-1)}{110}\left(\frac{\beta}{10} - \alpha\right),$$

(ſ. Einſchaltung.). Man ſchalte nämlich nach den g metriſchen Formeln für $\sin(A + B)$ und $\cos(A + B)$ bloß das erſte von allen neun Gliedern nach jedem G der zu ergänzenden Reihe ein; dieſes iſt, was hier $Q + \alpha$ und $Q + \beta + \omega$ bezeichnet iſt, da Q und $Q + \beta$

$\sin(a+nb) = \sin(a+(n-2)b) + 2\sin b.\cos(a+(n-1)b)$

$\cos(a+nb) + \cos(a+(n-2)b) - 2\sin b.\sin(a+(n-1)b).$

hier iſt $b = 0{,}01$ des Quadranten, und a ein Glied der ı ergänzenden Reihe. Die Sinus und Coſinus brauchen ur bis 0, 25 des Quadranten berechnet zu werden, da ach (Goniometrie 50)

$$\sin(\tfrac{1}{2}R - A) = \tfrac{1}{2}(\cos A - \sin A)\sqrt{2}$$
$$\cos(\tfrac{1}{2}R - A) = \tfrac{1}{2}(\sin A + \cos A)\sqrt{2}$$

ı Die ſchon berechneten Glieder der urſprünglichen Reihe, ienen zur Prüfung der Rechnung.

IV. In der derivirten Reihe der S. und C. von ; 0, 01: 0, 02; . . . . 0, 24; 0, 25, ſchalte an wieder je neun Glieder ein, mittelſt des S. und C. on 0, 001, nach den gleich vorher angeführten Formeln.

V. Man ſchalte in der zweyten derivirten Reihe ent- eder durchgehends, oder in einem Theile derſelben, nach m Grade der vorgeſetzten Genauigkeit, je neun Glie- r ein; oder bediene ſich, wenn die Differenzen klein ge- ug ſind, zugleich folgender Differenzen-Formeln. Es y φ ein Bogen für den Halbmeſſer als Einheit; $\Delta\varphi$ ein ıbliches Wachsthum deſſelben; $\Delta \sin\varphi$ das zugehörige Zachsthum des Sinus, und $-\Delta\cos\varphi$ die zugehörige bnahme des Coſinus, ſo iſt (Differenzen-Rechnung, 7. 28.)

$$\Delta\sin\varphi = \cos\varphi(\Delta\varphi - \tfrac{1}{6}\Delta\varphi^3 + \text{etc.}) - \sin\varphi(\tfrac{1}{2}\Delta\varphi^2 - \tfrac{1}{24}\Delta\varphi^4 + \text{etc.})$$
$$-\Delta\cos\varphi = \sin\varphi(\Delta\varphi - \tfrac{1}{6}\Delta\varphi^3 + \text{etc.}) + \cos\varphi(\tfrac{1}{2}\Delta\varphi^2 - \tfrac{1}{24}\Delta\varphi^4 + \text{etc.})$$

n dieſem Falle ſchalte man durch die goniometriſchen ormeln nur vier Glieder ſtatt neun ein, welches 5 Inter- ılle giebt, und fülle die Intervalle mittelſt der Differen- nformeln aus.

VI. In eben dieſem Falle laſſen ſich auch folgende in- recte Formeln zum Einſchalten anwenden. Wenn drey

Bey den Tangenten und Cotangenten entbehrt man den Vortheil, das Einschalten durch eine genaue goniometrische Formel unmittelbar zu bewerkstelligen. Aber mittelst der schon berechneten Sinus und Cosinus läßt es sich bequem ausrichten. Denn es ist aus Goniometrie (31.)

$$\text{tang}(\varphi+\omega)-\text{tang}\,\varphi=\frac{\sin\omega}{\cos\varphi.\cos(\varphi+\omega)},$$

$$\cot\varphi-\cot(\varphi+\omega)=\frac{\sin\omega}{\sin\varphi.\sin(\varphi+\omega)}.$$

Hat man mittelst der Eulerischen Formeln eine Reihe von Tangenten und Cotangenten für Winkel in arithmetischer Fortschreitung berechnet, so kann man die einzuschaltenden Glieder ganz leicht und genau durch diese Formeln finden, indem man für den Einschaltungswinkel ω nach und nach kleinere Werthe setzt.

Man hat nur nöthig, die Tangenten und Cotangenten der Winkel unter $\frac{1}{3}$ des Quadranten zu berechnen. Denn es ist (Goniometrie, 48.)

$$\cot(\tfrac{1}{2}R-A)-\text{tang}(\tfrac{1}{2}R-A)=2\,\text{tang}\,2A.$$

Nimmt man $2A=\frac{1}{3}R+2\alpha$, wo 2α kleiner als $\frac{1}{3}R$ ist, so ist $\frac{1}{2}R-A=\frac{1}{3}R-\alpha$. Man findet also aus den Tangenten und Cotangenten der Winkel zwischen $\frac{1}{6}R$ und $\frac{1}{3}R$ die Tangenten eben so vieler Winkel zwischen $\frac{1}{3}R$ und $\frac{2}{3}R$, deren Unterschiede aber doppelt so groß als die Unterschiede jener sind. Um die Tangenten der in der Mitte zwischen ihnen liegenden Winkel auch zu finden, dient folgende Formel für die Tangenten dreyer Winkel, A, B, C, die in arithmetischer Proportion stehen, (Goniometrie, III.),

$$\text{tang}\,B=\tfrac{1}{2}(\text{tg}\,A+\text{tg}\,C)-\frac{\text{tg}\,B.\sin(B-A)^2}{\cos A.\cos C}.$$

In dem zweyten Terminus des zweyten Theils mag man, wegen des kleinen Factors, $\sin(B-A)^2$, für den Factor tang B nur einen nahe kommenden Werth aus den schon berechneten Tafeln setzen.

Da die Cotangenten kleiner Winkel, oder die Tangen- s der von einem Rechten wenig verſchiedenen Winkel, oß ſind, und ſchnell ſehr anwachſen, ſo iſt die Interpola- m bey ihnen weniger ſicher, wenn nicht die Glieder, zwi- en welchen die Einſchaltung vorgenommen wird, weit nug berechnet werden. Ein Hülfsmittel gewährt die rmel,

$$\cot A = 2\cot 2A + \operatorname{tang} A,$$

die $\cot 2A$ ſich leichter mit Sicherheit finden läßt, als t A. Dieſe Formel, oder die ihr gleichgültige,

$$\operatorname{tang}(\tfrac{1}{2}R + A) - \operatorname{tang}(\tfrac{1}{2}R - A) = 2\operatorname{tang} 2A,$$

dadurch ſehr brauchbar, daß ſie bey der gleich vorher ngewieſenen Interpolation einer Tangente zwiſchen zwey idern gegebenen die Anzahl der dadurch zu findenden angenten auf die Hälfte herunter bringt.

Die Secanten und Coſecanten werden leicht durch ddition und Subtraction gefunden. Es iſt, (Goniome- ie, 43. 44.),

$$\operatorname{sec} 2A = \operatorname{tang} 2A + \operatorname{tang}(45° - A),$$
$$\operatorname{cosec} 2A = \cot 2A + \operatorname{tang} A.$$

Setzt man für A eine arithmetiſche Reihe von Wer- en, ſo werden für die Winkel der Secanten die Unter- hiede doppelt ſo groß als in jener. Dieſe Unterſchiede r halbiren, dient die Formel,

$$\operatorname{sec} B = \tfrac{1}{2}(\operatorname{sec} A + \operatorname{sec} C)$$
$$- \operatorname{sec} A . \operatorname{sec} B . \operatorname{sec} C (1 + 2\cos(B - A) - \cos 2B)$$
$$\times \sin \tfrac{1}{2}(B - A)^2,$$

o A, B, C, in arithmetiſcher Proportion ſind. Im em zweyten Terminus der Formel mag für sec B der er- e Terminus geſetzt, oder der Werth aus den ſchon berech- eten Tafeln genommen werden, ſo weit ihn dieſe liefern.

Aus dieſer Behandlung der cyklometriſchen Reihen eht man, wie mancherley Veranſtaltungen erforderlich yn können, um eine analytiſche Reihe zum genauen arith- ietiſchen Gebrauch zuzurichten.

Zur Erſparung der Multiplication und Diviſion mit den großen trigonometriſchen Zahlen erdachte Neper (John Napier, Baron von Merchiſton in Schottland) ſeine Logarithmen, die er 1614 bekannt machte. Er ſetzte den Sinus totus = 10 Millionen, deſſen Logarithmus = 0, den Logarithmen der Zahl 9999999 zwiſchen 1,0000001, und 1,0000000. In der Tafel iſt 1 als Logarithme von sin 89° 59′ angeſetzt, weil die Winkel nur nach ganzen Minuten fortgehen. Der Logarithme des sin 30° oder von 5000000 iſt bey ihm 6931469, der in dem gegenwärtig üblichen Syſtem iſt — 0,3010300, wofür deſſen Complement 9,6989700 in unſern Tafeln ſteht. Das Neperſche Syſtem von Logarithmen iſt das der natürlichen mit einer gewiſſen Abänderung. Briggs nahm das Verhältniß 1:10 zum Grundverhältniſſe, ſo daß er zuerſt den Logarithmen von $\frac{1}{10}$ gleich Eins ſetzte, hernach aber log 10 = 1 nahm. Er berechnete nach dieſem Syſtem eine Tafel der logarithmiſchen Sinus und Tangenten für alle Hunderttheile jedes Grades bis zur vierzehnten Decimalſtelle, und eine Tafel der natürlichen Sinus bis zur funfzehnten, der Tangenten und Secanten bis zur zehnten Stelle Dieſe Tafeln ſind zu Gouda, in Adrians Vlacq Verlage gedruckt, und erſchienen daſelbſt 1633 in Folio, unter dem Titel, Trigonometria Britannica. Es iſt kein zweyter Abdruck, wie Montücla in der Geſch. der Mathem. II. Th. 27 S. ſagt. Briggs begleitete die Tafeln mit einem ausführlichen Unterrichte von der Verfertigung des Canons ſowohl der trigonometriſchen Linien als ihrer Logarithmen. Der Tod übereilte ihn, da er noch den Unterricht von dem Gebrauche und der Anwendung der Tafeln beyfügen wollte. Dieſes leiſtete an ſeiner Stelle Heinrich Gellibrand, Profeſſor der Aſtronomie an dem Greshamiſchen Collegium zu London, der auf dem Titel als Herausgeber des Werks genannt iſt.

Adrian Vlacq, der die von Briggs gelaſſene Lücke in den Logarithmen der Zahlen von 20000 bis 90000 ausfüllte, und die Logarithmen aller Zahlen von 1 bis 100000 bis auf die zehnte Decimalſtelle in der Arithme-

ca logarithmica, Goudae 1628, fol. 4te Ausgabe eferte, fügte dieser die Logarithmen der Sinus, Tangen: n und Secanten, bis zur zehnten Decimalstelle, für ein: lne Minuten, bey. In demselben Jahre, 1633, in elchem die Trigonometria Britannica erschien, gab r einen großen logarithmischen Canon der Dreyecke eraus, worin die Logarithmen der Sinus und Tangenten on 10 zu 10 Secunden auf zehn Decimalstellen enthalten nd, unter dem Titel: Trigonometria artificialis, sive agnus Canon triangulorum logarithmicus, etc. Der Canon des Rhäticus ist dabey zum Grunde gelegt. Wo dieser in den letzten Ziffern Unrichtigkeiten hat, könn: en die darauf sich beziehenden Logarithmen auch fehler: aft seyn. Die Einleitung ist fast ganz aus der Brig: isch = Gellibrandischen Ausgabe genommen.

Die beiden großen und seltenen Werke von Vlacq at Vega in einer verbesserten, neu geordneten und ver: nehrten schönen Ausgabe wieder abdrucken lassen, mit ei: ier Einleitung, worin die neuere Berechnungsart der ogarithmen gezeigt wird, Leipzig 1794, fol. In den eiden ersten und letzten Graden des Quadranten gehen ie Logarithmen durch alle einzelne Secunden. Das Werk verdient den Titel: Thesaurus Logarithmorum ompletus.

Für die Logarithmen der Sinus und Cosinus, so: wohl die natürlichen als gemeinen tabularischen, hat Euler in der Introd. in Anal Infin. C. XI. ähn: iche numerische Formeln wie für die Sinus und Co: sinus selbst geliefert. Es sind die entwickelten Formeln in Cyklometrie. (36, 37.).

ne einen, bloß zur Sicherheit bey viel
Aufwand von Berechnungen. Wol
Canon oder ein Stück deſſelben berec
diejenigen Größen, zwiſchen welchen
ſchaltet werden ſollen, vortheilhaft aus
Einſchaltung mehrere, ſowohl bequeme a

Um die Berechnung der gonio
erleichtern, hat Euler die unverä
in den Formeln für dieſelben ſehr we
Introd. in Anal Infin. T. I. cap.
bekommen dadurch folgende Geſtalt.
Halbmeſſer als Einheit der Bogen =
ſich zum Quadranten wie m zu n,

$$\text{ſo iſt } \varphi = \frac{m}{n} \cdot \frac{\pi}{2} \text{ un}$$

$$\text{Sin}\varphi =$$

$$+\frac{m}{n} \cdot 1,570796\ 3267 \Big| +$$
$$-\frac{m^3}{n^3} \cdot 0,645964\ 0975 \Big| -\frac{m^2}{n^2}$$
$$+\frac{m^5}{n^5} \cdot 0,079692\ 6262 \Big| +\frac{m^4}{n^4}$$
$$-\frac{m^7}{n^7} \cdot 0,004681\ 7541 \Big| -\frac{m^6}{n^6}$$

Tang φ =		Cot φ =	
$\frac{2mn}{nn-mm}$	.0,636619 7723	+ $\frac{n}{m}$	.0,636619 7723
$\frac{m}{n}$	.0,297556 7820	− $\frac{4nn}{4nn-mm}$	.0,318309 8861
$\frac{m^3}{n^3}$	.0,018688 6502	− $\frac{m}{n}$	.0,205288 8894
$\frac{m^5}{n^5}$	.0,001842 4752	− $\frac{m^3}{n^3}$	.0,006551 0747
$\frac{m^7}{n^7}$	.0,000197 5800	− $\frac{m^5}{n^5}$	.0,000345 0292
$\frac{m^9}{n^9}$	.0,000021 6977	− $\frac{m^7}{n^7}$	.0,000020 2791
$\frac{m^{11}}{n^{11}}$	.0,000002 4011	− $\frac{m^9}{n^9}$	.0,000001 2366
$\frac{m^{13}}{n^{13}}$	.0,000000 2664	− $\frac{m^{11}}{n^{11}}$	.0.000000 0764
$\frac{m^{15}}{n^{15}}$	.0,000000 0295	− $\frac{m^{13}}{n^{13}}$	.0,000000 0047
etc.		− etc.	

Die Formeln für sin φ und cos φ sind aus denen in
yklometrie (5.6.) die für tang φ und cot φ aus denen
if. 38, 39. hergeleitet. Bey Euler sind die numerischen
actoren für Sinus und Cosinus bis zur 28sten Deci-
alstelle; für Tangente und Cotangente bis zur 13ten
gegeben.

Da man jetzt damit umgeht, das Decimalsystem in
len mathematischen Rechnungen einzuführen, so hat dies
s eine neue Berechnung der geometrischen Linien für die
ecimal = Eintheilung des Quadranten veranlaßt.
eutschland ist darin Frankreich zuvorgekommen. Hoert, Professor der Mathematik und Physik an der Mi-
är-Akademie des Artilleriecorps zu Berlin, und Ide-
r, Astronom der Preuß. Akademie der Wissenschaften,
ben mit der größten Genauigkeit und Unverdrossenheit
eue trigonometrische Tafeln für die Deci-
aleintheilung des Quadranten berechnet, und
Berlin 1799 herausgegeben. Von 0 bis 0,03 des

sechsten genommen; und in den ersten
wo die Glieder der Hauptreihe sich
bis zum fünften. Die Herausgeber h
in der sehr lehrreichen Einleitung ausf

Um die Anwendung verschiedener K
so weitläuftigen Rechnung zu zeigen,
ren beschreiben, welches sie, ohne Gefa
keit, sehr abkürzt.

Wenn die Sinus und Cosinus n
eintheilung des Quadranten berechne
suche man

I. Dieselben für 0,1; 0,01
0,00001 des Quadranten nach den
theilten Eulerischen Formeln. Diese

II. Man berechne die Sinus und
0,1; 0,2; 0,3; 0,4; 0,5, nach d

$$\sin n A = \sin(n-2)A + 2\sin$$

$$\cos n A = \cos(n-2)A - 2\sin$$

welche man aus den Formeln (Gonion
wenn daselbst $a = 0$, und A für b g
$A = 0,1$ des Quadranten, und s
Factor. Das letzte Glied der Reih
welches leid

$$\sin(a+nb) = \sin(a+(n-2)b) + 2\sin b.\cos(a+(n-1)b)$$
$$\cos(a+nb) + \cos(a+(n-2)b) - 2\sin b.\sin(a+(n-1)b).$$

Hier ist $b = 0{,}01$ des Quadranten, und a ein Glied der zu ergänzenden Reihe. Die Sinus und Cosinus brauchen nur bis 0, 25 des Quadranten berechnet zu werden, da nach (Goniometrie 50)

$$\sin(\tfrac{1}{2}R - A) = \tfrac{1}{2}(\cos A - \sin A)\sqrt{2}$$
$$\cos(\tfrac{1}{2}R - A) = \tfrac{1}{2}(\sin A + \cos A)\sqrt{2}$$

ist Die schon berechneten Glieder der ursprünglichen Reihe dienen zur Prüfung der Rechnung.

IV. In der derivirten Reihe der S. und C. von 0; 0, 01: 0, 02; . . . . 0, 24; 0, 25, schalte man wieder je neun Glieder ein, mittelst des S. und C. von 0, 001, nach den gleich vorher angeführten Formeln.

V. Man schalte in der zweyten derivirten Reihe entweder durchgehends, oder in einem Theile derselben, nach dem Grade der vorgesetzten Genauigkeit, je neun Glieder ein; oder bediene sich, wenn die Differenzen klein genug sind, zugleich folgender Differenzen-Formeln. Es sey φ ein Bogen für den Halbmesser als Einheit; $\Delta\varphi$ ein endliches Wachsthum desselben; $\Delta\sin\varphi$ das zugehörige Wachsthum des Sinus, und $-\Delta\cos\varphi$ die zugehörige Abnahme des Cosinus, so ist (Differenzen-Rechnung, 27. 28.)

$$\Delta\sin\varphi = \cos\varphi(\Delta\varphi - \tfrac{1}{6}\Delta\varphi^3 + \text{etc.}) - \sin\varphi(\tfrac{1}{2}\Delta\varphi^2 - \tfrac{1}{24}\Delta\varphi^4 + \text{etc.})$$
$$-\Delta\cos\varphi = \sin\varphi(\Delta\varphi - \tfrac{1}{6}\Delta\varphi^3 + \text{etc.}) + \cos\varphi(\tfrac{1}{2}\Delta\varphi^2 - \tfrac{1}{24}\Delta\varphi^4 + \text{etc.})$$

In diesem Falle schalte man durch die goniometrischen Formeln nur vier Glieder statt neun ein, welches 5 Intervalle giebt, und fülle die Intervalle mittelst der Differenzenformeln aus.

VI. In eben diesem Falle lassen sich auch folgende indirecte Formeln zum Einschalten anwenden. Wenn drey

Winkel, A, B, C, in arithmetiſcher Proportion ſind, ſo iſt (Goniometrie, III.)

$$\sin B = \tfrac{1}{2}(\sin A + \sin C) + 2 \sin B . \sin \tfrac{1}{2}(B - A)^2,$$

$$\cos B = \tfrac{1}{2}(\cos A + \cos C) + 2 \cos B . \sin \tfrac{1}{2}(B - A)^2,$$

wo man in dem zweyten Terminus des zweyten Theils der Gleichung für sin B und cos B den erſten Terminus ſetzen, oder ſie aus ſchon berechneten Tafeln, ſo weit dieſe ſie liefern, zur ſchärfern Berechnung nehmen mag, wofern nur $\sin \tfrac{1}{2}(B - A)^2$ klein genug iſt, um den Fehler in dem Factor sin B oder cos B dem vorgeſetzten Grade der Genauigkeit unſchädlich ſeyn zu laſſen.

VII. Man wird ſich auch mit Vortheil der Formeln für die Anfangsglieder der Differenzenreihen von Sinus und Coſinus, deren Winkel in arithmetiſcher Progreſſion ſind, aus Goniometrie III. bedienen können. Nämlich, wenn die Winkel ſind A, $A + \alpha$, $A + 2\alpha$, $A + 3\alpha$, etc. ſo iſt $\Delta \sin A = +2 \cos(A + \alpha) . \sin \alpha$; $\Delta^2 \sin A = -4 \sin(A + 2\alpha) . \sin \alpha^2$; $\Delta^3 \sin A = -8 \cos(A + 3\alpha) . \sin \alpha^3$; $\Delta^4 \sin A = +16 \sin(A + 4\alpha) . \sin \alpha^4$; u. ſ. f.

VIII. Wenn die dritten Unterſchiede der Glieder in einer derivirten Reihe nahe ſich gleich ſind, ſo interpolirt man auf folgende Art. Es ſeyn Q; $Q + \alpha$; $Q + \beta$; $Q + \beta + \omega$, vier Glieder einer Reihe, in den Stellen, die durch 0; 1; 10; 11 bezeichnet werden; zwiſchen dieſen ſoll in der Stelle x das Glied $Q + y$ eingeſchaltet werden, ſo iſt, wenn die dritten Unterſchiede der Glieder, bey gleich großen Abſtänden, unveränderlich ſind,

$$y = \frac{x}{10}\beta + \frac{x(10-x)(11-x)}{90}\left(\alpha - \frac{\beta}{10}\right) + \frac{x(10-x)(x-1)}{110}\left(\frac{\beta}{10} - \omega\right),$$

(ſ. Einſchaltung.). Man ſchalte nämlich nach den geometriſchen Formeln für $\sin(A + B)$ und $\cos(A + B)$ bloß das erſte von allen neun Gliedern nach jedem Gliede der zu ergänzenden Reihe ein; dieſes iſt, was hier durch $Q + \alpha$ und $Q + \beta + \omega$ bezeichnet iſt, da Q und $Q + \beta$ zwey

nächſte Glieder der Reihe ſelbſt ſind. Die Stellen der beiden letztern ſind 0 und 10, jener 1 und 11. Der erſte Theil der Formel iſt der einfache Proportionaltheil; die beiden andern ſind die Verbeſſerungen wegen des ungleichförmigen Zunehmens oder Abnehmens, durch den Unterſchied von dem mittlern Werthe der Veränderungen. Die Vorzeichen in der Formel ſind auf Sinus eingerichtet. Für Coſinus nehme man die Veränderungen bloß nach der Quantität, ohne die Vorzeichen von α, β, $\beta+\omega$ und γ zu ändern, aber der zweyte und dritte Theil der Formeln ſind ſubtractiv zu nehmen. Wo es nöthig ſcheinen ſollte, eine Probe der Interpolation zu haben, berechne man den Sinus und Coſinus des mittelſten Winkels nach den Formeln für die Zuſammenſetzung deſſelben, oder folgendergeſtalt. Es ſeyn A, B, C, drey Winkel in arithmetiſcher Proportion, ſo iſt

$$\tfrac{1}{2}(\sin A+\sin C)\operatorname{ſec}\tfrac{1}{2}(C-A)=\sin B,$$

$$\tfrac{1}{2}(\sin A+\operatorname{coſ} C)\operatorname{ſec}\tfrac{1}{2}(C-A)=\operatorname{coſ} B,$$

aus Goniometrie (28 u. 14.). Für die Secanten kann man nach der Formel (Cyklometrie, 22.) ſich eben ſolche Reihen, wie die Euleriſchen für Sinus und Coſinus, berechnen, die aber nur aus zwey oder drey Gliedern zu beſtehen brauchen, weil C — A hier ein kleiner Winkel iſt.

IX. Wenn die zweyten Unterſchiede einer derivirten Reihe beſtändig ſind, ſo interpolire man ſie folgendergeſtalt. Es ſeyn Q; $Q+\alpha$; $Q+\beta$, drey nächſte Glieder einer ſolchen Reihe, deren Stellen durch 0, 10, 20 bezeichnet werden; ein einzuſchaltendes Glied in der Stelle x ſey, $=Q+y$, ſo iſt

$$y=\frac{x}{10}\alpha+\frac{x(10-x)}{100}(\alpha-\tfrac{1}{2}\beta),$$

oder

$$y=\frac{x}{10}\alpha-\frac{x(x-10)}{100}(\alpha-\tfrac{1}{2}\beta).$$

X. Endlich, wo die erſten Unterſchiede ſich gleich bleiben, braucht man nur die einfachen Proportionaltheile den berechneten Gliedern zuzuſetzen.

Bey den Tangenten und Cotangenten entbehrt man den Vortheil, das Einſchalten durch eine genaue goniometriſche Formel unmittelbar zu bewerkſtelligen. Aber mittelſt der ſchon berechneten Sinus und Coſinus läßt es ſich bequem ausrichten. Denn es iſt aus Goniometrie (31.)

$$\text{tang}(\varphi+\omega)-\text{tang}\,\varphi=\frac{\sin\omega}{\cos\varphi.\cos(\varphi+\omega)},$$

$$\cot\varphi-\cot(\varphi+\omega)=\frac{\sin\omega}{\sin\varphi.\sin(\varphi+\omega)}.$$

Hat man mittelſt der Euleriſchen Formeln eine Reihe von Tangenten und Cotangenten für Winkel in arithmetiſcher Fortſchreitung berechnet, ſo kann man die einzuſchaltenden Glieder ganz leicht und genau durch dieſe Formeln finden, indem man für den Einſchaltungswinkel ω nach und nach kleinere Werthe ſetzt.

Man hat nur nöthig, die Tangenten und Cotangenten der Winkel unter $\frac{1}{3}$ des Quadranten zu berechnen. Denn es iſt (Goniometrie, 48.)

$$\cot(\tfrac{1}{2}R-A)-\text{tang}(\tfrac{1}{2}R-A)=2\,\text{tang}\,2A.$$

Nimmt man $2A=\frac{1}{3}R+2\alpha$, wo 2α kleiner als $\frac{1}{3}R$ iſt, ſo iſt $\frac{1}{2}R-A=\frac{1}{3}R-\alpha$. Man findet alſo aus den Tangenten und Cotangenten der Winkel zwiſchen $\frac{1}{6}R$ und $\frac{1}{3}R$ die Tangenten eben ſo vieler Winkel zwiſchen $\frac{1}{3}R$ und $\frac{2}{3}R$, deren Unterſchiede aber doppelt ſo groß als die Unterſchiede jener ſind. Um die Tangenten der in der Mitte zwiſchen ihnen liegenden Winkel auch zu finden, dient folgende Formel für die Tangenten dreyer Winkel, A, B, C, die in arithmetiſcher Proportion ſtehen, (Goniometrie, III.),

$$\text{tang}\,B=\tfrac{1}{2}(\text{tg}\,A+\text{tg}\,C)-\frac{\text{tg}\,B.\sin(B-A)^2}{\cos A.\cos C}.$$

In dem zweyten Terminus des zweyten Theils mag man, wegen des kleinen Factors, $\sin(B-A)^2$, für den Factor tang B nur einen nahe kommenden Werth aus den ſchon berechneten Tafeln ſetzen.

Da die Cotangenten kleiner Winkel, oder die Tangen- n der von einem Rechten wenig verſchiedenen Winkel, oß ſind, und ſchnell ſehr anwachſen, ſo iſt die Interpola- on bey ihnen weniger ſicher, wenn nicht die Glieder, zwi- ſen welchen die Einſchaltung vorgenommen wird, weit nug berechnet werden. Ein Hülfsmittel gewährt die ormel,

$$\cot A = 2\cot 2A + \text{tang}\, A,$$

i die cot 2 A ſich leichter mit Sicherheit finden läßt, als ot A. Dieſe Formel, oder die ihr gleichgültige,

$$\text{tang}(\tfrac{1}{2}R + A) - \text{tang}(\tfrac{1}{2}R - A) = 2\,\text{tang}\, 2A,$$

t dadurch ſehr brauchbar, daß ſie bey der gleich vorher ngewieſenen Interpolation einer Tangente zwiſchen zwey ndern gegebenen die Anzahl der dadurch zu findenden angenten auf die Hälfte herunter bringt.

Die Secanten und Coſecanten werden leicht durch ddition und Subtraction gefunden. Es iſt, (Goniome- ie, 43. 44.),

$$\text{ſec}\, 2A = \text{tang}\, 2A + \text{tang}(45° - A),$$

$$\text{coſec}\, 2A = \cot 2A + \text{tang}\, A.$$

Setzt man für A eine arithmetiſche Reihe von Wer- ſen, ſo werden für die Winkel der Secanten die Unter- hiede doppelt ſo groß als in jener. Dieſe Unterſchiede r halbiren, dient die Formel,

$$\text{ec}\, B = \tfrac{1}{2}(\text{ſec}\, A + \text{ſec}\, C)$$

$$- \text{ſec}\, A.\,\text{ſec}\, B.\,\text{ſec}\, C\,(1 + 2\cos(B - A) - \cos 2B) \times \sin\tfrac{1}{2}(B - A)^2,$$

o A, B, C, in arithmetiſcher Proportion ſind. In em zweyten Terminus der Formel mag für ſec B der er- e Terminus geſetzt, oder der Werth aus den ſchon berech- eten Tafeln genommen werden, ſo weit ihn dieſe liefern.

Aus dieſer Behandlung der cyklometriſchen Reihen ieht man, wie mancherley Veranſtaltungen erforderlich yn können, um eine analytiſche Reihe zum genauen arith- ietiſchen Gebrauch zuzurichten.

Zur Ersparung der Multiplication und Division mit den großen trigonometrischen Zahlen erdachte Neper (John Napier, Baron von Merchiston in Schottland) seine Logarithmen, die er 1614 bekannt machte. Er setzte den Sinus totus = 10 Millionen, dessen Logarithmus = 0, den Logarithmen der Zahl 9999999 zwischen 1,0000001, und 1,0000000. In der Tafel ist 1 als Logarithme von sin 89° 59′ angesetzt, weil die Winkel nur nach ganzen Minuten fortgehen. Der Logarithme des sin 30° oder von 5000000 ist bey ihm 6931469, der in dem gegenwärtig üblichen System ist — 0,3010300, wofür dessen Complement 9,6989700 in unsern Tafeln steht. Das Nepersche System von Logarithmen ist das der natürlichen mit einer gewissen Abänderung. Briggs nahm das Verhältniß 1:10 zum Grundverhältnisse, so daß er zuerst den Logarithmen von $\frac{1}{10}$ gleich Eins setzte, hernach aber log 10 = 1 nahm. Er berechnete nach diesem System eine Tafel der logarithmischen Sinus und Tangenten für alle Hunderttheile jedes Grades bis zur vierzehnten Decimalstelle, und eine Tafel der natürlichen Sinus bis zur funfzehnten, der Tangenten und Secanten bis zur zehnten Stelle Diese Tafeln sind zu Gouda, in Adrians Vlacq Verlage gedruckt, und erschienen daselbst 1633 in Folio, unter dem Titel, Trigonometria Britannica. Es ist kein zweyter Abdruck, wie Montücla in der Gesch. der Mathem. II. Th. 27 S. sagt. Briggs begleitete die Tafeln mit einem ausführlichen Unterrichte von der Verfertigung des Canons sowohl der trigonometrischen Linien als ihrer Logarithmen. Der Tod übereilte ihn, da er noch den Unterricht von dem Gebrauche und der Anwendung der Tafeln beyfügen wollte. Dieses leistete an seiner Stelle Heinrich Gellibrand, Professor der Astronomie an dem Greshamischen Collegium zu London, der auf dem Titel als Herausgeber des Werks genannt ist.

Adrian Vlacq, der die von Briggs gelassene Lücke in den Logarithmen der Zahlen von 20000 bis 90000 ausfüllte, und die Logarithmen aller Zahlen von 1 bis 100000 bis auf die zehnte Decimalstelle in der Arithme-

ca logarithmica, Goudae 1628, fol. 4te Ausgabe
:ferte, fügte dieser die Logarithmen der Sinus, Tangen-
n und Secanten, bis zur zehnten Decimalstelle, für ein-
lne Minuten, bey. In demselben Jahre, 1633, in
elchem die Trigonometria Britannica erschien, gab
: einen großen logarithmischen Canon der Dreyecke
:raus, worin die Logarithmen der Sinus und Tangenten
)n 10 zu 10 Secunden auf zehn Decimalstellen enthalten
nd, unter dem Titel: Trigonometria artificialis, sive
iagnus Canon triangulorum logarithmicus, etc.
)er Canon des Rhäticus ist dabey zum Grunde gelegt.
Bo dieser in den letzten Ziffern Unrichtigkeiten hat, könn-
:n die darauf sich beziehenden Logarithmen auch fehler-
aft seyn. Die Einleitung ist fast ganz aus der Brig-
isch-Gellibrandischen Ausgabe genommen.

Die beiden großen und seltenen Werke von Vlacq
at Vega in einer verbesserten, neu geordneten und ver-
iehrten schönen Ausgabe wieder abdrucken lassen, mit ei-
er Einleitung, worin die neuere Berechnungsart der
ogarithmen gezeigt wird, Leipzig 1794, fol. In den
eiden ersten und letzten Graden des Quadranten gehen
ie Logarithmen durch alle einzelne Secunden. Das
Werk verdient den Titel: Thesaurus Logarithmorum
ompletus.

Für die Logarithmen der Sinus und Cosinus, so-
wohl die natürlichen als gemeinen tabularischen, hat
Euler in der Introd. in Anal Infin. C. XI. ähn-
iche numerische Formeln wie für die Sinus und Co-
inus selbst geliefert. Es sind die entwickelten Formeln
n Cyklometrie. (36, 37.).

$$\text{Log. tabul. sin Arc. } \frac{m}{n} \cdot 90^\circ =$$

$$l\,m + l(2n-m) + l(2n+m) - 3\,l\,n$$

$$+ \quad 9,594059\ 885702$$

$$- \frac{m^2}{n^2} \cdot 0,070022\ 826605.$$

$$- \frac{m^4}{n^4} \cdot 0,001117\ 266441.$$

$$- \frac{m^6}{n^6} \cdot 0,000039\ 229146$$

$$- \frac{m^8}{n^8} \cdot 0,000001\ 729270.$$

$$- \frac{m^{10}}{n^{10}} \cdot 0,000000\ 084362.$$

$$- \frac{m^{12}}{n^{12}} \cdot 0,000000\ 004348.$$

$$- \text{ etc.}$$

Zweytens iſt

$$\text{Log. tabul. cos Arc. } \frac{m}{n} \cdot 90^\circ =$$

$$l(n-m) + l(n+m) - 2\,l\,n$$

$$+ \quad 10,000000\ 000000$$

$$- \frac{m^2}{n^2} \cdot 0,101494\ 859341.$$

$$- \frac{m^4}{n^4} \cdot 0,003187\ 294065$$

$$- \frac{m^6}{n^6} \cdot 0,000209\ 485800$$

$$- \frac{m^8}{n^8} \cdot 0,000016\ 848348.$$

$$- \frac{m^{10}}{n^{10}} \cdot 0,000001\ 480193.$$

$$-\frac{m^{12}}{n^{12}} \cdot 0,000000\ 136502$$

$$-\frac{m^{14}}{n^{14}} \cdot 0,000000\ 012981.$$

$$-\frac{m^{16}}{n^{16}} \cdot 0,000000\ 001261$$

— etc.

Der Punct am Ende bedeutet, daß die folgenden Ziffern mehr als 5 in der 13ten Stelle betragen. Der Charakteristik sind 10 geliehen, wie gewöhnlich ist.

Euler hat diese Logarithmen bis zur 15ten Decimalstelle berechnet. In den Tables portatives de Logarithmes, par Callet, à Paris 1795, sind sie bis zur 20sten aufgeführt. Eben daselbst sind diese numerischen Formeln auch nach den analytischen in Cyklometrie (40.), und noch nach drey auf ähnliche Art convergirend gemachten, berechnet mitgetheilt, jede auf 20 Decimalstellen. Ich setze zur Vergleichung das vierte Paar dieser Formeln her, bis zur 12ten Decimalstelle, und bis zur achten Potenz von $\frac{m}{n}$.

$$\text{Log. sin}\frac{m\pi}{2n} = 1m + 1(2n-m) + 1(2n+m)$$
$$+1(4n-m) + 1(4n+m) + 1(6n-m)$$
$$+1(6n+m) + 1(8n-m) + 1(8n+m)$$
$$+1(10n-m) + 1(10n+m) - 11\,1n$$

$$+\quad 3,02745\ 74282\ 95$$

$$-\frac{m^2}{n^2} \cdot 0,01968\ 68907\ 79.$$

$$-\frac{m^4}{n^4} \cdot 0,00002\ 67539\ 61$$

$$-\frac{m^6}{n^6} \cdot 0,00000\ 00863\ 59.$$

$$-\frac{m^8}{n^8} \cdot 0,00000\ 00003\ 69.$$

— etc.

$$\text{Log. cof}\frac{m\pi}{2n} = l(n-m)+l(n+m)+l(3n-m)$$
$$+l(3n+m)+l(5n-m)+l(5n+m)+l(7m-m)$$
$$+l(7n+m)+l(9n-m)+l(9n+m)$$
$$-10ln$$

$$+ \quad 4,04913\ 63829\ 81$$
$$-\frac{m^2}{n^2}\cdot 0,02164\ 33246\ 69.$$
$$-\frac{m^4}{n^4}\cdot 0,00003\ 54913\ 42.$$
$$-\frac{m^6}{n^6}\cdot 0,00000\ 01379\ 59.$$
$$-\frac{m^8}{n^8}\cdot 0,00000\ 00007\ 09.$$

Die abgesonderten Logarithmen machen die Rechnung bey kleinern Winkeln beschwerlich, daher diese letztern Formeln nur bey größern Winkeln zu gebrauchen sind.

Nach diesen Formeln kann man nun die Logarithmen der Sinus und Cosinus, deren Winkel eine arithmetische Reihe ausmachen, berechnen, und je zwey auf einander folgende so nahe bringen, daß die Reihe, oder ein Stück derselben, bis zu einer gewissen Stelle der Decimalen eine arithmetische der dritten oder zweyten Ordnung sey, deren dritte oder zweyte Unterschiede bis dahin beständig sind. Darauf nehme man das Interpoliren vor, wie bey den Sinus und Cosinus selbst angewiesen ist. Wo die Formeln die Arbeit zu langwierig machen möchten, suche man die Logarithmen unmittelbar aus den Zahlwerthen der Sinus und Cosinus. Dazu wird in dem Artikel, Logarithme, für große Zahlen Anleitung gegeben.

Man hat nur nöthig die Logarithmen der Sinus und Cosinus in dem ersten Drittheil des Quadranten zu berechnen. Denn da $\sin 2A = 2 \sin A . \cos A$ ist, so ist . . $\log. \sin 2A = \log. \sin A + \log. \cos A + \log. 2$. Aber man muß in dem ersten Drittheil von doppelt so vielen Sinus

und Cosinus die Logarithmen berechnet haben, als in dem zweyten Drittheil sollen gefunden werden, oder in diesem sich durch die Interpolation helfen können.

Die Logarithmen der Sinus und Cosinus kann man durch diese selbst oder andere goniometrische Functionen interpoliren. Es seyn A, B, C, drey Winkel in arithmetischer zunehmender Proportion, so ist aus Goniometrie (28.)

$$\sin C = 2 \sin B . \cos(B - A) - \sin A.$$

Man setze $2 \sin B . \cos(B - A) = p$; $\sin A = q$, so ist

$$\log. \sin C = \log.(p - q) = \log. q + \log.(\frac{p}{q} - 1).$$

Man mache $\frac{p}{q} - 1 = \frac{1+y}{1-y}$, so ist

$$\log. \text{nat.}(\frac{p}{q} - 1) = 2(y + \tfrac{1}{3}y^3 + \tfrac{1}{5}y^5 + \text{etc.}),$$ (s. Logarithmen). Jene Gleichung giebt $\frac{p}{q} = \frac{2}{1-y}$, oder $1 - y = \frac{2q}{p}$, und $y = \frac{p-2q}{p} = \frac{\sin C - \sin A}{\sin C + \sin A}$ $= \frac{\tg \frac{1}{2}(C-A)}{\tg \frac{1}{2}(C+A)}$, oder $y = \tg(B-A) . \cot B$. Folglich ist

$$\log. \text{nat.} \sin C = \log. \text{nat.} \sin A + 2(y + \tfrac{1}{3}y^3 + \tfrac{1}{5}y^5 + \text{etc.}).$$

Zweytens, es ist aus Goniometrie (28.)

$$\cos C = 2 \cos B . \cos(B - A) - \cos A.$$

In der vorhergehenden Rechnung vertausche man die Sinus der Winkel mit den Cosinus, und y mit $-z$, so ist

$$z = \frac{\cos A - \cos C}{\cos A + \cos C} = \tang \tfrac{1}{2}(C-A) . \tang \tfrac{1}{2}(C+A),$$

oder $z = \tang(B-A) . \tg B$, und

$$\log. \text{nat.} \cos C = \log. \text{nat.} \cos A - 2(z + \tfrac{1}{3}z^3 + \tfrac{1}{5}z^5 + \text{etc.}).$$

Secunden in den drey ersten Graden, und für Zehner von Secunden in den übrigen; zugleich mit den Logarithmen der Secanten und Cosecanten, welche in den Berlinischen Tafeln das Format beyzufügen nicht erlaubte. In diesen sind bloß die ganzen Unterschiede der Logarithmen beygefügt. Dagegen enthalten eben dieselben die natürlichen Sinus und Tangenten selbst, die oft gebraucht werden, und in der französischen Ausgabe zum Nachtheil des Werks fehlen. Die Logarithmen gehen in dieser bis zu der siebenten Decimalstelle, wie in der deutschen Ausgabe; es ist aber eine wichtige Hülfstafel beygefügt, welche die Logarithmen der Sinus und Tangenten von 10 zu 10 Secunden bis zu der zehnten Minute, und dann von 10 zu 10 Minuten bis auf die eilfte Decimalstelle liefert. Diese dient den Logarithmen eines Sinus oder einer Tangente bis auf die zehnte Decimalstelle zu finden. Borda verstarb, wie Briggs, in der Zeit, da er die Vorrede und Einleitung aufsetzte. Diese hat Delambre, der erste Rechner in Frankreich, vollendet. Sie ist sehr lehrreich, und enthält theils eine Methode, die Logarithmen der trigonometrischen Linien und der Zahlen zu berechnen, theils eine Sammlung von bequemen Formeln zur Berechnung sphärischer Dreyecke.

Das Verfahren, welches Delambre zur Berechnung der Logarithmen der trigonometrischen Linien angiebt, ist folgendes. Zuerst giebt er eine Reihe für log. sin. φ; log. cos φ, und log. tang φ. Diese sind die in Cyklometrie (23, 24, 25) angegebenen. Er findet sie aber auf eine andere Art, nämlich aus den Werthen der Sinus und Cosinus, mittelst der Formel,

$$\log.\text{nat.}(1-x) = -x - \tfrac{1}{2}x^2 - \tfrac{1}{3}x^3 - \tfrac{1}{4}x^4 - \text{etc.}$$

Durch diese Reihen sollen die Logarithmen der Sinus und Cosinus bis zum fünften Grade berechnet werden. Die Logarithmen der Sinus größerer Winkel werden nach der Reihe durch eine der folgenden beiden Formeln gefunden, worin M der Modulus des briggischen Systems ist.

$$\text{l sin}(\varphi + \omega) = \text{l sin}\,\varphi + \text{l cos}\,\omega + M[\cot\varphi.\tan\omega - \tfrac{1}{2}\cot\varphi^2.\tan\omega^2 + \tfrac{1}{3}\cot\varphi^3.\tan\omega^3 - \text{etc.}];$$

und

$l\sin(\varphi+\omega) = l\sin\varphi + 2M[\cot(\varphi+\frac{1}{2}\omega).\operatorname{tg}\frac{1}{2}\omega + \frac{1}{3}\cot(\varphi+\frac{1}{2}\omega)^3.\operatorname{tg}\frac{1}{2}\omega^3 + \frac{1}{5}\cot(\varphi+\frac{1}{2}\omega)^5.\operatorname{tg}\frac{1}{2}\omega^5 + \text{etc.}]$.

Die zweyte ist diejenige, welche ich schon oben zur Berechnung der Logarithmen der Sinus angegeben habe. Die erste beruht auf der Formel,

$$\sin(\varphi+\omega) = \sin\varphi.\cos\omega + \cos\varphi.\sin\omega$$
$$= \sin\varphi.\cos\omega(1+\cot\varphi.\tan\omega).$$

Aus dieser ist

$l\sin(\varphi+\omega) = l\sin\varphi + \log\cos\omega + l(1+\cot\varphi.\operatorname{tg}\omega)$.

Der dritte Terminus wird in eine Reihe entwickelt, nach der Formel, $\log\text{nat}(1+x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \text{etc.}$ wozu denn noch der Modulus der tabularischen Logarithmen als Factor zu setzen ist.

Mittelst der Formel, $\sin 2A = 2\sin A.\cos A$, wird aus dem Logarithmen des Sinus und Cosinus eines Winkels der Logarithme des Sinus des doppelten Winkels gefunden. Zugleich findet man den Logarithmen des Cosinus dieses Winkels vermittelst einer der Formeln,

$$\cos A^2 = 1 - \sin A^2$$
$$\cos 2A = 1 - 2\sin A^2$$
$$\cos 2A = \frac{1-\tan A^2}{1+\tan A^2};$$

und der Formel, $\log(1-x) = -x - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3}x^3 - \text{etc.}$ Man kann dadurch die logarithmischen Sinus für alle Decimalgrade finden, indem man durch fortgesetzte Halbtheilung bis zu einem Winkel gelangen kann, der klein genug ist, um die Reihe für den Logarithmen des Sinus und Cosinus sehr convergirend zu machen, woraus man dann successiv durch die Sinus der mittlern Winkel zu dem Sinus des gegebenen gelangt.

Zur Interpolation der Logarithmen, wo die vierten Differenzen so klein sind, und sich so wenig verändern, daß man sie als unveränderlich ansehen kann, gebraucht Delambre allgemeine Formeln, die aber doch nicht bequem genug sind, und auf eine mühsame Art gefunden werden.

Die folgenden Formeln sind leicht gefunden, (Differenzenrechnung, 48.), und leicht anwendbar.

Die Reihe der Winkel sey φ; $\varphi+\omega$; $\varphi+2\omega$; $\varphi+3\omega$; u. s. f. so ist das erste Glied der ersten Differenzreihe von den Logarithmen der Sinus, oder

$$\Delta \log.\text{nat.}\sin\varphi = \cot\varphi.\omega - \frac{1}{2\sin\varphi^2}\omega^2 + \frac{\cos\varphi}{3\sin\varphi^3}\omega^3 - \frac{2+\cos 2\varphi}{12\sin\varphi^4}\omega^4 + \frac{(5+\cos 2\varphi)\cos\varphi}{30\sin\varphi^5}\omega^5 - \text{etc.}$$

Bezeichnet man die Coefficienten von ω durch α, β, γ, δ, ε, etc. so sind die Anfangsglieder der zweyten und folgenden Differenzreihen,

$\Delta^2 \log\sin\varphi = 2\beta\omega^2 + 6\gamma\omega^3 + 14\delta\omega^4 + 30\varepsilon\omega^5 + \text{etc.}$

$\Delta^3 \log\sin\varphi = 6\gamma\omega^3 + 36\delta\omega^4 + 150\varepsilon\omega^5 + \text{etc.}$

$\Delta^4 \log\sin\varphi = 24\delta\omega^4 + 240\varepsilon\omega^5 + \text{etc.}$

$\Delta^5 \log\sin\varphi = 120\varepsilon\omega^5 + \text{etc.}$

etc.

Für die tabularischen Logarithmen ist mit dem Modulus derselben, $M = 0,43429\ 44819\ \ldots$ zu multipliciren. Es ist $\log M = 9,6377743 - 10$.

Exempel. Es sey $\varphi = 42$ Decimalgrade und $\omega = 1' = \frac{\pi}{20000}$. Man sucht die Anfangsglieder der Differenzreihen der Logarithmen von $\sin 42°$; $\sin 42° 1'$; $\sin 42° 2'$; etc. bis auf die zehnte Decimalstelle.

$1M$	$= 9,6377843 - 10$	$1M$	$= 9,63778 - 10$
$1\cot\varphi$	$= 0,1103177$	$\omega 1^2$	$= 2,39224 - 10$
1ω	$= 6,1961199 - 10$		$2,03002 - 10$
1. I.	$5,9442219 - 10$	$1\,2$	$= 0,30103$
		$1\sin\varphi^2$	$= 9,57479 - 10$
		1. II.	$2,15420 - 10$

I. = + 0, 0000879472.
II. = — 0, ... 1426

Δ log. sin 42° = 0, 0000879329.

Das Anfangsglied der zweyten Differenzreihe ist . . . = — 0, 000000285.

Durch dieselben Formel findet man auch die Anfangsglieder der Differenzreihen für die Logarithmen der Cosinus, aber für eine abnehmende Reihe von Winkeln; oder man muß, für eine wachsende Reihe den Unterschied ω negativ nehmen.

Exempel. Man sucht die Anfangsglieder der Logarithmen der Cosinus von 42°; 42° 1′; 42° 2′; etc. Es ist nun $\varphi = 58°$, und $\omega = -1'$. Dadurch

$$M \cot \varphi . \omega = -0,0000529159\,4$$
$$-\frac{M\omega^2}{2 \sin \varphi^2} = -0, \ldots\ldots 85\,8$$

Δ log. cos 42° = — 0, 0000529245 2
Δ² log. cos 42° = — 0, 0000000171 6.

Diese Rechnung stimmt mit den von Hobert und Ideler in der Einleitung zu ihren trigonometrischen Tafeln, S. L. LI. gefundenen Differenzen bis zu der zehnten und eilften Decimalstelle überein. Dort sind die Differenzen aber nicht durch eine allgemeine Formel gefunden.

In den trigonometrischen Tafeln ist der Logarithmus des Halbmessers = 10 gesetzt. Man hat nämlich die trigonometrischen Linien auf einen Halbmesser von 10000 Millionen Theilen bezogen, in den kleinern Tafeln aber von den Zahlwerthen die letztern drey Ziffern abgeschnitten, die Kennziffer der Logarithmen aber noch nach der vollständigen Zahl eingerichtet. Gegenwärtig nimmt man den Halbmesser als Einheit, wodurch die Sinus, und die Tangenten unter 45 Gr. eigentliche Brüche sind. Da die Logarithmen derselben negativ sind, so nimmt man ihr Complement zu 10, und bemerkt entweder ausdrücklich, oder in Gedanken, daß 10 wieder abzuziehen sind. Z. B. es ist sin 25° = 0,4226183, oder genauer 0,4226183013, und log. sin 25° = 9,6259483 — 10, anstatt . . . . — 0, 3740517. Der erste Theil des Logarithmen ist der

Logarithme eines Zählers, 4226183013, die subtractive 10 ist der Logarithme des Nenners 10000 Millionen. Gewöhnlich braucht man die subtractive 10 nicht hin zu setzen.

Den Logarithmen der Tangenten über 45 Gr. und denen der Secanten die alle positiv sind, giebt man der Gleichförmigkeit wegen auch zwey Theile, wovon der eine die subtractive 10 ist. Z. E. es ist tang 70° = 2,7474774, und log. tang 70° = 10, 4389341 — 10, wofür man auch setzen kann 0, 4389341.

In den Vegaischen kleinern Tafeln sind die natürlichen Sinus und Tangenten als Bruchgrößen, eigentliche oder uneigentliche, angegeben, wie in den gleich vorher angeführten Beyspielen. In den mehresten Tafeln erscheinen sie wie ganze Zahlen. Von diesen hat man, wenn der Sinus totus 10 Mill Theile hat, 7 Ziffern von der rechten nach der linken Hand als Decimaltheile abzuschneiden. Z. B. wenn sin 30′ die Zahl 87265 hat, so ist dafür zu setzen 0,0087265.

Die Tangenten und Secanten der Winkel, die nahe an 90° sind, pflegen für einen kleinern Halbmesser als die übrigen angegeben zu werden, weil der Platz nicht alle Ziffern faßt und bey großen Zahlen die Zehnmillionentheilchen nicht in Betracht kommen mögen. In den Sherwinschen Tafeln ist dieses auf folgende Art bemerklich gemacht. In den Zahlwerthen aller trigonometrischen Linien sind drey Ziffern durch ein Komma am Ende abgeschnitten, welches beym Ausschreiben Verwechselungen verhütet. Wo in dem gedachten Falle der Halbmesser nur eine Million Theile hat, sind nur zwey Ziffern abgesondert; für den Halbmesser = 100000 ist nur eine abgesondert, und für den Halbmesser 10000 ist das Komma am Ende noch beygefügt. Die Charakteristik der Logarithmen bezieht sich immer auf einen Halbmesser von 10000 Millionen, oder auf den Halbmesser als Einheit durch die Hinzufügung der Zehn. In deutschen Ausgaben der Tafeln findet man oft zwey Ziffern abgeschnitten, und in den großen Tangenten und Secanten eine Ziffer nach dem Puncte, oder einen Punct hinter die Zahl gesetzt.

Zu den vorzüglichsten Ausgaben trigonometrischer Tafeln gehören ausser den vorher schon angeführten

Sherwin's mathematical tables, the third edition, carefully revised and corrected by W. Gardiner. London 1742, gr. 8. Diese Ausgabe wird als sehr genau gerühmt, wie ich sie auch gefunden habe. Die letzte und fünfte vom J. 1770, besorgt von Clark, ist äusserst fehlerhaft gedruckt. Hutton sagt, daß er einige tausend Fehler darin angemerkt hat.

Gardiner gab auch 1742 zu London in groß Quart heraus: Tables of Logarithms, for all numbres from 1 to 102100, and for the lines and tangent, to every ten seconds of each degree in the quadrant, as also for the lines of the first 72 minutes to every single second, with other useful and necessary tables. Von diesen Tafeln ist nur eine kleine Anzahl Abdrücke gemacht, und bloß auf Unterzeichnung, daher sind sie sehr selten. Sie werden wegen ihrer Genauigkeit und Brauchbarkeit ungemein hoch geschätzt. (Hutton in der Einleitung zu seinen mathematischen Tafeln). Kästner hält diese Sammlung irrig für eine zweyte Ausgabe der Sammlung in Octav, weil er die letztere bloß aus Karstens Lehrbegriff kannte. Astron. Abh. II. Samml. S. 17.

Ein sauberer Abdruck dieser größern Gardinerschen Tafeln ist zu Avignon 1770 veranstaltet. In diesem sind die logarithmischen Sinus und Tangenten für alle Secunden der ersten vier Grade, von Mouton berechnet, beygefügt. (Kästners astron. Abhandl. 2te Samml. S. 19.). In Frankreich gesteht man, daß diese Ausgabe nicht so correct sey, als die englische.

Schulze Sammlung logarithmischer, trigonometrischer, und anderer zum Gebrauch der Mathematik unentbehrlichen Tafeln. Berlin, 1778. 2 Bände, gr. 8. Darin sind die Logarithmen der Sinus und Tangenten in den beiden ersten Graden von Secunde zu Secunde. Auch sind den Briggischen Logarithmen die Neperischen aus Ursins großem Canon beygefügt. Diese und die trigonometrischen Linien gehen in den vier ersten und vier letzten

Graden durch Zehner von Secunden, in den übrigen durch einzelne Minuten.

Der zu früh den mathematischen Wissenschaften entrissene Vega hat sich durch verschiedene bequeme und sehr genaue Ausgaben logarithmischer und trigonometrischer Tafeln sehr verdient gemacht. Die erste, Wien 1783, enthält alles wesentliche aus Sherwins Tafeln, und dazu noch in den ersten und letzten fünf Graden die Logarithmen der trigonometrischen Größen für Zehner von Secunden. Das logarithmisch-trigonometrische Handbuch, Leipzig 1793, enthält eben das, nur nicht die trigonometrischen Größen selbst. Eine vollständigere Ausgabe ist zu Leipzig 1797 in zwey Bänden, groß Octav, herausgekommen, von welchen der zweyte verschiedene logarithmische, astronomische und analytische Tafeln oder Formeln enthält. Die große Sammlung in Folio ist oben angeführt.

Eine sehr genaue, bequem eingerichtete und sauber gedruckte Sammlung sind: Tables portatives de Logarithmes, par François Callet. Edition stéréotype, à Paris (1795) An IX, aus Didots Druckerey. Callet hat schon 1783 eine bequeme Ausgabe der größern Gardinerschen Tafeln besorgt, in Jomberts Verlage aus Didots, des Vaters, Druckerey. (Kästners geom. Abh. I. S. 483.) Da eine Auflage von 6000 Exemplaren zu Ende gieng, so war der jüngere Didot auf eine Einrichtung bedacht, wodurch mit der Zeit ein vollkommen fehlerfreyer Druck zu erhalten stünde, und fiel auf das Mittel, den ganzen Satz unverrückbar zu machen, indem die Buchstaben zu einer Masse mit einander verbunden werden. Daher die Benennung édition stéréotype. Die nach und nach entdeckten Fehler werden abgeändert, ohne daß neue Fehler, wie bey einem neuen Satze unvermeidlich ist, sich einschleichen. Den Besitzern der vorhergegangenen Abdrücke werden sie in gelehrten Zeitschriften oder auf andere Art bekannt gemacht. — In den ersten fünf Graden sind die Logarithmen der Sinus und Tangenten für alle Secunden, überhaupt von 10 zu 10 Secunden der Sexagesimal-Eintheilung auf sieben Decimalstellen geliefert. Ferner sind

die Logarithmen der Sinus und Tangenten von Minute zu Minute nach der Centesimal-Eintheilung des Quadranten bis zur siebenten Decimalstelle beygefügt; dann noch die natürlichen Sinus für alle Zehntheile der Decimalgrade mit ihren Logarithmen; beides auf 15 Decimalstellen, zum Gebrauch beym Einschalten, um die Sinus oder ihre Logarithmen für jeden Winkel eben so weit zu erhalten. Um die Interpolation bey ungleichförmigen Differenzen bequemer und sicherer zu machen, ist eine Verbindung zwischen der Tafel der Logarithmen der Zahlen und der trigonometrischen gemacht. Diese beruht darauf, daß kleine Winkel sich sehr nahe wie ihre Sinus oder Tangenten verhalten. Die erste Zahl auf einer Seite der Tafel mit den Logarithmen der Zahlen sey n, so ist über derselben beygefügt $\log \frac{\sin n''}{n''}$, und $\log \frac{\text{tang } n''}{n''}$, nebst den Variationen dieser Logarithmen für die Zunahme 10 der Zahl n. Man kann sich dieses Verfahrens fast eben so leicht bey jeder andern Ausgabe von Tafeln bedienen. Sind n und $n + p$ die Zahlen der Secunden zweyer kleinen Winkel, so ist $\sin (n + p) = \frac{n + p}{n} \sin n$ nahe, so daß log. sin $(n + p)$ gefunden wird, wenn log. sin. n aus den Tafeln genommen wird.

Hutton ward durch die äußerst fehlerhafte fünfte Ausgabe von Sherwins Tafeln veranlaßt, eine neue dieser Art zu veranstalten, die 1785 zu London bey Robinson gedruckt ist. In der Einleitung ist eine Geschichte der trigonometrischen Tafeln und der Logarithmen enthalten, besonders aber eine ausführliche Darstellung aller Methoden, deren man sich zur Berechnung der Logarithmen bedient hat. Diese Einleitung ist mit der Vorrede in der von Maseres veranstalteten großen Sammlung von logarithmischen Schriften eingerückt, T. I. pag. I—CXXI.

Viele litterarische Nachrichten und kleine Auszüge über den Gegenstand dieses und des vorhergehenden Artikels finden sich in Pfleiderers ebener Trigonometrie, Tübingen 1802.

die Axe des Cy...
Grundflächen.

Wenn die Axe ſenkrecht auf die
heißt der Cylinder ein ſenkrechter (
die Grundflächen geneigt, ſo iſt es ei
Der ſenkrechte Cylinder wird durch
Rechtecks um eine ſeiner Seiten be
die Erklärung, die Euklides giebt, d
ken Cylinder betrachtet. Wenn ei
rallelogramm ſich um eine ſeiner Sei
zwar die derſelben parallele Seite ei
Fläche, wie an dem ſenkrechten Cyli
ebenen Kreisflächen wird der Körper
begränzt. Die krumme Oberfläch
iſt von jener ganz verſchieden.

Der Durchſchnitt des Cylinder
flächen parallelen Ebene iſt ein Kre
Grundflächen. Geht die ſchneider
oder iſt ſie einer durch die Axe gele
iſt der Durchſchnitt ein Parallelo
dern Lage der ſchneidenden Ebene,
ſenkrechten Cylinders mit derſelbe
nen beſondern Fall ausgenomme

Cylinder.

Es ſey (Fig. 104. Tab. VII.) Ab ein Cylinder, deſſen Grundflächen ADBE, adbe ſind. Die Axe iſt Cc, durch welche das Parallelogramm ABba gelegt iſt, welches gegen die Grundfläche geneigt ſeyn mag, wenn die Axe gegen ſie geneigt iſt. Der Cylinder werde von einer durch die Linie FG gelegten Ebene geſchnitten, und der Durchſchnitt derſelben mit der Ebene der Grundfläche, IHI ſey ſenkrecht auf die Richtung des Durchmeſſers AB, nämlich auf die Linie ABH; oder man ziehe auf die Durchſchnittslinie IHI durch den Mittelpunct C die ſenkrechte ACBH, und lege durch AB und die Axe Cc das Parallelogramm ABba. Durch einen Punkt K der Linie FG führe man einen Schnitt parallel mit der Grundfläche. Dieſer iſt ein Kreis LNMN, deſſen Durchmeſſer der Durchſchnitt LM der Kreisfläche mit dem Pgrm Ab iſt. Er ſchneide den durch FG gelegten Schnitt in der Linie NKN. Dieſe Linie iſt parallel mit IHI, weil ſie dieſe nicht ſchneidet, da die Ebene LNMN mit der Grundfläche parallel iſt, und weil ſie zugleich mit ihr in derſelben Ebene, der durch FH und HI gelegten ſich befindet. Weil NKN mit IHI, und LM mit AH parallel ſind, ſo iſt der W. LKN = AHI, (Eucl. XI. 10); alſo iſt NKN ſenkrecht auf LM, und wird von dieſer in K halbirt, da LM ein Durchmeſſer des Kreiſes iſt. Vermöge einer Eigenſchaft des Kreiſes iſt KL.KM = KNqu. Man ziehe FO parallel mit LM, ſo iſt KF : KL = FG : FO, und KG : KM = FG : FO; alſo iſt . . . . .

KF.KG : KL.KM = FGqu : FOqu. das iſt

KF.KG : KNqu = FGqu. : FOqu

= FGqu : ABqu. Dieſe Proportion gehört für eine Ellipſe, in welcher FG und AB conjugirte Durchmeſſer ſind, und NN eine zugehörige Doppel-Ordinate iſt, die wie alle ihr parallelen, von dem Durchmeſſer FG halbirt wird. Wenn das Parallelogramm Ab auf die Grundfläche ſenkrecht iſt, und der Schnitt durch FG ſenkrecht auf Ab iſt, ſo iſt der Durchſchnitt NN der beiden auf Ab ſenkrechten Ebenen ſenkrecht auf die Ebene von Ab, und daher ſenkrecht auf FG. In dieſem Falle iſt FG eine der

der darin gezogenen geraden Linien betre
die Ellipſe übertragen, wenn man dieſe
eines Kreiſes durch parallele Linien mit
linders auf eine gegen die Grundfläch
betrachtet. Durch dieſe Projection gie
des Kreiſes in der Grundfläche den Mitt
zwey Durchmeſſer des Kreiſes, die auf
ſind, geben die conjugirten Durchmeſſer
lele Linien, in der Ebene des Kreiſes wer
tragung auf die Ellipſe parallele Linien,
in dem Kreiſe verhalten. Auf dieſe Art
rin in ſeinem Treatiſe on Fluxions, F
che Eigenſchaften der Ellipſe. Hier fol
Beyſpiele.

Es ſey AB (Fig. 105.) derjenig
Grundfläche des Cylinders, welcher mi
auf die Grundfläche ſenkrechten Ebe
Cylinder kein ſenkrechter iſt. An den
ſey in E die berührende EF gezogen, r
ten AB in F begegne und ED ſey
Der elliptiſche Schnitt ſey aeb. A
der Axe Cc parallelen Aa, Dd,
Ebene durch EF und Ee be

Durchschnittslinie beider Ebenen, ed, senkrecht auf die Ebene Ab, also senkrecht auf den Durchmesser Ab. Die Segmente der Linie AF sind den gleichnamigen auf af proportional. Nun ist in dem Kreise CD:DB=AD:DF, und CD:CB=CB:CF (s. Kreis); also ist auch in der Ellipse, cd:db=ad:df, und cd:cb=cb:cf, wo d der Punct ist, in welchem die senkrechte von dem Berührungspuncte e die Axe trifft. (S. berühr. Linie, 8.)

In der Grundfläche ACBD eines Cylinders (Fig. 106.) sey irgend eine AB gezogen, welche die beiden unter sich parallelen, CD, EF, in G, H schneide. An den elliptischen Schnitt acbd seyn die der Axe parallelen Aa, Cc, Ee, Bb, Ff, Dd gezogen. In der Ebene des Schnittes ziehe man ab, cd, ef, von welchen die erstere die beiden andern in g, h schneide. Nun sind Gg, Hh, der Axe parallel, als Durchschnitte zweyer Ebenen, mit welchen die Axe parallel ist, (s. Ebene). Daher sind Gg und Hh den Aa und Bb parallel, und es ist AG:AH=ag:ah, so wie auch GB:HB=gb:hb, woraus folget

AG.GB:AH.HB=ag.gb:ah.hb.

Eben so ist

CG.GD:EH.HF=cg.gd:eh.hf.

In dem Kreise ist AG.GB=CG.GD, und AH.HB=EH.HF, also ist in der Ellipse.

ag.gb:ah.hb=cg.gd:eh.hf.

Die Linien cd, ef sind parallel, weil sie in derselben Ebene liegend zugleich in den beiden parallelen Ebenen Cd, Ef befindlich sind. Diese sind parallel, weil Cc mit Ee, und CD mit EF parallel sind. (Eucl. XI, 15.).

Der Inhalt eines Cylinders ist gleich dem Inhalte eines Prisma über einer Grundfläche von gleicher Größe mit der Grundfläche des Cylinders, und mit derselben Höhe, oder dem senkrechten Abstande der Grundflächen. Der Cylinder ist nämlich die Gränze der vielseitigen Prismen, deren Grundflächen reguläre Figuren sind. Es gilt also von dem Inhalte der Cylinder was von den Prismen gilt,

daß gleiche Grundflächen mit gleichen Höhen gl
Inhalt geben.

Es sey der Durchmesser der Grundflächen = d
Umfang = πd; die Höhe = h, so ist der
des Cylinders = $\frac{1}{4}\pi ddh$. Die Einheit ist der
fel derjenigen Linie, welche die Einheit für die
d und h ist.

Das Verhältniß zweyer Cylinder wird zusa
gesetzt aus dem gedoppelten Verhältnisse der Durch
und dem einfachen der Höhen.

Bey gleichen Cylindern verhalten sich die Höhen
kehrt wie die Quadrate der Durchmesser. (Eucl. XII

An ähnlichen Cylindern verhalten sich die Höhe
die Durchmesser; ihre körperlichen Räume sind dahe
die Würfel der Durchmesser. (Eucl. XII. 12.)

Ist der Inhalt eines Cylinders gegeben, so st
frey, Höhe oder Durchmesser zu bestimmen.

Die Höhe sey dem Durchmesser gleich, so i
Inhalt = $\frac{1}{4}\pi ddd$. Ist der Inhalt gegeben, so i
Durchmesser bestimmt. Der Inhalt sey = A,
$d = \sqrt[3]{\frac{4A}{\pi}}$. Z. B. ein Berliner Quart oder
halte 64,213 Cubik-Zoll Rheinl. Duod. Maaß,
der Durchmesser eines gleich hohen und dicken Cyli
von diesem Inhalte, d = 4,3402 Rh. Duod. Zoll.

log. A = 1,8076230
log. 4 = 0,6020600
log. $\frac{1}{\pi}$ = 9,5028501 — 10

log d^3 = 1,9125331
log d = 0,6375010,

Die krumme Oberfläche eines senkrechten
linders ist gleich einem Rechteck, dessen Grundlini
Umfang der Grundfläche, und die Höhe der Are
ist. Wenn dieses mit der Höhe an eine Seitenlini
Cylinders gelegt und so gekrümmt wird, daß die Grun

in den Umfang der einen Grundfläche fällt, so bedeckt es genau die krumme Oberfläche, indem für jeden Punct der Grundlinie, der in einen Punct des Kreisumfanges fällt, die auf jene Grundlinie senkrechte in die Seite des Cylinders fällt, die durch denselben Punct des Kreises senkrecht auf diesen steht. Der Durchmesser sey d, die Höhe h, so ist die krumme Oberfläche $= \pi dh$. Ist die Höhe dem Durchmesser gleich, so ist die krumme Oberfläche $= \pi dd$, so groß als die Oberfläche der eingeschriebenen Kugel.

Die Oberfläche eines schiefen Cylinders zu finden, führe man (Fig. 107.) durch die Mittelpuncte C, c der Grundflächen ADBD und adbd Schnitte senkrecht auf die Axe, nämlich durch EDFD und edfd, in dem auf beiden Enden fortgesetzten Cylinder. Diese Schnitte sind Ellipsen, deren große Axen DD, dd, und deren kleine EF, ef sind. Die Seitenlinien des Cylinders stehen auf den Umfang der Ellipsen senkrecht. Man construire ein Rechteck, dessen Grundlinie der Umfang der Ellipse, (welcher als angebbar hier betrachtet wird), und dessen Höhe die Axe des Cylinders ist. Legt man dieses Rechteck mit der als Höhe angegebenen Seite an eine auf der krummen Oberfläche zwischen den beiden elliptischen Schnitten der Axe parallele Linie, wie Ee, Ff, und legt die Grundlinie gekrümmt an die Ellipse, so legt sich das Rechteck an die cylindrische Fläche an, und diese ist daher so groß als jenes Rechteck. Der Theil der Cylinderfläche, welcher auf der einen Seite der elliptischen Flächen liegt, ist demjenigen gleich, welcher auf der andern Seite liegt, nämlich der Theil DAED dem DBFD, und der Theil daed dem dbfd. Folglich ist die cylindrische Fläche gleich dem Rechteck, dessen Grundlinie dem Umfange eines auf die Axe senkrechten elliptischen Schnittes, und die Höhe der Axe des Cylinders gleich ist. Der schiefe Cylinder hat eine andere Art Rundung, als der senkrechte. Sie ist in der Richtung des kleinsten Durchmessers abgeplattet. Daher kann der schiefe Cylinder auf einer gemeinen Drehbank nicht gedrechselt werden.

Bey der Abwicklung der Cylinderfläche verwandelt

ſich, der Umfang der Grundfläche in eine transſcendente krumme Linie. Es ſey (Fig. 108.) ADBDA die Grundfläche des Cylinders, EDFDA der elliptiſche ſenkrecht auf die Axe geführte Schnitt, welcher jene in DCD ſchneide. Auf dem elliptiſchen Quadranten DGE nehme man einen Punct G, und ziehe dadurch GH parallel mit der Axe an H in dem Umfange der Grundfläche. Nun verwandle man DG in eine gerade Linie, und ſetze darauf durch den Endpunct G eine ſenkrechte gleich GH, ſo iſt deren Endpunct in der abgewickelten DH. Die Linie GH iſt = HC. sin HCG. Es iſt alſo nöthig, den W. HCG durch einen mittelſt der Abwickelung gegebenen Winkel auszudrücken. Dieſer iſt DCG, oder der Winkel, welchen die durch die Axe und durch die beiden CD, CG gelegten Ebenen mit einander machen.

Man ziehe in der Grundfläche den Halbmeſſer CH, und gedenke ſich um C eine Kugelfläche mit dem Halbmeſſer CD beſchrieben. Die Linie CG werde bis an dieſe verlängert. Zwiſchen den Endpuncten dieſer drey Halbmeſſer der Kugel, CD, CH und der verlängerten CG entſteht ein ſphäriſches Dreyeck dhg. (Fig. 109.), worin der Bogen dg das Maaß des W. DCG, der Bogen dh des Winkels DCH, und hg des W. HCG iſt. Da die Ebene HCG ſenkrecht auf die Ebene DCG iſt, ſo iſt in dem ſphäriſchen Dreyeck der W. hgd ein Rechter. Der Winkel hdg iſt der Winkel der Ebenen, worin die Bogen hd und dg liegen, d. i. der Grundfläche und des elliptiſchen Schnittes, alſo gleich dem W. ACE. Man ſetze ACE = α; DCG = φ; DCH = ω, ſo iſt $\text{tang}\,\omega = \frac{\text{tang}\,\varphi}{\cos\alpha}$, und sin HCG = sin α. sin ω, da in dem ſphäriſchen Dreyeck iſt cos d. tang h d = tang d g, und sin h g = sin d. sin h d. Der Halbmeſſer der Grundfläche ſey = a, und die Linie GH = y, ſo iſt y = a sin α. sin ω. Wird nun für irgend einen Winkel φ die Länge des elliptiſchen Bogens DG durch die dafür gehörige Reihe (ſ. Rectification) gefunden, wird ferner aus φ der Winkel hergeleitet, und daraus die Linie y berechnet, ſo hat man ein paar

ordinaten an der krummen Linie, in welche der Umfang der Grundfläche des Cylinders durch die Abwickelung ſich verwandelt. Die krumme Linie bekommt eine Geſtalt, wie die in (Fig. 110.) gezeichnete, wo die gerade DDD der Umfang der Ellipſe iſt, DG ein Bogen der Ellipſe von dem einen Durchſchnittspuncte der Grundfläche mit dem elliptiſchen Schnitte an genommen, die darauf ſenkrechte GH das Stück der Seite des Cylinders zwiſchen jenen beiden Schnitten: EA und FB die größten Ordinaten, jede $= a \sin \alpha$. Die krumme Linie ſchneidet die Abſciſſenlinie unter dem Winkel α oder ACE. Der Schnitt eines ausgebreiteten Ärmels, wo er an das Leibſtück geneht werden ſoll, hat eine ſolche Geſtalt, nur daß hier die gerade DD die abgewickelte Kreislinie der Grundfläche eines ſenkrechten Cylinders, und DABD eine abgewickelte Ellipſe ſeyn mag.

Cylindroid iſt erſtlich ein cylinderartiger Körper, der zwiſchen zwey parallelen ebenen Grundflächen, die nicht Kreiſe ſind, und einer krummen Oberfläche, die auf dieſelbe Art, wie an dem Cylinder beſchrieben wird, eingeſchloſſen iſt. Wenn die Grundflächen elliptiſch ſind, ſo iſt das Cylindroid zugleich ein Cylinder. Denn ſo wie man in einem Cylinder immer einen elliptiſchen Schnitt legen kann, deſſen Axen ein gegebenes Verhältniß haben, ſo kann man auch umgekehrt zu jeder elliptiſchen Grundfläche für die gegebene Lage der Axe die Lage der circularen Grundfläche finden. Die Schriftſteller, welche den cylindriſchen Körper mit elliptiſchen Grundflächen unterſcheiden, worunter auch d'Alembert in dem Dictionn. encyclop. gehört, haben dieſen Umſtand nicht beachtet.

Zweytens haben Wren und Parent dem Körper, der durch die Umdrehung einer Hyperbel um eine durch den Mittelpunct auf die Hauptaxe ſenkrechte gerade Linie erzeugt wird, den Namen, Cylindroid, gegeben. Hier iſt dieſe Benennung ſchicklich. Die Oberfläche läßt ſich für eine gegebene Höhe deſſelben auf dieſelbe Art finden, wie die eines gedruckten Sphäroids von dem durch den Mittelpunct gelegten Kreiſe

an genommen. In dem Artikel, Sphäroid, wird dieſes gezeigt. Parent hat darüber eine Abhandlung in den Mem. de l'Acad. 1709 geliefert. Der Inhalt eines Abſchnittes dieſes Körpers, zwiſchen der Grundfläche und einem dieſer parallelen Schnitte iſt in dem Artikel, Cubirung. S. 582, gefunden.

D

Dactylonomia oder **Chironomia**, Fingerrechenkunſt, iſt ein Verfahren, die Finger anſtatt der Ziffern zu gebrauchen, und dadurch Zahlen anzugeben. (δακτυλος der Finger, χειρ die Hand). Es iſt dabey alles willkührlich. Die einfachſte Art wäre, die Ziffern durch die Anzahl der ausgeſtreckten Finger, die übrigen eingeſchlagen, anzudeuten, zuerſt die Einer, dann die Zehner, u. ſ. f. Oder man läßt den Daumen der linken Hand Eins, den Zeigefinger derſelben Zwey, und ſo ferner nach ihrer Folge bedeuten. Oder man bezeichnet die Anzahl der Einer, der Zehner, der Hunderte, der Tauſende, jede durch eine gewiſſe, ganz willkührliche, Stellung der ausgeſtreckten und eingeſchlagenen Finger; die Anzahl der Zehntauſende und Hunderttauſende durch eine Legung der Hand gegen den Leib. Man müßte ein ſehr gutes Gedächtniß haben, die Bedeutungen aller dieſer ganz willkürlichen Lagen zu behalten. Abbildungen in Leupolds Theatro Arithm. §. 3. und in Roſenthals natürlicher Magie 7. Bd. 276. S.

Datum, was als beſtimmt und bekannt angenommen wird, oder erwieſen iſt, in Abſicht auf Größe, oder Lage, oder Verhältniſſe, ſ. Gegeben.

Data des Eukloides, eine Sammlung von Lehrſätzen, welche zeigen, wie aus gewiſſen Verhältniſſen oder Größen andere folgen. Sie iſt für die Analyſis der Alten ein wichtiges Hülfsmittel. Mittelſt dieſer Sätze ſucht man bey der Auflöſung einer Aufgabe, was aus den gegebenen Dingen folgt, was aus dieſem wieder hergeleitet wird,

i. ſ. w., bis daß man findet, daß das, was in der Auf-
abe zu leiſten verlangt wird, gegeben ſey. Oder man
eht von dem geſuchten als gegeben aus, und ſucht, wie man
urch Größen und Verhältniſſe, deren eins durch das andere
egeben wird, auf etwas gegebenes komme, um von die-
em wieder auf das geſuchte zurück zu gehen. Beyſpiele.
Der 9te Satz in der Ausgabe von Gregory: Wenn zwey
der mehrere Größen zu einander gegebene Verhältniſſe ha-
en, und wenn ſie zu andern Größen gegebene, wenn auch
icht einerley Verhältniſſe haben, ſo werden dieſe andern
Größen auch gegebene Verhältniſſe zu einander haben.
Der 66ſte Satz: Wenn in einem Dreyeck ein Winkel gege-
en iſt, ſo hat das Rechteck von den einſchließenden Seiten zu
em Dreyeck ein gegebenes Verhältniß.

Dieſes Werk iſt zuerſt griechiſch und lateiniſch mit den
ndern Schriften des Euklides von Daſypodius 1571
u Straßburg herausgegeben. Eine beſondere Ausgabe
nit einer neuen Ueberſetzung hat Hardy beſorgt, Paris
625. Dieſe Ueberſetzung hat Gregory in ſeiner ſchö-
en Ausgabe der Euklidiſchen Schriften, Oxford, 1703
ol. mit Verbeſſerungen dem griechiſchen Texte beygefügt.
Robert Simſon hat eine engliſche Ueberſetzung gelie-
ert, worin er Änderungen des Ausdrucks und der Ordnung
er Sätze vorgenommen, auch einige neue Sätze hinzuge-
han hat. Dieſe Ausgabe hat Schwab ins Deutſche über-
etzt, und mit einer Sammlung geometriſcher, nach der
nalytiſchen Methode der Alten aufgelöſeten Probleme
egleitet. Stuttgard 1780.

Decimalbruch iſt ein Bruch, deſſen Nenner eine Potenz der Zehn iſt, wie $\frac{23}{100}$; $\frac{478}{1000}$. Da die Rechnung nit dieſer Gattung von Brüchen nicht mehr Schwierigkeit nacht, als die mit ganzen Zahlen, ſo werden in der Ma-hematik faſt keine andere gebraucht.

So wie man die ganzen Zahlen aus Einheiten, in ei-ier nach dem Zehnfachen aufſteigender Folge von den Ei-ern an zuſammenſetzt, ſo ſetze man auch die eigentlichen Brüche aus Einheiten in einer nach dem Zehnfachen her-

absteigenden oder abnehmenden Folge aus Zehntheilchen, Hunderttheilchen, Tausendtheilchen, u. s. f. zusammen. Und wie man den Werth der Zahlziffern linker Hand hin mit jeder Stelle zehnfach größer werden läßt, so lasse man, von der Stelle der Einer nach der Rechten hin, die Werthe der Ziffern mit jeder Stelle zehnmahl kleiner werden, dann kann man die Nenner der Brüche ersparen, und die Bruchrechnung völlig wie mit ganzen Zahlen verrichten. Nur muß man die Stelle der Einer durch ein Zeichen, als einen Punct, oder wie es gewöhnlich ist, durch ein Komma bemerken. Solchergestalt hat man die Zahl 43,85304 zu lesen: 43 Einer, 8 Zehnth., 5 Hundertth., 3 Tausendth., 0 Zehntausendth., 4 Hunderttausendth. Wenn keine Ganze vorhanden sind, so wird in die Stelle der Einer die 0 gesetzt, wie 0,693. Fehlen auch die Zehntheilchen, Hunderttheilchen u. m. so wird deren Stelle auch durch 0 ausgefüllt, wie 0,048; 0,004314.

Die nach dem Komma stehenden Ziffern, mit Weglassung der Nullen, die etwa unmittelbar nach dem Komma folgen, sind der Zähler eines Bruches, dessen Nenner die Eins mit so vielen Nullen ist, als durch das Komma Ziffern und Nullen rechter Hand abgesondert sind. Z. B. $43,85304 = 43\frac{85304}{100000}$; $0,048 = \frac{48}{1000}$.

Einem auf angezeigte Art ausgedruckten Decimalbruche kann man so viele Nullen anhängen, als man will, weil der Werth jeder Ziffer durch das Komma bestimmt ist. Aber für jede Stelle, die das Komma rechter Hand hin fortrückt, wird die Zahl mit 10 multiplicirt, und für jede Stelle, die es linker Hand hinaufrückt, durch 10 dividirt.

Einen jeden Bruch verwandelt man in einen Decimalbruch, wenn man Zähler und Nenner mit einer Potenz von 10 multiplicirt. und das Product aus dem Zähler in diese Potenz durch den Nenner dividirt, wobey aber oft ein Rest bleibt, den man inzwischen beliebig vermindern kann, da die Potenz der 10 nach Belieben groß genommen werden mag.

Z. B. $\frac{4}{7} = 0,5294117\ldots$

Ein Rest bleibt immer, wenn der Nenner andere Factoren als 2 und 5 hat, vorausgesetzt, daß der Bruch auf die kleinste Zahlen gebracht sey.

Addition. Decimalbrüche werden wie ganze Zahlen addirt, nachdem man sie so geordnet hat, daß die Kommata, und also die Einheiten von gleichem Werthe, über einander stehen.

Beyspiel.

84,732
7,5048
432,14
0,05389

Summe = 524,43069

Subtraction. Diese geschieht auf die nämliche Art.

43,06847	537,48
17,487	12,5934
25,58147	524,8866

Multiplication. Man verfährt, als wenn man ganze Zahlen mit Weglassung des Komma zu multipliciren hätte, und schneidet von dem Producte so viele Ziffern von der rechten nach der linken Hand ab, als in beiden Factoren zusammen abgeschnitten sind.

Beyspiele.

7526	7,526	75,26	0,274
3,47	3,47	0,347	0,0426
526,82	0,52682	0,52682	1644
3010,4	3,0104	3,0104	548
22578	22,578	22,578	1096
26115,22	26,11522	26,11522	0,0116724

In dem letzten Exempel sind die Nullen vor den bedeutenden Ziffern in den Partialproducten zur Bequemlichkeit weggelassen.

Diviſion. I. Fall, wenn Dividendus und Diviſor ganze Zahlen ſind. Iſt jener größer als dieſer, und es bleibt ein Reſt, nachdem die Einer in dem Quotienten gefunden ſind, ſo macht man dieſen durch Hinzuſetzung einiger Nullen zu Decimaltheilen, welches folgweiſe geſchehen mag. nämlich den erſten Reſt zu Zehntheilchen, den folgenden Reſt zu Hundertheilchen u. ſ. f. wodurch die Theile des Quotienten nach der Reihe in gleichnamigen Decimaltheilen gefunden werden. Wenn die Reduction eines Reſtes auf eine zehnfach kleinere Einheit zur Diviſion nicht genügt, ſo bringt man ihn auf eine noch kleinere Einheit, bis er durch den Diviſor theilbar wird. Iſt der Dividendus kleiner als der Diviſor, ſo verwandelt man ihn in Decimaltheile, wie ſchon gewieſen iſt.

Exempel.

37	872	23, 567 567 567 . . .
74	132	Einer
111	210	Zehnth.
185	250	Hundertth.
222	280	Tauſendth.
259	210	Zehntauſendth.

Die Producte aus dem Diviſor in jeden Theil des Quotienten ſind zur Seite geſetzt. Da der Reſt 21 Tauſendth. ſchon, was die Ziffern betrifft, bey den Einern vorgekommen iſt, ſo kehren dieſelben Ziffern von den Zehntheilchen an, wieder. In jedem nicht vollſtändigen Decimalbruche giebt es ſolche Perioden, wovon hernach.

II. Fall, wenn der Dividendus allein Decimaltheile enthält. Die Diviſion wie vorher, nur daß das Komma in dem Quotienten um ſo viele Stellen nach der linken Hand fortrückt, als Ziffern in dem Dividendus abgeſchnitten ſind.

37	8, 72	0, 23567 567 . . .

III. Fall, wenn der Diviſor Decimaltheile enthält. Man rückt das Komma in demſelben vorwärts bis zur letz-

ten Ziffer, und das Komma in dem Dividendus um eben so viele Stellen, in welche man für die etwa fehlenden Ziffern Nullen setzt.

Exempel.

	3, 7	87, 2
das ist	37	872 ‖ 23, 567 567 . . .

oder

	0, 37	872
	37	87200 ‖ 2356, 7567 . .

Perioden der Decimalbrüche.

Wenn ein Rest, zu welchem keine Ziffer aus dem Dividendus zu nehmen war, wieder kommt, was nämlich die Ziffern, ohne Rücksicht auf ihre Einheit betrifft, so kehren die Ziffern in dem Dividendus, von derjenigen an, die aus jenem Reste entstanden ist, wieder, wie das vorige Beyspiel gezeigt hat. Nun können nicht mehr verschiedene Reste Statt haben, als der Divisor Einheiten weniger eine hat. Daher hat jeder Decimalbruch, der einem rationalen Bruche gleich ist, wenn er nicht abbricht, von einer Stelle an Perioden wiederkehrender Ziffern. Man braucht die wirkliche Division nicht weiter als bis zu dem Ende einer Periode fortzusetzen. Alle folgenden Ziffern sind dadurch gegeben.

Die Perioden können aber auch weniger Ziffern enthalten als der um Eins verminderte Divisor Einheiten hat.

Wenn der Divisor die Form $10^m - 1$ hat, so enthält die Periode des Quotienten m Ziffern. Denn es sey der Bruch $= \frac{N}{D}$, und $D = 10^m - 1$, so ist $\frac{N}{D} = N(10^{-m} + 10^{-2m} + 10^{-3m} + \text{etc.})$. (Buchstabenrechnung, 26.). Z. B.

$$\frac{247386}{9999} = 24,\ 7386$$

$$24\quad 7386$$

$$24\quad 7386$$

$$247\ \ldots$$

$$24,\ 7410\quad 7410\quad 7410\ldots.$$

Eben das findet Statt, wenn der Divisor ein Factor von $10^m - 1$ ist. Es sey nämlich $D = \frac{10^m - 1}{a}$, wo a eine ganze Zahl ist, so ist $\frac{N}{D} = \frac{N.a}{10^m - 1}$.

Da $10^{2m} - 1 = (10^m - 1)(10^m + 1)$ ist, so geben Divisoren, welche die Form $10^m + 1$ haben, oder Factoren einer Zahl von dieser Form sind, Perioden von 2m Ziffern.

Es ist

$10 - 1 = 9.1 = 3.3$ ‖ $10^8 - 1 = 9.3.37$

$10^2 - 1 = 9.11$ ‖ $10^4 - 1 = 9.11.101$

$10^5 - 1 = 9.41.271$

$10^6 - 1 = 9.3.7.11.13.37.$

Auch $10^4 + 1 = 73.137,$

Die Primzahlen, die hier als Factoren vorkommen, geben als Divisoren Perioden von so viel Ziffern, als der Exponent der Potenz von 10 in dem niedrigsten zugehörigen Producte $10^m - 1$ Einheiten enthält. Die Factoren 73 und 137 von $10^4 + 1$ geben Perioden von 2 mahl 4 Ziffern.

Eine allgemeinere Theorie als diese fragmentarische ist, giebt Gauß in den Disquisitionibus arithmeticis, sect. VI. Aus dieser ist folgende Tafel für die einfachen Divisoren bis 97, und die Anzahl der Ziffern in den Perioden der Quotienten gezogen. Der Divisor ist mit D, die Anzahl der Ziffern in den Perioden mit Z bezeichnet.

D	Z	D	Z
3	1	47	46
7	6	53	13
11	2	59	58
13	6	61	60
17	16	67	33
19	18	71	35
23	22	73	8
29	28	79	13
31	15	83	41
37	3	89	44
41	5	97	96
43	21		

Der Nenner D des Bruchs $\frac{N}{D}$ sey das Product von

y Primzahlen A und B. Der Quotient $\frac{1}{A}$ enthal-

Perioden von m Ziffern, der Quotient $\frac{1}{B}$ enthalte

rioden von n Ziffern, so bestehen die Perioden des Bru-

s $\frac{N}{A.B}$ aus so viel Ziffern, als die kleinste Zahl, wor-

m und n aufgehen, Einheiten hat, also aus m n Zif-

n, wenn m und n keinen gemeinschaftlichen Theiler ha-

i. Zum bessern Verständniß des Beweises diene vorläu-

folgendes Exempel.

$\frac{1}{7} = 0,142857\ 142857\ 142857 \ldots$

$\frac{1}{101} = 0,0099\ 0099\ 0099\ 0099 \ldots$

Hier ist $m = 6$; $n = 4$, und die kleinste Zahl, worin beide aufgehen, ist 12; also hat $\frac{1}{7 \times 101}$ Perioden von 12 Ziffern. Es ist

$$\frac{1}{7 \times 101} = 0,001414127157\ 001414\ldots$$

Man bemerke hierbey, daß die beiden ersten Perioden des Bruches $\frac{1}{7}$ sich durch den Nenner des andern Bruches, so wie die vier ersten Perioden dieses zweyten sich durch den Nenner des ersten ohne Rest theilen lassen.

Es sey nun, wenn m und n einen gemeinschaftlichen Theiler haben, $m : n = p : q$, wo $p : q$ die kleinsten Zahlen für dieses Verhältniß sind. Man bezeichne die Ziffern in einer Periode des Bruches $\frac{1}{A}$ durch . . a, b, c . . . k, etc. die zum Theil o seyn können, so daß $\frac{1}{A} = a.10^{-1} + b.10^{-2} + c.10^{-3} \ldots + k.10^{-m} + a.10^{-m-1} \ldots + k10^{-2m} + a^{-2m-1} \ldots + k.10^{-qm} + \frac{1}{A.10^{qm}}$. Der Rest am Ende der ersten Periode ist nämlich $= 1.10^{-m}$, am Ende der zweyten . . . $= 1.10^{-2m}$; am Ende der qten $= 1.10^{-qm}$. Dieser Rest mit A dividirt giebt die Ergänzung des Decimalbruchs zu dem vollständigen Werthe des Bruches $\frac{1}{A}$.

Demnach ist

$$10^{qm} - 1 = (a.10^{qm-1} + b.10^{qm-2} \ldots + k)\,A.$$

Man bezeichne nun auch die Ziffern in einer Periode des Bruches $\frac{1}{B}$ durch $\alpha, \beta, \gamma, \ldots \varkappa$, so ist auf dieselbe Art

$$10^{pn} - 1 = (\alpha.10^{pn-1} + \beta.10^{pn-2} \ldots + \varkappa)\,B$$

Da $pn = qm$ ist, so ist $(a.10^{qm-1} \ldots + \varkappa)\,A = (\alpha.10^{pn-1} \ldots + \varkappa)B$. Folglich ist A ein Theiler des Factors von B, so wie B ein Theiler des Factors von

A ist, da A und B Primzahlen sind. Also ist auch A ein Theiler von $\alpha . 10^{-1} + \beta . 10^{-2} \ldots + \varkappa . 10^{-pn}$, so wie B ein Factor von $a . 10^{-1} + b . 10^{-2} \ldots + k . 10^{-qm}$.

Wird nun der ohne Ende fortlaufende Decimalbruch $\frac{1}{A}$ durch B dividirt, so geht die Division bey je qm Ziffern, von der Stelle der Zehntheilchen angefangen, ohne Rest auf, und in den Stellen $-qm-1$; $-2qm-1$; $-3qm-1$; etc. kehren dieselben Ziffern wieder. Eben so verhält es sich, wenn der Decimalbruch $\frac{1}{B}$ durch A dividirt wird. Mit je pn Stellen kommen dieselben Ziffern wieder. Der Bruch $\frac{1}{A.B}$ enthält also Perioden von qm, das ist, pn Ziffern. Kürzer sind die Perioden nicht, weil die obigen Producte nur dann gleich sind, wenn $10^{qm} - 1 = 10^{pn} - 1$, oder wenn $qm = pn$ ist.

Der Bruch $\frac{N}{A.B}$ enthält daher auch Perioden von m (=pn) Ziffern, Denn bey der Multiplication des Decimalbruchs $\frac{1}{A.B}$ durch N enthalten die Partialproducte durch die Theile von N jedes qm (=pn) Perioden, und werden in allen Perioden von $\frac{1}{A.B}$ auf gleiche Art unter einander geordnet.

Der Decimalbruch $\frac{N}{A.B.C}$, wo A, B, C Primzahlen sind, enthält so viele Ziffern in jeder Periode, als die kleinste Zahl, worin das Product der Ziffer-Menge in den Perioden von $\frac{1}{A}$, $\frac{1}{B}$, $\frac{1}{C}$ aufgeht, Einheiten enthält. Auf ähnliche Art verhält es sich bey noch mehr untheilbaren Factoren in dem Divisor.

Wenn der Divisor eine Potenz von 2, oder von 5,

oder von beiden enthält, so ist die Ziffer-Menge in den Perioden dieselbe, welche in dem Decimalbruche, nach Absonderung jener Factoren, Statt hat. Denn $\frac{1}{2}$ ist $\frac{5}{10}$; $\frac{1}{4} = \frac{25}{100}$; $\frac{1}{8} = \frac{125}{1000}$; etc. und $\frac{1}{5} = \frac{2}{10}$; $\frac{1}{25} = \frac{4}{100}$, etc. Die Division durch die Potenzen von 10 verändert die Ziffern nicht, nur ihre Stellen in Absicht auf die Stelle der Einer; und die Multiplication durch die Zähler verändert den Umfang der Perioden nicht. Bey der Bestimmung der Größe der Perioden in einem Decimalbruche hat man daher die Factoren 2 und 5, wenn solche in dem Divisor vorhanden sind, abzusondern.

Zu vergleichen: Wallisii Algebra, cap. 89.

Eulers Algebra, §. 525. ff.

Robertson on the theory of circulating Decimal Fractions. Philos. Transf. 1768.

Bernoulli sur les fractions décimales périodiques. Mem. de Berlin 1771.

Gauss disquisitiones arithmeticae. §. 312. f. f. Lipsiae 1801.

Decimalmaaß ist die Eintheilung der Einheit zum Messen oder Zählen, in Zehntheile, Hunderttheile u. s. f. nach der Decimalprogression. Man sagt Fuße, Zolle, Linien, Decimalmaaß, oder Decimalfuß, Decimal-Zoll, Decimallinie. Ein Decimalfuß bezieht sich auf eine Ruthe als Einheit; ein Fuß schlechtweg ist eine willkürliche Einheit für sich selbst. Man hat jetzt angefangen, den Quadranten eines Kreises in Decimaltheile zu theilen, so daß der zehnte Theil des Quadranten, ein Decimalgrad, der hundertste Theil eine Decimalminute heißen müßte, wenn man die alten Benennungen neben den neuen Theilen behalten wollte. Die französischen Mathematiker nennen den hundertsten Theil des Quadranten einen Decimalgrad; den hundertsten Theil dieses Grades eine Decimal-Minute; den hundertsten der Minute, eine Decimal-Secunde, (Tables trigonométriques décimales par Borda et Delambre, pag. 18). Die Benennung Centesimale wäre bestimmter.

Die Eintheilung nach der Decimalprogreſſion iſt ohne ſtreit die bequemſte, weil man nach derſelben die Bruch- eile wie ganze Zahlen, ohne die umſtändliche Reduction, e bey andern Eintheilungen nöthig iſt, behandeln kann. reylich werden die trigonometriſchen und aſtronomiſchen afeln, die nach der Serageſimaltheilung eingerichtet id, dadurch faſt unbrauchbar, und man muß ſich an mz neue Zahlen für bekannte individuelle Größen in r Phyſik und Aſtronomie gewöhnen. Allein die viel öſſere Leichtigkeit der Rechnungen nach dem Decimal- aaße vergütet das alles. Wenn die aſtronomiſchen Ta- ln mit den neueſten Verbeſſerungen nach dem Deci- alſyſtem abgefaßt ſind, ſo wird jeder Aſtronom ſeine echnungen nach demſelben machen müſſen, da die äl- rn Tafeln ihm nicht die gehörige Genauigkeit gewäh- n würden. In kleinern Rechnungen z. E. bey geo- itiſchen, wird man ſich der bisherigen Eintheilung noch dienen können, ſo lange die Inſtrumente nach derſelben rfertigt ſind.

Decimal-Rechnung, iſt das Verfahren mit De- malbrüchen zu rechnen. Sie iſt in dem Artikel, De- malbruch, vorgetragen. Regiomontanus hat die Veranlaſſung zu dieſer Rechnung gegeben, da er die Serageſimal-Eintheilung des Halbmeſſers eines Kreiſes mit der bequemern in zehn Millionen Theile vertauſchte. Um die Mitte des ſechszehnten Jahrhunderts zeigten Buckley und Recorde in England und Ramus in Frankreich, wie die Bruchtheile bey der Ausziehung der Quadratwurzel in Decimaltheilen auszudrücken ſind, da man vorher irgend einen andern Bruch der ganzen Wur- elzahl angehängt hatte. Simon Stevin ſcheint die Rechnung mit Decimaltheilen wirkſam empfoh- en zu haben, in einer beſondern Schrift, die 1585 in iner franzöſiſchen Ueberſetzung herausgekommen, und einer praktiſchen Arithmetik, in der Sammlung einer Werke beygefügt iſt, worin er den Nutzen er Eintheilung und Rechnung nach Zehnen zeigt.

fallenden oder abnehmenden Reihe von den nächst
gehenden. Man begreift diese auch unter dem
Incrementa, die in diesem Falle negative Zunahm
Abnahmen sind. Die Benennung, Differenz,
beides. Gewöhnlich wird das vorhergehende Gl
dem folgenden abgezogen, so daß die Differenz neg
wenn jenes größer als dieses ist, beide positiv gen

Decussare, sich schneiden, wird von Lin
braucht. Decussis hieß bey den Römern ein
von zehn Pfund, decem asses. Dieses ward durch
zeichnet, daher auch diese Figur selbst decussis hieß

Deficiens hyperbola ist nach Newton
Gattung von Linien aus der dritten Ordnung, welc
eine Asymptote haben, an welcher sie mit zwey Sc
nach entgegengesezten Richtungen hinlaufen. Sie
mangelnde, weil die Hyperbel, welche ein Kegel
ist, zwey Asymptoten mit vier Schenkeln hat. Unt
Linien der dritten Ordnung giebt es auch Hyperbe
drey Asymptoten und sechs Schenkeln. Diese nennt N
hyperbolas redundantes.

Die Gleichung für die hyperbola deficiens is
$xyy + ax^3 + bx^2 + cx + ey + d = 0$, wo b

anderen Asymptote parallel sind. Die Hyperbel nähert sich mit denjenigen beiden Schenkeln, die zu der Asymptote der Curve gehören, dieser ohne Ende. Sechs Arten der defectiven Hyperbel haben keinen Durchmesser; sieben Arten haben einen, der nämlich die mit der Asymptote parallelen Doppelordinaten halbirt. Diese Hyperbeln können mit einer Ovale, einer knopfartigen Biegung, einem Knoten, einer Spitze verbunden seyn. Newtoni enum. linearum tertii ordinis. Fig. 43 — 53. S. Krumme Linien vom dritten Grade.

Deficiens numerus, eine Zahl, deren aliquote Theile zusammen genommen, weniger betragen als die Zahl selbst. Z. B. Die Zahl 105, deren einfache Factoren sind 3, 5, 7, und deren Theiler sind 1, 3, 5, 7, 15, 21, 35, von welchen die Summe ist 87. Die Formeln, wodurch Zahlen von dieser Beschaffenheit gefunden werden, sind denen ähnlich, wodurch die überschießenden Zahlen (numeri abundantes) gefunden werden, nur daß das Zeichen der Ungleichheit entgegen gesetzt zu nehmen ist. S. abundans numerus. Eine Zahl deren Theiler zusammen der Zahl selbst gleich sind, heißt eine vollkommene Zahl. Dieser Zahlen sind sehr wenige.

Definition. s. Erklärung

Dekadik, dekadisches Zahlensystem, dekadische Form der Zahlen, ist die Vertheilung der Zahlen in Classen von zehnfach steigenden Einheiten, deren jede Classe zehn enthält, so daß zehn Einheiten einer Classe eine Einheit der nächst höhern Classe ausmachen. Die Einheiten der vier ersten Classen heissen: Einer, Zehner, Hunderte, Tausende. Die Tausende zählen wir wie Einer bis zu tausend Tausenden, das ist einer Million; die Millionen wie Einer bis zu einer Million derselben oder einer Billion. Von dieser steigen wir zu einer Trillion, Quadrillion, Quinquillion, u. s. f., welche Einheiten jede eine Million mahl größer sind, als die nächst vorhergehende. In der Fortschreitung nach Zehnern ist auch die Fortschreitung nach Tausenden enthalten, so daß wir mit

ehen der Einer, der
nen Ruhepunct im Z
e als Ordnungen der
können. Die Abth
Billionen, Trillionen u. s. w. rührt von einem
ldischen Mathematiker, Albert Girard
gebra.
Die Bezeichnung der
theilung gemäße Art.
. s. werden alle durch
chig sind, angedeutet;
ist der Einheit wird durch die Stelle des Zei
eigt. Die Einer nehmen den ersten Platz r
ein, die Zehner den zweyten, die Hunderte
u. s. f. die Einer von Millionen den siebent
von Billionen den dreyzehnten, die Einer v
den neunzehnten, u. s. w. Die Stelle der B
man oben mit einem Striche, der Billi
Strichen u. s. w. bezeichnen; oder man ri
nen, die Billionen, u. s. f. oder die Abt
sechs Ziffern ein wenig von einander ab.
tung von Einheiten fehlt, so wird ihr
ausgefüllt. Die Sache ist so bekannt,
Beyspiele genügen wird. Die folgend
18''' 446744'' 073709' 5
ist die Summe der Körner, welche m
das erste Feld eines Schachbrettes e
zwey, für das dritte vier, und so im
rechnet werden. Das Zeichen 5 j
der ersten Stelle bedeutet es fünf
fünf Zehntausende, in der sechste
So auch für jede andere Zahlziffe
Die alten Völker, selbst die
sehr unbequeme Bezeichnungsarte
Indier haben die gegenwärtig
funden; von diesen ist sie durch
bekommen. Die Geschichte
nungsarten ist in dem Artikel:

Zahlen machen, daher wir
Zahlen, jede von drey
eilung der Zahlen in
Zahlen geschieht auf ei
Die Einer, Zehner,
dieselben Zeichen, deren
die Größe oder die

Dekadiſche Arithmetik. Die Rechnung mit hlen von der dekadiſchen Form. Zu vergleichen ſind die rikel; dodekadiſche und dyadiſche Arithmetik.

Dekagonalzahl iſt eine ganze Zahl von der Form (4n—3). Sie gehört unter die **Polygonalzahlen.** iehe dieſen Artikel.

Deliſche Aufgabe iſt eine bey den Alten ſehr berühmte Aufgabe von der Verdoppelung eines Würfels, s iſt, die Seite eines Würfels zu finden, welcher doplt ſo groß iſt als ein gegebener. Sie führt darauf, daß iſchen zwey gegebenen Linien zwey in ſtetiger Proportion funden werden. Denn das Verhältniß zweyer Würfel das dreyfache (triplicata) ihrer Seiten. In der ſtejen Progreſſion, a: b: c: d, iſt das Verhältniß : d auch das dreyfache des Verhältniſſes a: b, indem aus den drey gleichen Verhältnißen a: b; b: c; c: d ſammen geſetzt wird, (ſ. Verhältniß) Sind a und b Seiten zweyer Würfel, ſo verhalten ſich dieſe Körper : a: d, und umgekehrt iſt das Verhältniß der Würfel eben, ſo iſt das Verhältniß ihrer Seiten das von a: b r c: d, wo b und c die beiden mittlern Proportionalen ſchen a und d ſind. Dieſe können durch die gemeine metrie nicht gefunden werden; daher ward die Aufgabe die Alten von Wichtigkeit, indem ſie zu Unterſuchun höherer Art führte. Sie iſt auch durch Sagen von Veranlaſſung dazu verherrlicht. Der König Minos, eine Sage, habe ſeinem Sohn Glaukus ein Grab errichten laſſen. Da die Bauleute es hundert Fuß breit und hoch gemacht hatten, fand er es zu klein, rlangte, daß es noch einmahl ſo groß ſollte gemacht werden. Hier entſtand die Frage, wie die Seiten Würfel ſich verhalten, deren einer doppelt ſo groß der andere. Die zweyte Sage iſt, das Orakel zu habe einmahl befohlen, den Altar des Apollo, welWürfel war, zu verdoppeln. Da man dieſes bewerkſtelligen wußte, habe man bey Plato dazu eiſung geſucht. Dieſes erzählt Eratoſthenes in

einem Schreiben an den König Ptolemäus Evergetes, worin er ein von ihm erfundenes Instrument zur Erfindung zweyer oder auch mehrerer stetiger mittlern Proportionallinien beschreibt. Das Schreiben hat Eutocius in seinem Commentar über des Archimedes Schrift von Kugel und Cylinder aufbehalten. Plutarch in der Schrift von dem Genius des Sokrates führt die zweyte Sage noch mit mehrern Umständen an. Eine Pest in Griechenland habe veranlaßt das Orakel in Delos zu befragen, worauf man eine Antwort erhalten; da man aber die Vergrößerung des Altars auf unrechte Weise gemacht, und die Pest nicht nachgelassen habe, so sey man bey wiederholter Anfrage belehrt worden, daß die Form cubisch bleiben müßte. Plato habe den an ihn Abgeordneten geantwortet; dem Gott sey eigentlich an der Verdoppelung seines Altars nichts gelegen; er verweise dadurch den Griechen ihre Gleichgültigkeit gegen die Geometrie, befehle ihnen den Kriegen zu entsagen, und vermahne sie, sich der Erwerbung von Kenntnissen mit Ernst zu befleißigen. Vielleicht hat Plato selbst den Ausspruch des Orakels veranlaßt. Die Aufgabe von der Verdoppelung des Würfels ist älter. Denn Hippokrates von Chios, der durch die Quadratur der Lunula bekannt ist, ist schon vor Platons Zeit darauf gefallen, und hat auch eingesehen, daß die Auflösung auf die Erfindung zweyer mittlern Proportionallinien ankomme.

Die Aufgabe hat die vornehmsten Geometer unter den Alten beschäftigt. Ihre Auflösungen hat uns Eutocius a. a. O. aufbewahrt. Die von Eratosthenes, Nikomedes und Hero gegebenen hat Pappus in seine mathematischen Sammlungen aufgenommen, im 3ten Buche, wozu er noch eine von ihm gefundene fügt. Plato gebraucht eine Art von Parallellinial zur mechanischen Auflösung. Archytas von Tarent, ein vertrauter Freund des Plato, gab eine verwickelte, bloß intellectuelle Auflösung, welche gewisse Bewegungen von einem Dreyeck und einer Kreisfläche gebraucht. Menächmus, der, wie es scheint, zuerst die Kegelschnitte

trachtet hat, gebrauchte den Durchſchnittspunct einer arabel und Hyperbel, desgleichen auch den Durchnittspunct zweyer Parabeln, mit einem gemeinſchaftlien Scheitelpuncte Apollonius von Pergä hat ch dem Berichte des Pappus auch die Kegelſchnitte zur ıflöſung unſerer Aufgabe angewandt, aber ſein Verfahı iſt nicht zu uns gekommen. Seine mechaniſche Conuction iſt dieſelbe, wie die von Hero angegebene, welr ſie vielleicht von ihm entlehnt hat. Da man von der ıfgabe Gebrauch bey den Kriegsmaſchinen machen konnte, nn man die Verhältniſſe der Hauptmaaßen, nach der Wirıg, die ſie leiſten ſollten, zu beſtimmen hatte, ſo war man f praktiſche Conſtructionen bedacht, die durch Probiren s Geſuchte geben. Solche gaben Hero von Alexanen, und Philo von Byzanz. Die Auflöſung des kern beruhte darauf, daß eine gerade Linie durch einen gevenen Punct ſo gelegt ward, daß die Durchſchnittsncte mit den Schenkeln eines rechten Winkels von eis n beſtimmten Puncte, der Mitte zwiſchen dem gegebeı Puncte und dem Scheitel des rechten Winkels, glei Abſtände bekamen. Davon mußte man ſich durch unttelbare Meſſung verſichern. Die Conſtruction des ilo iſt etwas leichter. Durch einen gegebenen Punct dem Umfange eines gegebenen Kreiſes wird eine gerade ie ſo gelegt, daß die Theile derſelben zwiſchen dem Umge des Kreiſes und den Schenkeln eines rechten Winl gleich groß ausfallen. Eratoſthenes, der wegen ier aſtronomiſchen und geographiſchen Unterſuchungen ühmt iſt, erdachte ein Inſtrument, zwey oder mehrere tlere Proportionallinien zwiſchen zwey gegebenen zu en. Er ſchätzte dieſes ſo hoch, daß er es in einem Temmit einer Beyſchrift in Verſen aufhängen ließ, und h in einem Schreiben an den König Ptolemäus die Eintung und den Gebrauch erklärte. Pappus nennt es ein ſolabum. Nikomedes erfand die Conchoide, und Inſtrument zu ihrer Zeichnung, um dadurch unſere fgabe aufzulöſen. Er gebraucht ſie, um zwiſchen zwey

geraden Linien eine von gegebener Größe ſo zu legen, daß ihre Verlängerung durch einen gegebenen Punct geht. Sie dient ihm alſo das Verſuchen, das ohne ſie nöthig ſeyn würde, zu vermeiden. Die Conſtruction an ſich, auch ohne den Gebrauch der Conchoide, iſt ſinnreich, und die künſtlichſte von allen, ſo daß man Mühe hat, die Analyſis, wodurch der Urheber dazu gekommen iſt, zu errathen. Diokles gebrauchte die Ciſſoide, um durch ihren Durchſchnitt mit einer gegebenen geraden Linie zwey mittlere Proportionalen zu finden. Er fand durch eine Conſtruction mehrere Puncte derſelben, und zog durch dieſe eine krumme Linie, die für die Ciſſoide ſelbſt gelten konnte. Seine Abſicht ſcheint die Anwendung auf Wurfgeſchütze geweſen zu ſeyn. Er hat ſeine Auflöſung in einer Schrift περι πυριων (de pyriis) vorgetragen, in welcher vermuthlich diejenige Art von Wurfgeſchütz beſchrieben iſt, womit brennende Dinge geworfen wurden. Die Auflöſung, welche Pappus (mathem. Samml. 3. B. 5. S. und 8. B. 11. S.) giebt, iſt im Weſentlichen dieſelbe mit der von Diokles gegebenen, nur daß er den Punct, den dieſer durch die Ciſſoide findet, empiriſch mittelſt der Gleichheit zweyer Abſchnitte auf einer um einen feſten Punct gedrehten geraden Linie findet. Die Auflöſung des Sporus, welche Eutocius ebenfalls anführt, iſt von der nach Pappus gar nicht verſchieden.

In den neuern Zeiten iſt die Aufgabe von zwey mittlern ſtetigen Proportionalen oft vorgenommen worden. Orontius Finäus (Oronce Finée), Profeſſor der Mathematik zu Paris im 16ten Jahrhundert, glaubte auf mehrerley neue Arten die Aufgabe auflöſen zu können, aber irrig, welches Buteo und Nonius zeigten. Daſſelbe iſt mehrern begegnet, die nicht hinlängliche Kenntniß der Geometrie beſaſſen. Vieta gab eine Auflöſung mittelſt des Kreiſes und gerader Linien, wobey aber, wie in mehrern Conſtructionen der Alten eine gerade Linie durch einen gegebenen Punct ſo gezogen werden muß, daß der durch zwey gegebene Linien auf ihr abgeſchnittene Theil

dem Halbmeſſer des Kreiſes gleich ſey. (Opp. mathem. p. 242). Für den Fall, da die beiden gegebenen Linien ſich wie 1 : 2 verhalten, hat er noch eine beſondere Auflöſung (a. a. O. p. 354).

Die analytiſche Behandlung der Geometrie, welche Des cartes lehrte, gab die völlige Aufklärung über die Beſchaffenheit dieſer Aufgabe. Man ſah, daß ſie nur ein ſehr beſonderer Fall derjenigen iſt, jede Gleichung vom dritten oder vierten Grade durch eine geometriſche Conſtruction aufzulöſen, wozu man nothwendig einen Kegelſchnitt in Verbindung mit einem andern, oder bequemer mit einem Kreiſe gebraucht. Die alten Geometer haben allerdings eingeſehen, daß die Aufgabe von den beiden mittlern Proportionalen ein problema ſolidum ſey, wozu Linien aus einem Körper geſchnitten, das iſt Kegelſchnitte, erfordert werden, welches Pappus deutlich bezeuget (Collect. mathem. pag. 7.). Weil die Kegelſchnitte nicht leicht zu zeichnen ſind, ſo haben ſie, ſagt er, zu einer bequemen und ſchicklichen Conſtruction, die mit der Hand auszuführen iſt, verſchiedene ſinnreiche Werkzeuge erdacht. Wir ſehen den Grund deutlich ein aus der Beſchaffenheit der Gleichung, welche die Ordinaten oder Abſciſſen zu den Durchſchnittspuncten zweyer Linien angiebt. Soll eine Gleichung durch die Durchſchnitte zweyer Linien conſtruirt werden, ſo kann das Product der Exponenten ihrer Ordnungen nicht niedriger ſeyn, als der Grad der Gleichung. Die Gleichung für die erſte der mittlern Proportionalen zwiſchen a und b iſt $aab = z^3$. Denn es ſeyn die beiden erſten in der Progreſſion, a und z, ſo iſt die dritte $\frac{z^2}{a}$ und die vierte $\frac{z^3}{a^2}$. Heißt dieſe b, ſo iſt $a^2b = z^3$. Man müßte eine Linie vom dritten Grade conſtruiren, wenn die andere eine gerade Linie ſeyn ſollte. Dieſes könnte nur auf ſehr beſchwerliche Art durch einzelne Puncte geſchehen. Man muß alſo zwey krumme Linien nehmen, zwey Kegelſchnitte, worunter auch der Kreis mit

begriffen seyn mag. Diese Linien sind vom zweyten Grade, und dienen daher zwar schon zur Auflösung der Gleichungen vom vierten Grade, aber auch derer vom dritten Grade, die durch die Multiplication mit der unbekannten Größe zu einer Gleichung vom vierten hinaufsteigen, wie $z^3 - bz = z^4$. Eine Wurzel ist $= 0$, so wie in der Construction für den einen Durchschnittspunct die Ordinate $= 0$ ist.

Descartes gebraucht hier, wie überhaupt für Gleichungen vom dritten und vierten Grade, den Kreis mit der Parabel, weil der Kreis leicht beschrieben wird. Sein Commentator, der P. Rabuel, zeigt (p. 530) wie man auf zweyerley Art die Hyperbel mit dem Kreise verbinden könne, und bringt auch die Construction des Menächmus mit zwey Parabeln bey, die in Absicht der Deduction die leichteste ist. De Slüse zeigte in der Schrift, die er Mesolabum betitelte, wie die beiden Proportionalen auf mancherley Art durch zwey Kegelschnitte gefunden werden können, synthetisch nach der Form der alten Geometrie, (s. oben S. 61.). Einige solche Constructionen findet man in Wolfs Elementis Analyseos finit. §. 624. Newton theilt in der Arithm. universali in Append. de aequat. constr. lineari drey Constructionen mit. Sie beruhen darauf, daß entweder zwischen zwey der Lage nach gegebenen geraden Linien, oder zwischen einem Kreise und einer geraden Linie, oder zwischen zwey Kreisen eine gerade Linie so gelegt werde, daß sie durch einen gegebenen Punct gehe. Bey den beiden ersten ist die Conchoide anwendbar. Die erste von allen dreyen ist die eine von Vieta angegebene mit einer geringen Abänderung. Newton setzt auch hinzu, daß diese Construction bekannt sey.

Von den manchen Auflösungen setze ich hierher eine vorzügliche unter den alten, die von Nikomedes gegebene, mit ihrem geometrischen Beweise, und die einfachste unter den neuern, nach Descartes mit der analytisch-geometrischen Herleitung.

Auf die Schenkel eines rechten Winkels E A F (Fig. 111. Tab. VII.) trage man die beiden äußern der vier

Proportionalen AB, AC von dem Scheitelpuncte aus, und vollende das Parallelogramm, ABDC. Die Linie AB halbire man in G, und AC in H. Durch D und G ziehe man die gerade DG, welche den nach K verlängerten Schenkel FA in K schneide. In H errichte man die senkrechte HL, und ziehe von C aus an dieselbe die CL = AG. Durch K und L werde KL gezogen, und mit dieser die Parallele CM. Durch L lege man die gerade LNF so, daß das zwischen CF und CM abgeschnittene Stück NF = AG sey. Dieses geschieht (wenn man sich keines empirischen Verfahrens bedienen will) vermittelst einer Conchoide, die aus dem Pol L über der Grundlinie CM mit der gegebenen AG beschrieben wird. Nun ziehe man durch F und D die gerade FDE, welche den andern Schenkel des rechten Winkels in E schneidet, so sind die Linien DC : CF : BE : BD, oder AB : CF : BE : AC in stetiger Proportion.

Es wird eine Übung in der geometrischen Analysis seyn, den Weg zu suchen, auf welchem Nikomedes zu seinem synthetischen Beweise gelangt seyn mag.

Nachdem das Parallelogramm ABDC gezeichnet ist, ziehe man die Linie EDF willkührlich, so ist DC : CF = EB : BD. Die vier Linien sind immer proportionale, und in einem besondern Falle stetige. Man setze, sie seyn stetige proportionale, so ist DC : CF = CF : EB, wodurch auch CF : EB = EB : BD ist. Die erste dieser Proportionen giebt $CF^2 = DC . EB$. Um die beiden Theile der Gleichung sich ähnlich zu machen, nehme man anstatt des Verhältnisses DC : CF das ihm gleiche AE : AF, so ist AE : AF = CF : EB, und daher AE . BE = AF . CF. Halbirt man AB in G, und AC in H, so ist $AE . BE + BG^2 = EG^2$, und $AF . CF + HC^2 = FH^2$, (Euklides II. 6.). Ist AC kleiner als AB, so ist HC kleiner als BG, und da AE . BE = AF . CF ist, so ist FH kleiner als EG. Um eine Gleichung zu erhalten, addire man zu FH^2 ein Quadrat so groß, daß die Summe gleich EG^2 sey. Zu dem Ende errichte man in H auf AC die senkrechte HL, und setze, daß $FH^2 + HL^2 = EG^2$

seyn. Es ist also $AF.CF + HC^2 + HL^2 = AE.BE + BG^2$. Da die beiden Rechtecke $AF.CF$ und $AE.BE$ gleich sind, so ist $HC^2 + HL^2 = BG^2$. Zieht man CL, so ist $HC^2 + HL^2 = CL^2$, also $CL = BG$, folglich ist die Linie HL gegeben. Man ziehe FL, so ist $FL = EG$. Es werde nun $NF = BG$ genommen, so ist $LN = EB$. Nun ziehe man CN, und mit dieser die parallele LK bis an die verlängerte FA, so ist $FN : NL = FC : CK$, das ist, $BG : BE = FC : CK$. Es ist aber $BE : AB = (ED : DF =) AC : CF$, also ist $BG : AB = AC : CK$. Da BG die Hälfte von AB ist, so ist AC die Hälfte von CK, oder $AK = AC$, also ist K ein gegebener Punct. Da man nun von dem als gegeben angenommenen, aber gesuchten Puncte F auf einen gegebenen gekommen ist, so kann man auch von diesem zu jenem gelangen. Das giebt die von Nikomedes vorgetragene Construction.

Die analytisch-geometrische Auflösung ist eine Construction der Gleichung, $x^3 = aab$, oder der, $y^3 = abb$. Denn es seyn a und b die zwey gegebenen Größen, x die erste der beiden mittlern Proportionalen, und y die zweyte, so ist $a : x = x : y$ und $x : y = y : b$. Aus jener wird erhalten $x^2 = ay$; aus dieser, $y^2 = bx$. Jene Gleichung quadrirt wird $x^4 = a^2 y^2$, also ist $x^3 = aab$. Eben so ist $y^3 = abb$. Die Construction dieser Gleichungen ist in der allgemeinen begriffen, die in dem Artikel, Anwendung der Geometrie auf die Algebra, II. S. 134. gelehrt ist. Aus jener folgt für diesen Fall folgende Construction der Gleichung $y^3 = abb$. Man zeichne (Fig. 112. Tab. VII.) eine Parabel AM, deren Parameter $= b$, und Axe AX ist. Auf AX nehme man $AB = \frac{1}{2}b$, und setze auf AB in B die senkrechte $BC = \frac{1}{2}a$, beschreibe aus C mit dem Halbmesser AC durch den Scheitel A einen Kreis, welcher die Parabel in M schneide, und ziehe durch M die senkrechte MP auf AX, so ist $AP = x$; $PM = y$.

Aus dieser Construction folgen umgekehrt die beiden Gleichungen $x^2 = ay$ und $y^2 = bx$. Die letztere ist die Gleichung für die angenommene Parabel. Man ziehe

Q ſenkrecht auf MP, ſo iſt $MC^2 = (x - \frac{1}{2}b)^2 + (y - \frac{1}{2}a)^2 = x^2 - bx + \frac{1}{4}b^2 + y^2 - ay + \frac{1}{4}a^2$. Da $IC^2 = AC^2 = \frac{1}{4}a^2 + \frac{1}{4}b^2$, und $bx = y^2$ iſt, ſo iſt $a^2 = ay$, welches die erſte jener Gleichungen iſt. Folglich ſind $a : x : y : b$ continuirlich proportionale.

Der geometriſche Beweis dieſer Auflöſung iſt folgender. Der Kreis ſchneide die Are der Parabel außer in A noch in D, und die Ordinate außer in M noch in N, ſo iſt $AB = BD$, und $MQ = NQ$, da die ſenkrechte aus dem Mittelpuncte eines Kreiſes auf eine Chorde ſie halbirt. An der Parabel iſt $AD \times AP = PM^2$, da AD oder 2 AB der Parameter iſt. Es iſt, in dem Falle der Figur, . . $AD = AP + PD$, und $PM = 2PQ + PN$, daher $AP qu + AP \times PD = 2PQ \times PM + PM \times PN$. In dem Kreiſe iſt $AP \times PD = PM \times PN$; folglich $AP qu = 2PQ \times PM = 2CB \times PM$. Daraus $2CB : AP = AP : PM$. An der Parabel iſt $P : PM = PM : 2AB$. Folglich ſind $2CB : AP : PM : AB$ continuirlich proportionale.

Die Conſtruction befriedigt den Verſtand vollkommen. Die Ausübung verlangt ein leichteres Verfahren, das härfer iſt als die Zeichnung ſinnlicher Linien ſeyn kann. Dieſes iſt die Ausziehung der Cubikwurzel aus aab und bb, wenn a und b als Zahlgrößen gegeben werden. Da dieſe den Alten Schwierigkeit machte, ſo waren ihnen geometriſche Conſtructionen nöthig. Dieſe zogen ſie auch wegen ihrer intellectuellen Vollkommenheit der arithmetiſchen Annäherung vor.

Montucla hiſtoire des recherches ſur la quadrature du Cercle — avec une addition concernant les problêmes de la duplication du cube et de la triſection de l'angle, à Paris 1754. 8.

Hiſtoria problematis de cubi duplicatione ſive de inveniendis duabus mediis continue proportionalibus inter duas datas, auct. N. Th. Reimer, Gottingae 1798. 222 pag. 8. iſt eine mit philologiſcher Belehrſamkeit und mathematiſchen Einſichten abgefaßte Schrift. Die Auflöſungen der Alten ſind darin alle mit

begriffen seyn mag. Diese Linien sind vom zweyten Grade, und dienen daher zwar schon zur Auflösung der Gleichungen vom vierten Grade, aber auch derer vom dritten Grade, die durch die Multiplication mit der unbekannten Größe zu einer Gleichung vom vierten hinaufsteigen, wie $a^3bz = z^4$. Eine Wurzel ist $= 0$, so wie in der Construction für den einen Durchschnittspunct die Ordinate $= 0$ ist.

Descartes gebraucht hier, wie überhaupt für Gleichungen vom dritten und vierten Grade, den Kreis mit der Parabel, weil der Kreis leicht beschrieben wird. Sein Commentator, der P. Rabuel, zeigt (p. 530) wie man auf zweyerley Art die Hyperbel mit dem Kreise verbinden könne, und bringt auch die Construction des Menächmus mit zwey Parabeln bey, die in Absicht der Deduction die leichteste ist. De Slüse zeigte in der Schrift, die er Mesolabum betitelte, wie die beiden Proportionalen auf mancherley Art durch zwey Kegelschnitte gefunden werden können, synthetisch nach der Form der alten Geometrie, (s. oben S. 61.). Einige solche Constructionen findet man in Wolfs Elementis Analyseos finit. §. 624. Newton theilt in der Arithm. universali in Append. de aequat. constr. lineari drey Constructionen mit. Sie beruhen darauf, daß entweder zwischen zwey der Lage nach gegebenen geraden Linien, oder zwischen einem Kreise und einer geraden Linie, oder zwischen zwey Kreisen eine gerade Linie so gelegt werde, daß sie durch einen gegebenen Punct gehe. Bey den beiden ersten ist die Conchoide anwendbar. Die erste von allen dreyen ist die eine von Vieta angegebene mit einer geringen Abänderung. Newton setzt auch hinzu, daß diese Construction bekannt sey.

Von den manchen Auflösungen setze ich hierher eine vorzügliche unter den alten, die von Nikomedes gegebene, mit ihrem geometrischen Beweise, und die einfachste unter den neuern, nach Descartes mit der analytisch-geometrischen Herleitung.

Auf die Schenkel eines rechten Winkels E A F (Fig. 111. Tab. VII.) trage man die beiden äußern der vier

Proportionalen AB, AC von dem Scheitelpuncte aus, nd vollende das Parallelogramm, ABDC. Die Linie B halbire man in G, und AC in H. Durch D und ziehe man die gerade DG, welche den nach K verlängerten Schenkel FA in K ſchneide. In H errichte man ie ſenkrechte HL, und ziehe von C aus an dieſelbe die L = AG. Durch K und L werde KL gezogen, und ihr dieſer die Parallele CM. Durch L lege man die erade LNF ſo, daß das zwiſchen CF und CM abgeſchnittene Stück NF = AG ſey. Dieſes geſchieht (wenn an ſich keines empiriſchen Verfahrens bedienen will) vermittelſt einer Conchoide, die aus dem Pol L über der Grundlinie CM mit der gegebenen AG beſchrieben wird. Nun ziehe man durch F und D die gerade FDE, welche en andern Schenkel des rechten Winkels in E ſchneidet, ſind die Linien DC : CF : BE : BD, oder AB : CF : E : AC in ſtetiger Proportion.

Es wird eine Übung in der geometriſchen Analyſis yn, den Weg zu ſuchen, auf welchem Nikomedes zu ſeim ſynthetiſchen Beweiſe gelangt ſeyn mag.

Nachdem das Parallelogramm ABDC gezeichnet iſt, ehe man die Linie EDF willkührlich, ſo iſt DC : CF = EB : BD. Die vier Linien ſind immer proportionale, ob in einem beſondern Falle ſtetige. Man ſetze, ſie ſeyn ſtetige proportionale, ſo iſt DC : CF = CF : EB, wodurch auch CF : EB = EB : BD iſt. Die erſte dieſer Proportionen giebt $CF^2 = DC . EB$. Um die beiden Theile der Gleichung ſich ähnlich zu machen, nehme man anſtatt des Verhältniſſes DC : CF das ihm gleiche AE : AF, ſo iſt AE : AF = CF : EB, und daher AE . BE = AF . CF. Halbirt man AB in G, und AC in H, ſo iſt $AE . BE + BG^2 = EG^2$, und $AF . CF + HC^2 = FH^2$, (Euclides II. 6.). Iſt AC kleiner als AB, ſo iſt HC kleiner als BG, und da AE . BE = AF . CF iſt, ſo iſt FH kleiner als EG. Um eine Gleichung zu erhalten, addire man zu FH^2 ein Quadrat ſo groß, daß die Summe gleich EG^2 ſey. Zu dem Ende errichte man in H auf AC die ſenkrechte HL, und ſetze, daß $FH^2 + HL^2 = EG^2$

sey. Es ist also $AF.CF + HC^2 + HL^2 = AE.BE + BG^2$. Da die beiden Rechtecke $AF.CF$ und $AE.BE$ gleich sind, so ist $HC^2 + HL^2 = BG^2$. Zieht man CL, so ist $HC^2 + HL^2 = CL^2$, also $CL = BG$, folglich ist die Linie HL gegeben. Man ziehe FL, so ist $FL = EG$. Es werde nun $NF = BG$ genommen, so ist $LN = EB$. Nun ziehe man CN, und mit dieser die parallele LK bis an die verlängerte FA, so ist $FN : NL = FC : CK$, das ist, $BG : BE = FC : CK$. Es ist aber $BE : AB = (ED : DF =) AC : CF$, also ist $BG : AB = AC : CK$. Da BG die Hälfte von AB ist, so ist AC die Hälfte von CK, oder $AK = AC$, also ist K ein gegebener Punct. Da man nun von dem als gegeben angenommenen, aber gesuchten Puncte F auf einen gegebenen gekommen ist, so kann man auch von diesem zu jenem gelangen. Das giebt die von Nikomedes vorgetragene Construction.

Die analytisch-geometrische Auflösung ist eine Construction der Gleichung, $x^3 = aab$, oder der, $y^3 = abb$. Denn es seyn a und b die zwey gegebenen Größen, x die erste der beiden mittlern Proportionalen, und y die zweyte, so ist $a : x = x : y$ und $x : y = y : b$. Aus jener wird erhalten $x^2 = ay$; aus dieser, $y^2 = bx$. Jene Gleichung quadrirt wird $x^4 = a^2 y^2$, also ist $x^3 = aab$. Eben so ist $y^3 = abb$. Die Construction dieser Gleichungen ist in der allgemeinen begriffen, die in dem Artikel, Anwendung der Geometrie auf die Algebra, II. S. 134. gelehrt ist. Aus jener folgt für diesen Fall folgende Construction der Gleichung $y^3 = abb$. Man zeichne (Fig. 112. Tab. VII.) eine Parabel AM, deren Parameter $= b$, und Axe AX ist. Auf AX nehme man $AB = \frac{1}{2}b$, und setze auf AB in B die senkrechte $BC = \frac{1}{2}a$, beschreibe aus C mit dem Halbmesser AC durch den Scheitel A einen Kreis, welcher die Parabel in M schneide, und ziehe durch M die senkrechte MP auf AX, so ist $AP = x$; $PM = y$.

Aus dieser Construction folgen umgekehrt die beiden Gleichungen $x^2 = ay$ und $y^2 = bx$. Die letztere ist die Gleichung für die angenommene Parabel. Man ziehe

ſenkrecht auf MP, ſo iſt $MC^2 = (x - \frac{1}{2}b)^2 - \frac{1}{4}a)^2 = x^2 - bx + \frac{1}{2}b^2 + y^2 - ay + \frac{1}{4}a^2$. Da $= AC^2 = \frac{1}{4}a^2 + \frac{1}{4}b^2$, und $bx = y^2$ iſt, ſo iſt ay, welches die erſte jener Gleichungen iſt. Folg- nd a:x:y:b continuirlich proportionale.

)er geometriſche Beweis dieſer Auflöſung iſt folgen- Der Kreis ſchneide die Are der Parabel außer in A n D, und die Ordinate außer in M noch in N, ſo iſt =BD, und MQ=NQ, da die ſenkrechte aus dem lpuncte eines Kreiſes auf eine Chorde ſie halbirt. An arabel iſt $AD \times AP = PM^2$, da AD oder 2AB arameter iſt. Es iſt, in dem Falle der Figur, . . =AP+PD, und PM=2PQ+PN, daher qu+AP×PD=2PQ×PM+PM×PN. m Kreiſe iſt AP×PD=PM×PN; folglich qu=2PQ×PM=2CB×PM. Daraus B:AP=AP:PM. An der Parabel iſt PM=PM:2AB. Folglich ſind 2CB:AP:PM: continuirlich proportionale.

)ie Conſtruction befriedigt den Verſtand vollkommen. Ausübung verlangt ein leichteres Verfahren, das r iſt als die Zeichnung ſinnlicher Linien ſeyn kann. 3 iſt die Ausziehung der Cubikwurzel aus aab und wenn a und b als Zahlgrößen gegeben werden. Da en Alten Schwierigkeit machte, ſo waren ihnen geo- che Conſtructionen nöthig. Dieſe zogen ſie auch we- rer intellectuellen Vollkommenheit der arithmetiſchen)erung vor.

Contucla hiſtoire des recherches ſur la quadra-)u Cercle — avec une addition concernant les êmes de la duplication du cube et de la triſec- de l'angle, à Paris 1754. 8.

iſtoria problematis de cubi duplicatione ſive veniendis duabus mediis continue proportio- us inter duas datas, auct. N. Th. Reimer, ngae 1798. 222 pag. 8. iſt eine mit philologiſcher rſamkeit und mathematiſchen Einſichten abgefaßte ſt. Die Auflöſungen der Alten ſind darin alle mit

mancherley Bemerkungen vorgetragen. Von den neuern ist eine kurze Anzeige geschehen.

Demonstration, s. Beweis.

Denominator Fractionis, s. Nenner.

Denominator rationis ist entweder einerley mit dem Exponenten eines Verhältnisses, oder wie Wolf es annimmt, der Quotient von der Division des größern Gliedes durch das kleinere, (Elem. Anal. §. 113.). Allein für allgemeine Rechnungen, in welchen die Quantität nicht bestimmt wird, ist diese Einschränkung hinderlich.

Derivations-Rechnung ist die Methode, eine Function einer oder mehrerer veränderlichen Größen so zu entwickeln, daß die Glieder der entwickelten Function nach einem bestimmten Gesetze aus einander hergeleitet werden. Arbogast, Mitglied des französischen National-Instituts, und Professor der Mathematik zu Straßburg, hat diese Methode in einem besondern Werke vorgetragen, und auf verschiedene schwere Untersuchungen angewandt. Der Titel ist: Du calcul des dérivations, par L. F. A. Arbogast. à Strasbourg, An. VIII. (1800), 404 pagg. in — 4. Ich werde aus diesem Werke die Derivations-Rechnung in ihrer Anwendung auf den leichtesten Fall erklären, und einige Erläuterungen hinzufügen. Das scharfsinnige und gelehrte Werk verdient von den Liebhabern der höhern Analysis ganz und mit Fleiß studirt zu werden.

1. Die Art, wie in einer Reihe von Größen jede bestimmt wird, ist in der allgemeinen Form verschieden. Ein Glied der Reihe kann eine bestimmte Function der Stelle desselben seyn. Es kann aber auch nach einem gewissen Gesetze aus dem vorhergehenden, aus einigen, ja aus allen vorhergehenden Gliedern bestimmt werden. Diese Art der Verknüpfung unter den Gliedern einer Reihe ist eine Derivation. Die Glieder der entwickelten Potenz eines Binomium $(a+b)^m$ sind ein Beyspiel einer einfachen Derivation. Zwey auf einander folgende Glieder der Potenz seyn $Pa^{m-n}b^n$ und $Qa^{m-n-1}b^{n+1}$, so ist . . .

$\frac{P(m-n)}{n+1}$. Ein anderes Beyſpiel dieſer Art Derivation geben die Glieder der Reihe für den Bo- oder Winkel φ durch den Sinus, oder des Sinus den Winkel. Alle ſucceſſiven Differentiale einer Fun- durch die conſtanten Differentiale der Functionalgrö- ividirt, geben eine ſolche einfache Derivation. La ige hat daher auch dieſe Quotienten dérivées genannt, ein neues ſehr fruchtbares Syſtem von analytiſchen ationen darauf gegründet. Wenn man zu einer Fun- einer veränderlichen Größe das Differential derſelben Factor ſetzt, dann das Integral nimmt, mit dieſem er ſo verfährt, und ſo immer weiter geht, ſo entſteht eine Reihe von einfach derivirten Größen.

2. Die Derivation kann auch eine zuſammengeſetzte, oder weniger verwickelte, ſeyn, wenn ſie nicht bloß einem gewiſſen Geſetze aus dem vorhergehenden de einer Reihe geſchieht, ſondern dabey noch die Größen andern Reihe, ja auch mehrerer Reihen, eingeführt en, doch ſo, daß die Verknüpfung derſelben mit den chen Derivationen nach einem gewiſſen Geſetze ge- e, ſo viele Glieder der andern Reihe auch genommen en müſſen. Ein Beyſpiel giebt die Potenz eines nomium, $p = a + bz + cz^2 + dz^3 + \text{etc.}$ Es $p^m = A + Bz + Cz^2 + Dz^3 + Ez^4 + \text{etc.}$ ſo en die Coefficienten in dieſer Reihe jeder aus allen vor- ehenden, und eben ſo vielen Coefficienten in der Wurzel t dem gleichſtelligen in derſelben nach einem allgemeinen tze hergeleitet, ſ. combinatoriſche Analyſis (52.). unabhängigen Werthe dieſer Coefficienten, welche das fahren in (35.) daſelbſt liefert, werden ebenfalls durch tauſchung jedes einzelnen Coefficienten a, b, c, d, mit dem nächſtfolgenden b, c, d, e, etc. und Divi- mit der Anzahl derſelben in jeder Combination herge- t. Z. B. es iſt

$$E = A a^{m-1} e + B a^{m-2} (2bd + c^2) + C a^{m-3} \cdot 3b^2 c + D a^{m-4} b^4,$$

A, B, C, D, die Binomialcoefficienten in der mten

Potenz sind. Durch die angegebene Vertauschung und Division wird der folgende Coefficient,

$$F = Aa^{m-1}f + Ba^{m-2}(2bc + 2cd) + Ca^{m-3}(3b^2d + 3bc^2) + Da^{m-4}.4b^3c + Ea^{m-5}b^5.$$

Die Derivationen der zweyten Art, oder die zusammengesetzten, sind es, womit sich die Derivationsrechnung vornämlich beschäftigt.

3. Die leichteste Aufgabe für die Derivationsrechnung ist die Entwickelung einer unbestimmten Function einer zweytheiligen Größe. Diese geschieht mittelst des Taylorschen Lehrsatzes. Die zweytheilige Größe sey $\alpha + x$, wo α eine veränderliche Größe ist, deren Differential unveränderlich genommen wird, und x eine von derselben unabhängige Größe bedeutet. Irgend eine Function von beiden zusammen, werde durch $F(\alpha + x)$ bezeichnet, so ist

$$F(\alpha + x) = F\alpha + \frac{dF\alpha}{1.d\alpha}x + \frac{d^2F\alpha}{1.2.d\alpha^2}x^2 + \frac{d^3F\alpha}{1.2.3.d\alpha^3}x^3 + \frac{d^4F\alpha}{1\ldots4.d\alpha^4}x^4 + \text{etc.}$$

Die Differentialquotienten hängen von der Beschaffenheit der Function $F\alpha$ ab, und werden jeder aus dem vorhergehenden allein, auf eine gleichmäßige Art nach den Regeln der Differentialrechnung hergeleitet. Der Lehrsatz macht die Grundlage der Derivationsrechnung.

4. Es sey x eine aus Potenzen einer andern unbestimmten Größe z mit unveränderlichen Coefficienten zusammengesetzte Reihe, und die entwickelte Function, $F(\alpha + x)$, werde nach den Potenzen dieser Größe z geordnet, so bestehen die Coefficienten von z theils aus den Coefficienten derselben z in der Functionalgröße, theils aus den Differentialquotienten der Function $F\alpha$; aber die Factoren, welche aus jenen zusammmengesetzt werden, sind von diesen Quotienten unabhängig. Die Form jener Factoren ist nicht allein unabhängig von der Relation und der Quantität der Coefficienten in der durch x bezeichneten Reihe, sondern auch unabhängig von der Art und Beschaffenheit der Function.

Die Differentialquotienten, $\frac{dFa}{da}$, $\frac{d^2Fa}{da^2}$, ; etc. bezeichnet Arbogaſt durch DFa, D^2Fa, u. ſ. f. wo der Buchſtab D aus der kleinen Cariſt genommen iſt, um dieſe Operation von der ntiation, und zugleich das Zeichen derſelben von ymbol D eines Coefficienten zu unterſcheiden. Die ionen, wodurch die Größen DFa, D^2Fa, D^3Fa, die erſte aus Fa, die andern jede aus der nächſt ehenden hergeleitet werden, nennt er Derivationen. röße selbſt werden derivirte genannt.

Dieſem nach iſt $F(a+x)=Fa+\frac{DFa}{1}x$ $\frac{D^2Fa}{1.2}x^2+\frac{D^3Fa}{1.2.3}x^3+\frac{D^4Fa}{1.2.3.4}x^4+$ etc.

Wenn $Fa=a$ genommen wird, ſo iſt $\frac{da}{da}=1$. Arbogaſt ſetzt $da=1$, weil es unrlich iſt. Allein dieſes verurſacht einen Anſtoß, Differential mit keiner endlichen Größe verglichen kann.

Die Functionalgröße ſey $a+\beta x$, ſo iſt $F(a+\beta x)=$ $+\frac{DFa}{1}\beta x+\frac{D^2Fa}{1.2}\beta^2x^2+$ etc. Um β mit derivirten Größen zu begreifen, gebraucht Arbos Derivationszeichen mit einem Punete dahinter, ermaßen:

$$-\beta x)=Fa+\frac{D.Fa}{1}x+\frac{D^2.Fa}{1.2}x^2+\frac{D^3.Fa}{1.2.3}x^3+\text{etc.}$$

$D^n.Fa=D^nFa.\beta^n$ iſt.

9. Eben dieſe Bezeichnung gebraucht Arbogaſt auf eine allgemeinere Art bey der Entwickelung der ction,

$$\varphi(\alpha+\beta x+\gamma x^2+\delta x^3+\text{etc.}),$$

ſo daß die entwickelte Function folgendergeſtalt b net wird,

$$\varphi\alpha+\frac{D.\varphi\alpha}{1}x+\frac{D^2.\varphi\alpha}{1.2}x^2+\frac{D^3.\varphi\alpha}{1.2.3}x^3+$$

wo die punctirten Derivationszeichen Zuſammenſetz aus den Coefficienten β, γ, δ, etc. und den derivirte $\varphi\alpha$ bedeuten. Kurz, das Derivationszeichen ohne zeigt eine einfache Derivation, das mit einem P verbundene eine zuſammengeſetzte, oder eine Derivatio zweyten Art an.

10. Die Coefficienten in der entwickelten Reihe ſtimmen giebt Arbogaſt zwey Methoden an, deren e er gegen die zweyte zurückſetzt, wiewohl ſie doch üb Derivation der Coefficienten ſehr guten Aufſchluß Das Verfahren iſt folgendes.

Von der Function $F(\alpha+\beta x)$ nehme man wiede Function, deren Beſchaffenheit durch φ bezeichnet nämlich $\varphi F(\alpha+\beta x)$, wie z. B. log. sin ω eine Doppelfunction von dem Winkel ω iſt. Es iſt

$$\varphi F(\alpha+\beta x)=\varphi F\alpha+\frac{d\varphi F\alpha}{1.d\alpha}\beta x+\frac{d^2\varphi F\alpha}{1.2.d\alpha^2}\beta^2x^2+\text{etc.}$$

oder in Derivations-Ausdrücken,

$$\varphi F(\alpha+\beta x)=\varphi F\alpha+\frac{D.\varphi F\alpha}{1}x+\frac{D^2.\varphi F}{1.2}+\frac{D^3.\varphi F\alpha}{1.2.3}x^3+\text{etc.}$$

Da die Funct.onalgröße, nämlich $F(\alpha+\beta x)$, Reihe iſt, die in (8.) entwickelt worden, ſo hat man die Entwickelung einer Function einer vieltheiligen G zu machen, deren Glieder aber von einander abhängig

n ſetze, um abzukürzen, $F\alpha = a$, ſo iſt nach der Be-
nung in (9.)

$$\varphi(a + \frac{D.a}{1}x + \frac{D^2.a}{1.2}x^2 + \frac{D^3.a}{1.2.3}x^3 + \text{etc.})$$

$$=$$

$$\varphi a + \frac{D.\varphi a}{1}x + \frac{D^2.\varphi a}{1.2}x^2 + \frac{D^3.\varphi a}{1.2.3}x^3 + \text{etc.}$$

ſind nun die Werthe von $D.\varphi a$; $D^2.\varphi a$, etc. durch
φa, $D^3\varphi a$, etc. und durch $D.a$, $D^2.a$, etc. auszu-
cken, oder die zuſammengeſetzten Derivationen auf ein-
ge zu bringen.

II. So wie in (8.) iſt $D.F\alpha = DF\alpha.\beta$, ſo iſt
r $D.\varphi a = D\varphi a.D.a$. indem die in der Functional-
ſße befindlichen, zu x^2 und den folgenden Potenzen ge-
rigen Coefficienten auf den von x in der entwickelten
nction keinen Einfluß haben, und in Abſicht auf dieſen
nicht vorhanden zu betrachten ſind. Allein bey den fol-
den Derivationen kommen die derivirten von $D.a$,
mlich D^2a; $D^3.a$, etc. allerdings nach einander in Rech-
ng, ſo weit als die mit ihnen in der Function

$(a + \frac{D.a}{1}x + \text{etc.})$ verbundenen Potenzen es
fordern. Das Verfahren iſt dem ähnlich, welches
y der Differentiation eines Products aus zwey oder meh-
ren veränderlichen Factoren angewandt wird. Die de-
rirte jedes Factors wird in das Product der übrigen Fac-
ren multiplicirt.

Die derivirte $D^2.\varphi a$ entſteht durch eine Derivation
r zweyten Art aus $D.\varphi a$, oder aus $D\varphi a.D.a$. Es
: $D.(D.a) = D^2.a$, aus der Reihe für $F(\alpha + \beta x)$,
nd $D.D\varphi a = D^2\varphi a.D.a$, eben ſo wie aus $D.\varphi x$ her-
leitet iſt $D\varphi a.D.a$. Alſo iſt

$D^2.\varphi a = D\varphi a.D^2.a + D^2\varphi a.(D.a)^2$.

uf ähnliche Art wird die derivirte $D^3.\varphi a$ gefunden. Es
t $D.(D^2.a) = D^3.a$, und $D.(D.a)^2 = 2D.a \times D^2.a$,

indem für jeden der beiden Factoren der derivirte zu
ist. Auch ist $D.(D^2\varphi a) = D^3\varphi a.D.a$. Folglich

$$D^3.\varphi a = D\varphi a.D^3.a + D^2\varphi a.D.a.D^2.a$$
$$+ D^2\varphi a \times 2D.a.D^2.a + D^3\varphi a.(D.a)^3$$
$$= D\varphi a.D^3.a + 3D^2\varphi a.D.a.D^2.a$$
$$+ D^3\varphi a.(D.a)^3.$$

Ferner ist

$$D^4.\varphi a = D\varphi a.D^4.a + D^2\varphi a(4D.a.D^3.a + 3(D^2$$
$$+ 6D^3\varphi a.(D.a)^2.D^2.a + D^4\varphi a.(D.a)^4.$$

u. s. w.

12. Die Derivation der Größen $D^4.\varphi a$; D^5.
u. s. f. jeder aus der nächst vorhergehenden geschieht
eine sehr einfache Art. Es werden nur die Deriv
$D.a$, $D^2.a$, $D^3.a$. etc. und $D\varphi a$, $D^2\varphi a$, D
etc. mit den nächstfolgenden vertauscht; und den le
wird bey der Vertauschung noch $D.a$ als Factor beyge

13. Zur deutlichen Einsicht in diese Herleitu
ist es dienlich die Differentialrechnung, die bey dem
zen Proceß zum Grunde liegt, unmittelbar anzuwe
Arbogast hat dieses nicht für nöthig gehalten.

Es ist $D.\varphi a = \frac{d\varphi a}{d\alpha}\beta$, zufolge der Form
Taylorschen Lehrsatzes für $\varphi F(\alpha + \beta x)$ in Derivati
Ausdrücken (10.). Da hier das Differential im Ne
nicht das Differential der Functionalgröße ist, so d
man diese Derivirte so aus: $\frac{d\varphi a}{da}.\frac{da}{d\alpha}\beta$. D
ist nach der angenommenen Bezeichnung, $D\varphi a.D$
Es ist nämlich $\frac{d\varphi a}{da}$ der Coefficient von x in der
wickelung der Function $\varphi(a + x)$, und $\frac{da}{d\alpha}$ oder $\frac{dF}{d}$
in der Entwickelung der Function $F(\alpha + x)$.

Um $D^2.\varphi a$ zu finden, bemerke man, daß dieſer
druck $= \frac{d^2\varphi a}{da^2}.\beta^2$ iſt, zufolge der Form des
lorſchen Lehrſatzes für $\varphi F(\alpha+\beta x)$. Nun iſt
$\frac{\varphi a}{da} = d\left(\frac{d\varphi a}{d\alpha}\right) = d\left(\frac{d\varphi a}{da}.\frac{da}{d\alpha}\right)$
$\frac{d\varphi a}{da}.\frac{d^2a}{d\alpha} + \frac{d^2\varphi a}{da}.\frac{da}{d\alpha}$. Beide Facto-
der Größe, die differentirt wird, ſind endliche Fun-
nen, ohne Differentiale, daher die Veränderlichkeit
da nicht in Betracht kommt, indem der Diviſor, da,
anzeigt, daß dieſes Differential durch die Diviſion
geſchafft ſey. Alſo iſt
$\frac{d^2\varphi a}{d\alpha^2} = \frac{d\varphi a}{da}.\frac{d^2a}{d\alpha^2} + \frac{d^2\varphi a}{da^2}.\frac{da^2}{d\alpha^2}$.
er iſt $\frac{d^2\varphi a}{da^2}$ der Coefficient von x^2 in der Entwicke-
g der Function $\varphi(a+x)$, ſo wie $\frac{d\varphi a}{da}$ der von x
derſelben iſt, wenn da als conſtant betrachtet wird.
dieſer Rückſicht wird dieſer durch $D\varphi a$, jener durch
φa bezeichnet. Eben ſo ſind $\frac{da}{d\alpha}$ und $\frac{d^2a}{d\alpha^2}$, jener
Coefficient von x, dieſer von x^2 in der Entwickelung
$F(\alpha+x)$, wenn $d\alpha$ unveränderlich genommen wird,
d in dieſer Rückſicht werden ſie durch $DF\alpha$ und $D^2F\alpha$
er $D\alpha$ und D^2a bezeichnet. Es iſt nun

$$D^2.\varphi a = (D\varphi a.D^2a + D^2\varphi a.Da^2)\beta^2.$$

Auf dieſe Art wird auch $D^5.\varphi a$ gefunden. Es iſt
mlich dieſe $= \frac{d^5\varphi a}{da^5}\beta^5$, (10.). Nun iſt

iſt daſſelbe zu bemerken, was vorher wegen $\frac{\varphi a}{da}$

nert iſt; es iſt aus $\frac{d\varphi a}{da}$, einer endlichen Func

a, die keine Differentiale enthält, entſtanden,
Differential da iſt aus dem Differential dieſer
weggeſchafft. Wir haben nun

$$\frac{d^3\varphi a}{da^3} = \frac{d\varphi a}{da} \cdot \frac{d^3 a}{da^3} + \frac{3d^2\varphi a}{da^2} \cdot \frac{da.d}{da^2}$$

$$+ \frac{d^3\varphi a}{da^3} \cdot \frac{da^3}{da^3}$$

und daher

$$D^3.\varphi a = (D\varphi a.D^3 a + 3D^2\varphi a.Da.D^2 a + D^3\varphi a.Da^3)\beta^3.$$

Wenn man in dieſen Formeln $Da.\beta$ mi
$D^2 a.\beta^2$ mit $D^2.a$; $D^3 a.\beta^3$ mit $D^3.a$ vertauſcht
hält man die vorher durch Derivation gefundenen

14. Nun ſoll die Function

$$\mathfrak{G}(a + bx + \frac{c}{\quad} x^2 + \frac{d}{\quad} x^3 + \text{etc.}$$

o ist, nach dem Taylorschen Lehrsatze,

$$\varphi(\alpha+\pi x)=\varphi\alpha+\mathrm{D}\varphi\alpha.\pi x+\frac{\mathrm{D}^2\varphi\alpha}{1.2}.\pi^2x^2$$

$$+\frac{\mathrm{D}^3\varphi\alpha}{1.2.3}.\pi^3x^3+\text{etc. (I.)}$$

hier wird die Functionalgröße als ein Binomium behan-elt. Betrachtet man sie als eine polynomische, so ist, ach der Bezeichnung in (9.), die entwickelte Function

$$\varphi\alpha+\frac{\mathrm{D}.\varphi\alpha}{1}x+\frac{\mathrm{D}^2.\varphi\alpha}{1.2}x^2+\frac{\mathrm{D}^3.\varphi\alpha}{1.2.3}x^3$$

$$+\text{etc. (II.)}$$

Substituirt man in jener erstern Reihe für die Potenzen on πx ihre entwickelten Werthe, so erhält man die Werthe der Coefficienten in der zweyten Reihe. Anstatt e Potenzen von πx nach dem polynomischen Lehrsatze zu ntwickeln, behandelt Arbogast sie wie Functionen einer po-nomischen Größe, welchen er die Form in (9.) giebt. s ist nämlich

$$=\beta+\frac{\mathrm{D}.\beta}{1}x+\frac{\mathrm{D}^2.\beta}{1.2}x^2+\frac{\mathrm{D}^3.\beta}{1.2.3}x^3+\text{etc.}$$

$$^2=\beta^2+\frac{\mathrm{D}.\beta^2}{1}x+\frac{\mathrm{D}^2.\beta^2}{1.2}x^2+\frac{\mathrm{D}^3.\beta^2}{1.2.3}x^3+\text{etc.}$$

$$^3=\beta^3+\frac{\mathrm{D}.\beta^3}{1}x+\frac{\mathrm{D}^2.\beta^3}{1.2}x^2+\frac{\mathrm{D}^3.\beta^3}{1.2.3}x^3+\text{etc.}$$

tc. etc.

Bey der Substitution dieser Reihen in (I.) nehme an die Glieder, welche dieselbe Potenz von x enthalten, usammen, so werden dadurch die Coefficienten in (II.) halten. Es ist nämlich

$$A = \varphi\alpha$$

$$B = D\varphi\alpha.\beta$$

$$C = D\varphi\alpha.\gamma + \frac{D^2\varphi\alpha}{1.2}\beta^2$$

$$D = D\varphi\alpha.\delta + \frac{D^2\varphi\alpha}{1.2}.2\beta\gamma + \frac{D^3\varphi\alpha}{1.2.3}$$

$$E = D\varphi\alpha.\varepsilon + \frac{D^2\varphi\alpha}{1.2}(2\beta\delta + \gamma^2)$$
$$+ \frac{D^3\varphi\alpha}{1.2.3}.\beta^2 2\gamma + \frac{D^4\varphi\alpha}{1.2.3.4}$$

u. ſ. f.

17. Dieſe Werthe der Coefficienten treffen mit in dem Artikel, combinatoriſche Analyſis (43.) ü wenn die gehörigen Vertauſchungen der Buchſtaben gemacht werden. Für die Derivationen $D\varphi\alpha$, D $D^3\varphi\alpha$, etc. kommen dort α, 2β, 6γ, etc. H nun auch der Grund der Bemerkung gefunden, die d (46.) über die Derivation der ſchon gefundenen F der Coefficienten gemacht ward.

18. Arbogaſt findet die Coefficienten B, C, D noch auf eine zweyte Art durch ſucceſſive Entwick der Derivirten, die entſtehen, wenn die ganze $\beta x + \gamma x^2 + \delta x^3 +$ etc. als der zweyte Theil eine nomium betrachtet wird. Die zu entwickelnde ction iſt

$$\varphi(\alpha + \beta x + \gamma x^2 + \delta x^3 + \varepsilon x^4 + \text{etc.}).$$

Man ſetze

$$\pi = \beta + \gamma x + \delta x^2 + \varepsilon x^3 + \text{etc.}$$

ſo iſt, nach dem Taylorſchen Lehrſatze,

$$\varphi(a+\pi x) = \varphi a + \mathrm{D}\varphi a . \pi x + \frac{\mathrm{D}^2 \varphi a}{1.2} . \pi^2 x^2 + \frac{\mathrm{D}^3 \varphi a}{1.2.3} . \pi^3 x^3 + \text{etc. (I.}$$

Hier wird die Functionalgröße als ein Binomium behan delt. Betrachtet man ſie als eine polynomiſche, ſo iſt nach der Bezeichnung in (9.), die entwickelte Function

$$\varphi a + \frac{\mathrm{D}.\varphi a}{1} x + \frac{\mathrm{D}^2.\varphi a}{1.2} x^2 + \frac{\mathrm{D}^3.\varphi a}{1.2.3} x^3 + \text{etc. (II.}$$

Subſtituirt man in jener erſtern Reihe für die Potenzen von πx ihre entwickelten Werthe, ſo erhält man die Werthe der Coefficienten in der zweyten Reihe. Anſtatt die Potenzen von πx nach dem polynomiſchen Lehrſatze zu entwickeln, behandelt Arbogaſt ſie wie Functionen einer polynomiſchen Größe, welchen er die Form in (9.) giebt. Es iſt nämlich

$$\pi = \beta + \frac{\mathrm{D}.\beta}{1} x + \frac{\mathrm{D}^2.\beta}{1.2} x^2 + \frac{\mathrm{D}^3.\beta}{1.2.3} x^3 + \text{etc}$$

$$\pi^2 = \beta^2 + \frac{\mathrm{D}.\beta^2}{1} x + \frac{\mathrm{D}^2.\beta^2}{1.2} x^2 + \frac{\mathrm{D}^3.\beta^2}{1.2.3} x^3 + \text{etc}$$

$$\pi^3 = \beta^3 + \frac{\mathrm{D}.\beta^3}{1} x + \frac{\mathrm{D}^2.\beta^3}{1.2} x^2 + \frac{\mathrm{D}^3.\beta^3}{1.2.3} x^3 + \text{etc}$$

etc. etc.

Bey der Subſtitution dieſer Reihen in (I.) nehmen man die Glieder, welche dieſelbe Potenz von x enthalten zuſammen, ſo werden dadurch die Coefficienten in (II. erhalten. Es iſt nämlich

$$D.\varphi\alpha = D\varphi\alpha.\beta$$

$$\frac{D^2.\varphi\alpha}{1.2} = D\varphi\alpha.\frac{D.\beta}{1} + \frac{D^2\varphi\alpha}{1.2}.\beta^2$$

$$\frac{D^3.\varphi\alpha}{1.2.3} = D\varphi\alpha.\frac{D^2.\beta}{1,2} + \frac{D^2\varphi\alpha}{1.2}.\frac{D.\beta^2}{1} + \frac{D^3\varphi\alpha}{1.2.3}.\beta^3$$

$$\frac{D^4.\varphi\alpha}{1..4} = D\varphi\alpha.\frac{D^3.\beta}{1.2.3} + \frac{D^2\varphi\alpha}{1.2}.\frac{D^2\beta^2}{1.2} + \frac{D^3\varphi\alpha}{1.2.3}.\frac{D.\beta^3}{1} + \frac{D^4\varphi\alpha}{1..4}.\beta^4$$

$$\frac{D^5.\varphi\alpha}{1..5} = D\varphi\alpha.\frac{D^4.\beta}{1..4} + \ldots + \frac{D^4\varphi\alpha}{1..4}.\frac{D.\beta^4}{1} + \frac{D^5\varphi\alpha}{1..5}.\beta^5$$

etc. etc.

19. Um die Derivationen von β und deren Potenzen zu machen, betrachte man β als das erste Glied des Polynomium $\beta + \gamma x + \delta x^2 + \varepsilon x^2 +$ etc. und setze dem zu folge in den jetzt gefundenen Formeln $\varphi\beta$ für $\varphi\alpha$, und γ für β. Nun ist $\varphi\beta$ eine Potenz von β oder β selbst. Es sey $\varphi\beta + \beta^n$, so ist $D\varphi\beta = n\beta^{n-1}$; $D^2\varphi\beta = n.n-1.\beta^{n-2}$; $D^3\varphi\beta = n.n-1.n-2.\beta^{n-3}$; u. s. f.

Dadurch ist für $\varphi\beta = \beta$, und $n = 1$, $D\varphi\beta = 1$, und alle folgenden Derivirten von $\varphi\beta$ sind $= 0$, so daß $D.\beta = 1.\gamma$; $\frac{D^2.\beta}{1.2} = 1.D.\gamma$; $\frac{D^3.\beta}{1.2.3} = 1.\frac{D^2.\gamma}{1.2}$; $\frac{D^4.\beta}{1..4} = 1.\frac{D^3.\gamma}{1.2.3}$, u. s. f.

Ferner nehme man $\varphi\beta = \beta^2$, so ist $D\varphi\beta = 2\beta$; $D^2\varphi\beta = 2.1$; $D^3\varphi\beta = 0$; und dadurch ist aus den Formeln in (18.)

$$D.\beta^2 = 2\beta\gamma$$

$$\frac{D^2.\beta^2}{1.2} = 2\beta.D.\gamma + \frac{2.1}{1.2}\gamma^2$$

$$\frac{D^3.\beta^2}{1.2.3} = 2\beta.\frac{D^2.\gamma}{1.2} + \frac{2.1}{1.2}.D.\gamma^2$$

$$\frac{D^4.\beta^2}{1..4} = 2\beta.\frac{D^3.\gamma}{1.2.3} + \frac{2.1}{1.2}.\frac{D^2.\gamma^2}{1.2}$$

etc. etc.

Dann nehme man $\varphi\beta = \beta^3$, so ist $D\varphi\beta = 3\beta^2$; $D^2\varphi\beta = 3.2\beta$; $D^3\varphi\beta = 3.2.1.\beta$, und dadurch

$$D.\beta^3 = 3\beta^2\gamma$$

$$\frac{D^2.\beta^3}{1.2} = 3\beta^2.D.\gamma + \frac{3.2.\beta}{1.2}.\gamma^2$$

$$\frac{D^3.\beta^3}{.3} = 3\beta^2.\frac{D^2.\gamma}{1.2} + \frac{3.2\beta}{1.2}.D.\gamma^2 + \frac{3.2.1}{1.2.3}.\gamma^3$$

etc. etc.

Noch nehme man $\varphi\beta = \beta^4$, so ist $D\varphi\beta = 4\beta^3$; $D^4\varphi\beta = 4.3.2.1$, und

$$D.\beta^4 = 4\beta^3\gamma$$

$$\frac{D^2.\beta^4}{1.2} = 4\beta^3.D.\gamma + \frac{4.3\beta^2}{1.2}.\gamma^2$$

$$\frac{D^3.\beta^4}{1.2.3} = 4\beta^3.\frac{D^2.\gamma}{1.2} + \frac{4.3\beta^2}{1.2}.D.\gamma^2 + \frac{4.3.2\beta}{1.2.3}\gamma^3$$

$$\frac{D^4.\beta^4}{1...4} = 4\beta^3.\frac{D^3.\gamma}{1.2.3} + \frac{4.3\beta^2}{1.2}.\frac{D^2.\gamma^2}{1.2} + \frac{4.3.2\beta}{1.2.3}.D.\gamma^3 + \frac{4..1}{1..4}.\gamma^4$$

etc. etc.

obachten wollen, und hat deswegen auch den polyn
Lehrſatz nach ſeiner Methode behandelt.

24. Dieſer Analyſt läßt zwar der Hindenb
Combinations-Rechnung Gerechtigkeit wiederfahre
er giebt doch ſeiner Methode in Abſicht auf die Pr
die Rechnungsweiſe und die Bezeichnung den Vor

Die Principien der Derivations-Rechnung ſe
befaſſend, da ſie mit der allgemeinen Theorie der Fu
verknüpft iſt, und einen Zweig derſelben ausmac

Das von ihm angewandte Verfahren bey der E
lung der Functionen ſey leichter, auch mehr analyt
das combinatoriſche. Nach dem letztern würden
ihm ſo genannten Polynomialgrößen (die aus β,
etc. zuſammengeſetzten) ſtückweiſe gefunden, zuer
teralproducte, dann die numeriſchen Factoren. F
gebe ſein Verfahren die vollſtändigen Terminos d
wickelungen durch eine zuſammenhangende Rechn
teralgrößen mit den numeriſchen Coefficienten zugle
die Polynomialgrößen eine von der andern hergelei
reducirt (durch β, γ, δ, ε, etc. dargeſtellt), ſo da
nichts als die Mühe des Schreibens erfordere; m
mehen zum voraus berechneter Combinationstafe

finden. Die Derivations-Größen sind nichts anders als Differential-Quotienten. Es möchten daher die Gränzen der beiden Hauptttheile der Analysis mit einander vermischt werden, oder wenigstens bliebe in einem System, wo die Derivations-Rechnung vor der Differentialrechnung vorangienge, das Verfahren der successiven Derivationen etwas dunkel. Hingegen ist die Combinations-Rechnung in ihren Anfängen sehr einfach, so wie in der Ausübung leicht, und stellt sich gleich bey dem Eingange in die Analysis als eine ganz unabhängige Methode dar. Sie dient als fruchtbares Hülfsmittel bey allen Operationen des Multiplicirens und des Zerlegens in gleiche oder ungleiche Factoren; und eben daher, weil sie alle Vorarbeiten liefert, kann sie zur Entwickelung der Functionen, mit Zuziehung des Taylorschen Lehrsatzes, sehr bequem gebraucht werden. Daß die Literalproducte der Größen und die numerischen Coefficienten abgesondert von einander gefunden werden, ist nicht als ein Umschweif anzusehen; es sind ganz verschiedene Operationen. Die Literalproducte sind die verschiedenen Gattungen der Combinationen, die in einem Factor zusammen genommen werden, die numerischen Coefficienten zeigen die möglichen Versetzungen der Elemente in den Combinationen an, und beide zusammen geben alle Variationen der Verbindungen der Elemente. Es ist daher etwas sehr wesentliches, den Ursprung der numerischen Coefficienten, als Versetzungszahlen, zu kennen, welches die Derivations-Rechnung nicht erfahren läßt. In der That ist es bequemer, zuerst die Combinationen zu bilden, und dann die Versetzungszahlen beyzufügen, als wenn man, um beides zugleich zu thun, die Aufmerksamkeit theilen muß. Allein die combinatorische Rechnung kann, eben so gut wie die Derivations-Rechnung, das Gesetz angeben, nach welchem die Combinationen der Coefficienten aus der Functionalgröße und ihre numerischen Begleiter in der entwickelten Function; folgweise aus einem Coefficienten in den andern hergeleitet werden, wie es in der combinat. Analysis (45.) geschehen ist. Zugleich sieht man den Ursprung sowohl der Combinationen als ihrer numerischen

Begleiter durch sie deutlich ein. Wenn übrigens die Combinationslehre bey ihrer Anwendung auf die Analysis nicht selten zum voraus berechnete Combinationstafeln aufstellt, auch wohl die Größen zuweilen in Fächer vertheilt, so geschieht das keinesweges deswegen, als ob die combinatorische Methode solche gleichsam mechanische Hülfsmittel nicht entbehren könnte. Die combinatorische Entwickelung und Darstellung der Größen ist immer leicht, und kann gleich da vorgenommen werden, wo man sie braucht. Vorgearbeitete Tafeln haben die Bequemlichkeit anderer Tafeln, und sind auch zur Vergleichung brauchbar; die Vertheilung in Fächer dient dazu, den Zusammenhang mehrerer Grössen untereinander anschaulich darzustellen und nachzuweisen.

26. Arbogast wendet die Derivationsrechnung auf verschiedene schwierige analytische Entwickelungen an. Er zeigt, wie Producte von mehrern Polynomien und Functionen eines Polynomium gemacht, und wie Functionen von zwey oder mehrern einfachen Polynomien entwickelt werden. Er erweitert seine Methode auf Functionen zweyer oder mehrerer veränderlichen Größen, und macht die Anwendung davon theils auf die rücklaufenden Reihen, sowohl einfache, als gedoppelte oder dreyfache, theils auf die allgemeine Umkehrung der Reihen. Zuletzt zeigt er ihren Gebrauch in der Differential- und Integralrechnung. Noch fügt er nützliche Anwendungen derselben bey, die sich bey den Reihen mit Sinus oder Cosinus von Winkeln in arithmetischer Progression, bey Producten von Factoren in einer solchen Fortschreitung, und in der Differenzen-Rechnung machen lassen.

27. Eine der Derivations-Rechnung ähnliche Methode hat schon von Segner in den Elementis Anal. Infin. P II. §. 543. angewandt, ein Polynomium auf eine unbestimmte Potenz zu erheben. Sie verdient hier mitgetheilt zu werden, aber auf eine deutlichere, kürzere und allgemeinere Art, als sie daselbst vorgetragen ist.

28. Es sey $Z = \alpha + \beta z + \gamma z^2 + \delta z^3 + \varepsilon \zeta^4 + \text{etc.}$ wo α, β, γ, δ, ε, etc. unabhängige Größen sind. Es

soll irgend eine Function von Z durch die gleichnahmige Function von α, und durch die gegebenen Größen, nach Potenzen von z geordnet, ausgedruckt werden.

Zu dem Ende setze man z als die endliche Veränderung Δx einer veränderlichen x an, und α als eine Function von x. Den andern Größen, β, γ, δ, ε, etc. gebe man man abhängige Werthe, nämlich $\beta = \frac{d\alpha}{dx}$;

$\gamma = \frac{d\beta}{2dx}$; $\delta = \frac{d\gamma}{3dx}$; $\varepsilon = \frac{d\delta}{4dx}$; $\zeta = \frac{d\varepsilon}{5dx}$;

u. s. f. Also ist Z eine Function $y + \Delta y$ von $x + \Delta x$, wenn y die gleichnamige von x ist.

Nun ist nach dem Tayloriſchen Lehrsatze

$$y + \Delta y = y + \frac{dy}{dx} \cdot \Delta x + \frac{d^2y}{1.2dx^2} \cdot \Delta x^2 + \frac{d^3y}{1.2.3dx^3} \cdot \Delta x^3 + \frac{d^4y}{1..4dx^4} \cdot \Delta x^4 + \text{etc.}$$

Dadurch ist $y = \alpha$, und die ganze Reihe ist mit der Reihe für Z dieselbe, wenn $\Delta x = z$ genommen wird, bey der für jetzt eingeschränktern Bedeutung von β, γ, δ, etc.

Es sey nun $\varphi(y + \Delta y)$ irgend eine zu entwickelnde Function von $y + \Delta y$. Man setze

$$\varphi(y + \Delta y) = A + B\Delta x + C\Delta x^2 + D\Delta x^3 + E\Delta^4 + \text{etc.}$$

wo A, B, C, D, etc. Functionen von x sind. Da $\varphi(y + \Delta y) = \varphi y + \Delta . \varphi y$, so kommt anstatt y in der obigen Formel hier φy, und anstatt Δy daselbst hier $\Delta . \varphi y$, folglich ist $A = \varphi y$; $B = \frac{dA}{dx}$; $C = \frac{dB}{2dx}$;

$D = \frac{dC}{3dx}$; $E = \frac{dD}{4dx}$, u. s. f.

Da $y = \alpha$, so ist $A = \varphi\alpha$, und $B = \frac{d\varphi\alpha}{dx}$, oder

$B = \frac{d\varphi\alpha}{d\alpha} \cdot \frac{d\alpha}{dx}$, das ist, $B = \frac{d\varphi\alpha}{d\alpha} . \beta$.

Da $\frac{d\varphi\alpha}{d\alpha}$ eine endliche Größe iſt, ſo iſt

$d \cdot \frac{d\varphi\alpha}{d\alpha} = \frac{d^2\varphi\alpha}{d\alpha}$, und es iſt $dB = \frac{d\varphi\alpha}{d\alpha} \cdot d$

$+ \frac{d^2\varphi\alpha}{d\alpha} \cdot \beta = \frac{d\varphi\alpha}{d\alpha} \cdot 2\gamma dx + \frac{d^2\varphi\alpha}{d\alpha^2} \cdot \beta d$

alſo

$$C = \frac{d\varphi\alpha}{d\alpha} \cdot \gamma + \frac{d^2\varphi\alpha}{d\alpha^2} \cdot \tfrac{1}{2}\beta^2.$$

Hieraus iſt

$$dC = \frac{d\varphi\alpha}{d\alpha} \cdot d\gamma + \frac{d^2\varphi\alpha}{d\alpha^2} (\gamma d\alpha + \beta d\beta) + \frac{d^3\varphi\alpha}{dx^3} \cdot \tfrac{1}{2}\beta^2 d\alpha.$$

und dadurch

$$D = \frac{d\varphi\alpha}{d\alpha} \cdot \delta + \frac{d^2\varphi\alpha}{2d\alpha^2} \cdot 2\beta\gamma + \frac{d^3\varphi\alpha}{6d\alpha^3} \cdot \beta^3.$$

Das Differential dD giebt nach den gehörigen Subſtitutionen, durch $4dx$ dividirt,

$$E = \frac{d\varphi\alpha}{d\alpha} \cdot \varepsilon + \frac{d^2\varphi\alpha}{2d\alpha^2} (2\beta\delta + \gamma^2) + \frac{d^3\varphi a}{6d\alpha^3} \cdot 3\beta^2\gamma + \frac{d^4\varphi\alpha}{24d\alpha^4} \cdot \beta^4.$$

u. ſ. f.

Verändert man die Function α von x auf irgend eine Art, ſo bekommen β, δ, ε, etc. andere Werthe, ohne daß die Art der Zuſammenſetzung der mit den Differential-Quotienten verbundenen Factoren ſich ändert. Die Beſchaffenheit der Function $\varphi\alpha$ beſtimmt nur die Form der Differentialquotienten, nicht die Form der ſie begleitenden Factoren. Daher bleibt bey der Entwickelung der Fun-

on, $\varphi(\alpha+\beta z+\gamma z^2+\delta z^3+$ etc.) die Form der oefficienten von z dieſelbe, welche hier gefunden iſt, wenn eich die Coefficienten β, γ, δ, etc. ganz unabhängig von nander ſind. Auch braucht α nicht mehr als eine Fun- ion von x betrachtet zu werden, und z nicht als die Ver- nderung von x. Die Größe α kann eine abſolute verän- rliche Größe, oder eine Function von einer veränderlichen gn, und z iſt irgend eine willkührliche, unabhängige röße.

28. Zur Vergleichung der Derivations-Rechnung it der combinatoriſchen Methode, und zugleich zur deut- chern Einſicht in jene dient vortrefflich eine akademiſche Schrift von Prof. Hindenburg: Functionum polyno- niorum evolutionem per ſeries, adhibito calculo erivationum nuperrime invento, ad ſubſtitutiones n ſubſtitutiones operoſas deducere, et in combina- orias tandem, quibus nullo modo carere poteſt, perationes et involutiones facillimas deſinere. ipſiae 1801. Ich würde die beſcheidene Unparteylich- eit des Verfaſſers rühmen, wenn man ſie nicht bey einem lchen Gelehrten, wie derſelbe iſt, vorausſetzen müßte. ine ausführlichere Vergleichung beider Methoden iſt in ner Sammlung hierher gehöriger Abhandlungen anzu- effen: Über combinatorische Analysis und Deri- ationscalcul. Einige Fragmente, gesammelt und um Druck befördert von Carl Friedrich Hinden- urg. Leipzig, bey Schwikkert, 1803. Die erſtern anzöſiſch geſchriebenen Aufſätze darin: Caracteriſtique ombinatoire; Développement général aux fon- tions arbitraires; Polynome combinatoire, ſind on Profeſſor Bürmann, und haben die Abſicht, Ausländ- ern die combinatoriſche Analyſis bekannter zu machen und u empfehlen. Die letzte Abhandlung vom Profeſſor indenburg: Derivationscalcul und combinatorische nalyſis in Beziehung auf einander, dient zur nähern nd ausführlichern Vergleichung beider Methoden gegen inander.

Determinirt, ſ. Beſtimmt.

Diacauſtica iſt die Brennlinie durch Brechung, das iſt, die Linie, auf welcher die Durchſchnittspuncte je zweyer nächſten, nach Art der Lichtſtrahlen von einer Linie gebrochenen, geraden Linien liegen, wenn dieſe, wie die zugehörigen auffallenden Linien in ſtetiger Folge genommen werden. Oder, ſie iſt die Linie, welche von allen ſolchergeſtalt gebrochenen geraden berührt wird.

1. Es iſt CMNO (Fig. 113.) die brechende Linie. An dieſe ſind von einem gegebenen Puncte A die Linien AM, AN gezogen, welche nach MS, NS gebrochen werden, wodurch ſie ſich in S ſchneiden. Die Normalen in M und N ſind MR, NR, deren Durchſchnittspunct R iſt. Alle Linien liegen in einer Ebene. Es ſoll die Gränze gefunden werden, welcher ſich der Abſtand MS des Durchſchnittspunctes S von M immer mehr nähert, je näher die Puncte M, N einander liegen.

Zu dieſem Ende müſſen die Unterſchiede der auffallenden Strahlen AM, AN, der gebrochenen SM, SN, der Bogen CM, CN, und die Unterſchiede der Winkel jener Linien mit ihren zugehörigen Normalen als Differentiale behandelt werden, da ihre Quadrate und höhere Potenzen nicht mit in Rechnung gezogen werden können, ohne der Vorausſetzung, daß eine Gränze gefunden werden ſoll, zu widerſprechen.

2. Es ſey AM = z, SM = u, der Winkel der Normale MR mit Ma, der Verlängerung von AM, oder der Einfallswinkel RMa = φ; der Brechungswinkel RMS = ω. Der Bogen CM ſey = s, der Halbmeſſer der Krümmung in M = r. Das Brechungsverhältniß ſey m : n, ſo daß m : n = sin φ : sin ω.

3. Die Linie NR ſchneide Ma in P. Es iſt RPa = RMa + MRN, und APN = RNb — MAN. Daher iſt jene Summe dieſem Unterſchiede gleich, und daraus iſt

$$MRN + MAN = RNb - RMa.$$

Die Linie NR ſchneide MS in Q, ſo iſt der Winkel

$QS = RMS + MRN$, und auch $= RNS + MSN$, so ist

$$MRN - MSN = RNS - RMS.$$

4. Man beschreibe mit AM als Halbmesser den Kreisbogen Mm innerhalb des Winkels MAN, und mit SN den Kreisbogen Nn innerhalb des Winkels MSN. Der Winkel NMm ist $= RMa$, weil beide mit NMa einen rechten ausmachen, und der W. $NMn = 90° - RMS$.

5. Weil die Unterschiede der Bogen MN, Mm, Nn, von der geraden Linie hier nicht in Betrachtung kommen können, so ist $Mm = MN.\cos RMa$; $Nn = IN.\cos RMS$. Ferner ist der W. $MAN = \frac{Mm}{AM} = \frac{\partial s.\cos\varphi}{z}$; $MSN = \frac{Nn}{SM} = \frac{\partial s.\cos\omega}{u}$.

Auch ist $MRN = \frac{\partial s}{r}$. Es ist nämlich MR die Gränze der Durchschnittsweite zweyer Normalen, so wie IS der Durchschnittsweite zweyer zurückgeworfenen Strahlen; daher ist für MR der Halbmesser der Krümmung in M zu setzen. Die Quotienten bedeuten Kreisbogen für den Halbmesser gleich der Einheit. Nun ist (3.)

$$\text{I.}\quad \frac{\partial s}{r} + \frac{\partial s.\cos\varphi}{z} = \partial\varphi,$$

$$\text{II.}\quad \frac{\partial s}{r} - \frac{\partial s.\cos\omega}{u} = \partial\omega.$$

6. Da $m \sin\omega = n \sin\varphi$, so ist $m\cos\omega.\partial\omega = n\cos\varphi.d\varphi$, und

$$\text{III.}\quad \frac{\partial\varphi}{\partial\omega} = \frac{m\cos\omega}{n\cos\varphi}.$$

7. Aus den Gleichungen I. II. wird noch ein Werth des Quotienten $\frac{\partial\varphi}{\partial\omega}$ erhalten. Dieser giebt mit dem in III. die Gleichung

8. Wenn φ und $\omega = 0$ ſind, ſo iſt

$u = \frac{mrz}{(m-n)z-nr}$. Den Vereinigungs

dem ſenkrecht einfallenden, ungebrochenen Stral
man zum Anfangspuncte der Brennlinie.

9. Wenn $m : n = \varphi : \omega$ geſetzt wird, ſo iſt

$\frac{\partial\omega}{\partial\varphi} = \frac{n}{m}$, und daraus $u = \frac{mrzcol}{(m-n)z-n}$

Dieſe Formel iſt in der Dioptrik nützlich, wo bey
ſengläſern kleine Einfalls- und Brechungswinkel
men, die man nicht als verſchwindend anſehen, n
ren Sinus proportional annehmen darf. Die Lä
nun nicht auf dem ungebrochenen Strahle, ſon
dem gebrochnen zu nehmen.

10. Für eine gegebene krumme Linie iſt die Gleich
ſchen AM und dem Winkel derſelben mit einer Anf
AB gegeben, dadurch der Winkel der AM mit
berührenden, alſo der Winkel mit der Normale (
ferner der Halbmeſſer der Krümmung, und du
Brechungsverhältniß der Sinus von ω. Sold

uſtica der letztern $u = -\frac{m\cos\omega^2}{n\cos\varphi^2}z$. Die
ılinie liegt auf derſelben Seite mit dem ſtrahlen-
)uncte.

2. Wenn die Strahlen oder Linien parallel unter ſich
len, ſo iſt z unendlich groß, alſo

$$u = \frac{m\,r\cos\omega^2}{m\cos\omega - n\cos\varphi}.$$

3. Iſt $m = -n$, ſo verwandelt ſich die Diacauſtica
Catacauſtica. Für dieſe iſt, $m = -n$, und . .
$-\varphi$ geſetzt,

$$u = \frac{r\,z\cos\varphi}{2z + r\cos\varphi}.$$

n dem Artikel, Catacauſtica (13. S. 411), iſt
$\frac{r\,z\cos\omega}{2z - r\cos\omega}$ gefunden. Daſelbſt liegen die
te R und S auf derſelben Seite der zurückwerfenden
mit dem ſtrahlenden Puncte; hier würden ſie auf der
n Seite, als wo dieſer liegt, ſich befinden. Daher
ier u und r den u und r in jenem Artikel entgegen-
. Übrigens iſt ω daſelbſt was hier φ iſt.

4. Die Diacauſtica wird von der gebrochnen berührt.
wenn man die Puncte der Brechung in endlichen
nden von einander nimmt, ſo wird durch die ſucceſſi-
)urchſchnitte der gebrochenen Linien eine geradlinichte
tige Figur gebildet, indem auf jede gebrochene zwey
)ſchnittspuncte fallen. Je näher die Puncte der
hrung ſich kommen, deſto kleiner werden die Seiten
)olygons, und bey einer ſtetigen Folge der Brech-
)uncte iſt jede Seite in die Lage eines Elements der
nlinie gerückt, das iſt in die Lage einer berührenden.

5. Die Diacauſtica iſt rectificabel, wenn die brechen-
e geometriſche Linie iſt. Denn es ſey BST (Fig.
ein Bogen der Diacauſtica zu der brechenden . .
NO, und CB die berührende in B, welche mit AC
)der Linie liege, wenn nämlich AC ſenkrecht auf die

brechende iſt. Man ſtelle ſich BC als einen geſpannte Faden vor, der in B die Diacauſtica berührt, und ſucceſſi an BST angelegt wird. Während dieſer Bewegung wir der Faden an dem Ende bey C allmählig verkürzt, und die Verkürzung iſt für jede unendlich kleine Veränderung d Lage das Differential $-\partial u$. Für unendlich kleine Ve änderungen iſt $Nm = NM.\sin NMm = NM.\sin RMa$ und $Mn = MN.\cos NMn = MN.\sin RMS$, da iſt $\partial z = \partial s.\sin\varphi$, und $-\partial u = \partial s.\sin\omega$. Dahe iſt $\partial z : -\partial u = m : n$, und die momentane Verkürzun iſt $= \frac{n\partial z}{m}$. Die Summe aller Verlängerungen d auffallenden Strahlen iſt $AM - AC$; alſo die Summ aller Verkürzungen der gebrochnen Strahlen an der Sei der brechenden Linie iſt $\frac{n}{m}(AM - AC)$. Folglich i $BC = BS + SM + \frac{n}{m}(AM - AC)$, alſo der Be gen $BS = BC - SM - \frac{n}{m}(AM - AC)$.

16. Für die krumme Linie CMD, (Fig. 114), welche alle von A auffallenden Strahlen in einen einzig Punct B durch die Brechung vereinigt, iſt $\frac{n}{m}AM + BM = \text{Conſt.}$ Denn für dieſe wird der Bogen B der Brennlinie in Fig. 113. $= o$, und SM daſelbſt $=$ BM; folglich iſt $\frac{n}{m}(AM - AC) = BC - BM$, oder $\frac{n}{m}AM + BM = \frac{n}{m}AC + BC$. D zweyte Theil dieſer Gleichung iſt eine gegebene Größe. I C auf der geraden AB. ſo geht der Strahl AC ung brochen durch, und iſt ſenkrecht auf die krumme Linie. D AB verlängert ſchneide ſie in D, ſo iſt $\frac{n}{m}AD + ED$

$\frac{n}{m}$ AC + BC. Es iſt hier nur die eine Hälfte der
ie gezeichnet.

Von C bis an den Punct E, wo die krumme Linie von
er aus A gezogenen Linie AE berührt wird, fallen die
n A ausgehenden Strahlen auf die convexe Seite der
ie. Jenſeits jenes Punctes E fallen ſie auf die concave
eite, und hier liegen die auffallenden und die gebrochenen
f derſelben Seite der berührenden. Wenn dieſes gleich
phyſiſchen Sinne keine Brechung heißen kann, ſo mag
n ſie doch als eine geometriſche anſehen. Der Winkel,
ſen Sinus $= \frac{n}{m} \sin \varphi$ iſt, kann ſo gut ſtumpf als
ſeyn. Von C bis an den Berührungspunct E iſt die-
Winkel ſpitz, von E bis D iſt er ſtumpf. Man mag
auch als eine Zurückwerfung betrachten, nur daß die
inkel des auffallenden und zurückgehenden Strahls nicht
ich groß ſind.

17. Dieſe krumme Linie iſt von Descartes zuerſt be-
ichtet worden. Geometriae L. II. pag. 42. et 50 ſeqq.
it. Amſtel. Er nennt ſie eine Ellipſe der zweyten Gattung,
b giebt noch die Conſtruction von drey andern Curven dieſer
t, die er Ovalen nennt. Für alle iſt $m : n = \sin \varphi : \sin \omega$.
ie abgelenkte Linie kann viererley Lagen um den Brech-
ngspunct bey der geometriſchen Behandlung haben. Da-
r entſtehen die vier Ovalen. Descartes giebt die Art,
ie er auf ſie gekommen iſt, nicht an, ſondern zeigt aus
ndern Gründen, daß ſie die von einem Puncte auffallen-
n Linien nach einem gegebenen hinlenken. Er wollte ſie
der praktiſchen Optik anwenden, zu Linſengläſern ohne
erſtreuung der Strahlen. Allein es iſt theils nicht möglich,
rchs Schleifen die gehörige Krümmung genau zu erhal-
n, theils aber wird die Farbenzerſtreuung durch keine Art
r Krümmung gehoben. S. Ovalen des Descartes.

18. Huygens iſt zwar der erſte, der die Diacauſtica
etrachtet hat, allein er hat ſie nur für einen beſondern
all durch Beſtimmung einzelner Puncte gezeichnet. Ja-

cob Bernoulli iſt der erſte, der eine allgemeine Conſtruction angab, für jede brechende krumme Linie mittelſt ihrer Krümmungshalbmeſſer die Puncte der Diacauſtica zu beſtimmen. Acta Er. 1693 und Opp. T. I. nr. 56. wo der Herausgeber, Cramer, den Beweis beygefügt hat. Aus ſeinen nachgelaſſenen Papieren iſt in den Opp. T. II. nr. 103. art. 17. eine Auflöſung mitgetheilt, die mit der hier vorgetragenen in einigen Stücken übereinkommt, doch aber ſowohl in Abſicht der angewandten geometriſchen Conſtruction als der ganzen Form der Rechnung verſchieden iſt. Joh. Bernoulli hat von der Brennlinie durch Brechung am Ende der Lectionum Hoſpitalianarum gehandelt. Sein Verfahren iſt aber ſehr unbequem. Er ſucht die Länge des gebrochnen Strahls aus der Gleichung zwiſchen rechtwinklichten Coordinaten an der brechenden Curve. Bey parallelen auffallenden Strahlen iſt die Rechnung noch erträglich; allein für divergirende Strahlen iſt Bernoulli gezwungen ſie unvollendet zu laſſen. Die Länge des gebrochenen Strahls hängt von einer gewiſſen Linie ab, für welche die Gleichung unentwickelt bleibt.

L'Hopital hat in der Analyſe des infiniment petits, nr. 133. eine analytiſche Auflöſung gegeben, die leicht genug iſt, aber wegen der Differenzen der Einfalls-Sinus und der Brechungs-Sinus noch einen Anſtoß laſſen möchte. Er hat daraus die von Jakob Bernoulli gegebene Conſtruction hergeleitet. Das Verfahren iſt im Weſentlichen daſſelbe mit dem von Cramer dieſer Conſtruction beygefügten Beweiſe, und dem von Käſtner in dem Lehrbegriffe der Optik, S. 226 gebrauchten. Die in dieſem Artikel vorgetragene Auflöſung wird vollkommen ſcharf ſeyn; ſie gebraucht die Hülfe der Geometrie nicht weiter, als es die Natur der Frage nothwendig macht.

19. Ein beſonderer Fall bey der Brechung durch den Kreis, wo die nach einem Puncte hin zielenden Strahlen nach einem einzigen hin gebrochen werden, verdient noch Bemerkung.

Es iſt AMB (Fig. 115.) ein Halbkreis aus C über AB beſchrieben. In M falle ein Strahl LM auf, der nach

nem gegebenen Puncte D auf der Verlängerung von B gerichtet iſt. Man nehme AD:AE gleich dem Brechungsverhältniſſe, ſo iſt ME der gebrochne Strahl.

Das Brechungsverhältniß ſey m:n. der Einfallswinkel CMD = φ, der Brechungswinkel CME = ω, s iſt

$$\sin\varphi : \sin D = CD : CM$$
$$\sin E : \sin\omega = CM : CE,$$
$$\text{alſo } \sin\varphi . \sin E : \sin\omega . \sin D = CD : CE.$$
$$\text{oder } m \times MD : n \times ME = CD : CE.$$

damit für den gegebenen Vereinigungspunct D der auffallenden Strahlen auch der für die gebrochenen E derſelbe eibe, muß das Verhältniß MD:ME unveränderlich yn. Der Kreis hat die Eigenſchaft, daß das Verhältß MD:ME für jeden Punct M einem gegebenen eich bleibt, wenn die Puncte D, E ſo genommen wern, daß die Verhältniſſe AD:AE und BD:BE dem gebenen gleich ſind, ſ. Kreis. Es ſey nun AD:AE = D:BE, ſo iſt

D:AE = AD + BD:AB = AB + 2BD:AB :CD:CB, alſo

$$AD : AE = CD : CB.$$

araus iſt ferner

$$AD : AE = AD - CD : AE - CB = AC : CE = CB : CE,$$
$$\text{alſo } AD : AE = CB : CE.$$

us dieſer Proportion und der vorher gefundenen folgt

$$ADqu : AEqu = CD : CE, \text{ und } AD : AE = \frac{CD}{AD} : \frac{CE}{AE}.$$

Da MD:ME = AD:AE, ſo

$$m : n = \frac{CD}{AD} : \frac{CE}{AE}, \text{ alſo } m : n = AD : AE.$$

Hieraus iſt $m^2 : n^2 = CD : CE$.

uygens hat dieſen Satz in dem tract. de Lumine, pp. reliqu. I. p. 82, ohne Beweis.

Diagonalfläche ist eine Ebene, die durch zwey parallele Seitenlinien eines Parallelepipedum, welche nicht zu derselben Seitenfläche gehören, gelegt wird. Sie theilt den Körper in zwey gleiche und ähnliche Theile. Eine Ebene, durch eine Seitenlinie der einen Grundfläche eines Prisma, und eine ihr parallele Diagonallinie der andern Grundfläche, ist auch eine Diagonalfläche. Ein Schnitt durch die Diagonale der Seitenfläche eines dreyeckigen Prisma und eine der beiden gegen über liegenden Ecken ist es auch.

Diagonal-Linie oder **Diagonale** ist eine gerade Linie, welche in einer geradlinichten Figur durch zwey Winkelpuncte, die nicht zunächst bey einander liegen, gezogen ist.

In einem Parallelogramm seyn die beiden Seiten a, b, der eingeschlossene spitze Winkel $= \varphi$, die gegen über liegende Diagonale $= d$, so ist $dd = aa + bb - 2ab\cos\varphi$; und das Quadrat der andern Diagonale D, welche dem stumpfen Winkel, $2R - \varphi$, gegen über liegt, ist $D^2 = aa + bb + 2ab\cos\varphi$, (s. Dreyeck und Formeln d. ebenen Trigon.). In der Lehre von der Zusammensetzung der Bewegungen sind diese Sätze nöthig. Bey Zeichnung von Grundrissen ist es nützlich, die Diagonalen zu wissen.

Diagramma, eine geometrische Zeichnung zum Verständniß des Beweises eines Satzes, oder der Auflösung einer Aufgabe, es sey in der reinen, oder in der angewandten Mathematik. Das Wort wird nur bisweilen statt Figur im Lateinischen gebraucht.

Diagramma Hipparchi heißt insbesondere die Zeichnung von der Lage der Sonne, des Mondes und der Erde bey Finsternissen, mit den dazu gehörigen Linien, wel Hipparchus durch Beobachtungen der Finsternisse den Abstand der Erde von der Sonne zu bestimmen gesucht hat.

Diameter, s. Durchmesser.

Diametralzahl iſt ein Product aus zwey Factoren, deren Quadraten die Summe das Quadrat einer ra- ionalen Zahl iſt. Z. B. 12 iſt das Product von 3 und 4, en Quadrate addirt das Quadrat von 5 geben. Eine ametralzahl druckt den Inhalt eines Rechtecks aus, deſ- Diagonale und Seiten rationale Verhältniſſe gegen ein- er haben. Stifel hat in ſeiner Arithmetica integra e Form einer Zahl, die jetzt nicht gebraucht wird, um- ıdlich abgehandelt.

Differentia, differentialis numerus, heißt Nepers Canone mirifico Logarithmorum, Unterſchied der Logarithmen von dem Sinus d Coſinus eines Winkels, oder der Logarithme von der ngente dieſes Winkels. Dieſe iſt nämlich die vierte oportionallinie zu dem Coſinus, dem Sinus und dem nus totus. Den letztern nimmt Neper zwar . . 10000000, aber den Logarithmen deſſelben ſetzt er in iem Syſtem = 0. In der neuern Trigonometrie wird Sinus totus gewöhnlich = 1 geſetzt, daher deſſen Lo- ithme in unſern Syſtem auch = 0 iſt. In des Urſi- s Canone triangulorum logarithmico, dem erwei- ten Neperiſchen, iſt die Benennung, differentialis, für Logarithmen der Tangente auch beybehalten.

Differentiiren iſt das Verhältniß der Differentiale eyer oder mehrerer zuſammen gehörigen Größen finden, Differentialformeln und Differentialgleichung.

Differenz *) iſt allgemein der Theil, um welchen ie Größe vermehrt oder vermindert einer andern röße gleich wird, was mit einem deutſchen Worte, der nterſchied heißt. Insbeſondere iſt Differenz die Ver- derung der Function einer veränderlichen Größe, welche ier zukommt, wenn dieſe um einen beliebigen Theil ver-

*) Bey den Artikeln, welche die Differenzen- und Differentialrech- nung betreffen, iſt die ſyſtematiſche Anordnung der alphabe- tiſchen vorgezogen, weil ſie nothwendig in der Ordnung, wie ſie hier folgen, geleſen werden müſſen.

der veränderlichen Größen als eine ſtetige an, daher jede Potenz der Differenzen gegen dieſe verſchwindet.

I. Differenzen rationaler Functionen.

1. Es ſey $z = x^n$, und $z + \Delta z = (x + \Delta x)^n$, ſo iſt, nach dem binomiſchen Lehrſatze,

$$\Delta z = n x^{n-1} \Delta x + \frac{n.n-1.}{1.2} x^{n-2} \Delta x^2$$

$$+ \frac{n.n-1.n-2.}{1.2.3} x^{n-3} \Delta x^3 + \frac{n...n-3}{1..4} x^{n-4} \Delta x^4$$

$$+ \text{etc.}$$

2. Alſo iſt $\Delta.x^2 = 2x\Delta x + \Delta x^2$

$$\Delta.x^3 = 3x^2\Delta x + 3x\Delta x^2 + \Delta x^3$$

$$\Delta.x^4 = 4x^3\Delta x + 6x^2\Delta x^2 + 4x\Delta x^3 + \Delta x^4$$

u. ſ. w.

3. Wenn n eine negative ganze Zahl, oder eine gebrochene iſt, ſo bricht die Reihe nicht ab, z. B.

$$\Delta.x^{-1} = \Delta.\frac{1}{x} = -x^{-2}\Delta x + x^{-3}\Delta x^2 - x^{-4}\Delta x^3 + \text{etc.}$$

$$\Delta.x^{-2} = \Delta.\frac{1}{x^2} = -2x^{-3}\Delta x + 3x^{-4}\Delta x^2 - 4x^{-5}\Delta x^3 + \text{etc.}$$

$$\Delta.x^{\frac{1}{2}} = +\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}\Delta x - \frac{1}{8}x^{-\frac{3}{2}}\Delta x^2 + \frac{1}{16}x^{-\frac{5}{2}}\Delta x^3 - \text{etc.}$$

Die beiden erſten Reihen geben negative Werthe für die Differenz der Function, für zunehmende x. Ein Bruch nimmt ab, wenn der Nenner wächſt.

4. Man bemerke, daß die Zahl-Factoren der Potenzen von Δx jeder aus dem mit der nächſt vorhergehenden verbundenen durch die Multiplication mit dem Exponenten von x in dieſem, und durch die Diviſion mit der Stellenzahl des Factors ſelbſt entſtehen. Der Zahl-Factor des

erſten Gliedes iſt der Exponent der Function. Dieſes rührt von der Form der Binomial-Coefficienten her. Die Exponenten von x werden folgweiſe um 1 vermindert.

5. Es ſey $z=a+bx+cx^2+dx^3$, ſo iſt

$$\Delta z=(b+2cx+3dx^2)\Delta z+(c+3dx)\Delta x^2 +d\Delta x^3.$$

Die Factoren der Differenzen werden nach dem in (4) bemerkten Geſetze aus einander nach der Reihe hergeleitet.

6. Es ſeyn t und u zwey veränderliche Größen, und $z=tu$, ſo iſt

$$z+\Delta z=(t+\Delta t)(u+\Delta u), \text{ alſo}$$
$$\Delta z=u\Delta t+t\Delta u+\Delta t.\Delta u.$$

7. Es ſey $z=tuv$, ſo iſt

$$\Delta z=uv\Delta t+tv\Delta u+tu\Delta v +v\Delta t.\Delta u+u\Delta t.\Delta v+t\Delta u.\Delta v +\Delta t.\Delta u.\Delta v.$$

8. Sind t und u Functionen von x, ſo ſind Δt und Δu Functionen von x und Δx. Z. B. Es ſey . . . $t=a+bx+cx^2$, und $u=\alpha+\beta x+\gamma x^2$, ſo iſt $\Delta t=(b+2cx)\Delta x+c\Delta x^2$; und $\Delta u=(\beta+2\gamma x)\Delta x+\gamma\Delta x^2$. Iſt $z=tu$, ſo iſt

$$\Delta z=(a\beta+b\alpha+2(a\gamma+b\beta+c\alpha)x +3(b\gamma+c\beta)x^2+4c\gamma x^3)\Delta x +(a\gamma+b\beta+c\alpha+3(b\gamma+c\beta)x+6c\gamma x^2)\Delta x^2 +(b\gamma+c\beta+4c\gamma x)\Delta x^3+c\gamma\Delta x^4.$$

Aus dem Factor von Δx werden die übrigen zufolge der Bemerkung in (4.) leicht hergeleitet.

9. Es iſt

$$\Delta.x(x+1)=(2x+1)\Delta x+\Delta x^2$$
$$\Delta.x(x+1)(x+2)=(3x^2+6x+2)\Delta x +(3x+3)\Delta x^2+\Delta x^3$$
$$\Delta.x(x+1)(x+2)(x+3)=$$
$$(4x^3+18x^2+22x+6)\Delta x+(6x^2+18x+11)\Delta x^2 +(4x+6)\Delta x^3+\Delta x^4.$$

brechende iſt. Man ſtelle ſich BC als einen geſpannten Faden vor, der in B die Diacauſtica berührt, und ſucceſſiv an BST angelegt wird. Während dieſer Bewegung wird der Faden an dem Ende bey C allmählig verkürzt, und dieſe Verkürzung iſt für jede unendlich kleine Veränderung der Lage das Differential $-\partial u$. Für unendlich kleine Veränderungen iſt $Nm = NM.\sin NMm = NM.\sin RMa$; und $Mn = MN.\cos NMn = MN.\sin RMS$, das iſt $\partial z = \partial s.\sin\varphi$, und $-\partial u = \partial s.\sin\omega$. Daher iſt $\partial z : -\partial u = m : n$, und die momentane Verkürzung iſt $= \frac{n\partial z}{m}$. Die Summe aller Verlängerungen der auffallenden Strahlen iſt $AM - AC$; alſo die Summe aller Verkürzungen der gebrochnen Strahlen an der Seite der brechenden Linie iſt $\frac{n}{m}(AM - AC)$. Folglich iſt $BC = BS + SM + \frac{n}{m}(AM - AC)$, alſo der Bogen $BS = BC - SM - \frac{n}{m}(AM - AC)$.

16. Für die krumme Linie CMD, (Fig. 114), welche alle von A auffallenden Strahlen in einen einzigen Punct B durch die Brechung vereinigt, iſt $\frac{n}{m}AM + BM = \text{Conſt.}$ Denn für dieſe wird der Bogen BS der Brennlinie in Fig. 113. $= o$, und SM daſelbſt $= BM$; folglich iſt $\frac{n}{m}(AM - AC) = BC - BM$, oder $\frac{n}{m}AM + BM = \frac{n}{m}AC + BC$. Der zweyte Theil dieſer Gleichung iſt eine gegebene Größe. Iſt C auf der geraden AB. ſo geht der Strahl AC ungebrochen durch, und iſt ſenkrecht auf die krumme Linie. Die AB verlängert ſchneide ſie in D, ſo iſt $\frac{n}{m}AD + BD$

$= \frac{n}{m} AC + BC$. Es iſt hier nur die eine Hälfte der Linie gezeichnet.

Von C bis an den Punct E, wo die krumme Linie von einer aus A gezogenen Linie AE berührt wird, fallen die von A ausgehenden Strahlen auf die convexe Seite der Linie. Jenſeits jenes Punctes E fallen ſie auf die concave Seite, und hier liegen die auffallenden und die gebrochenen auf derſelben Seite der berührenden. Wenn dieſes gleich im phyſiſchen Sinne keine Brechung heißen kann, ſo mag man ſie doch als eine geometriſche anſehen. Der Winkel, deſſen Sinus $= \frac{n}{m} \sin \varphi$ iſt, kann ſo gut ſtumpf als ſpitz ſeyn. Von C bis an den Berührungspunct E iſt dieſer Winkel ſpitz, von E bis D iſt er ſtumpf. Man mag es auch als eine Zurückwerfung betrachten, nur daß die Winkel des auffallenden und zurückgehenden Strahls nicht gleich groß ſind.

17. Dieſe krumme Linie iſt von Descartes zuerſt betrachtet worden. Geometriae L. II. pag. 42. et 50 ſeqq. edit. Amſtel. Er nennt ſie eine Ellipſe der zweyten Gattung, und giebt noch die Conſtruction von drey andern Curven dieſer Art, die er Ovalen nennt. Für alle iſt $m : n = \sin \varphi : \sin \omega$. Die abgelenkte Linie kann viererley Lagen um den Brechungspunct bey der geometriſchen Behandlung haben. Daher entſtehen die vier Ovalen. Descartes giebt die Art, wie er auf ſie gekommen iſt, nicht an, ſondern zeigt aus andern Gründen, daß ſie die von einem Puncte auffallenden Linien nach einem gegebenen hinlenken. Er wollte ſie in der praktiſchen Optik anwenden, zu Linſengläſern ohne Zerſtreuung der Strahlen. Allein es iſt theils nicht möglich, durchs Schleifen die gehörige Krümmung genau zu erhalten, theils aber wird die Farbenzerſtreuung durch keine Art der Krümmung gehoben. S. Ovalen des Descartes.

18. Huygens iſt zwar der erſte, der die Diacauſtica betrachtet hat, allein er hat ſie nur für einen beſondern Fall durch Beſtimmung einzelner Puncte gezeichnet. Ja-

eob Bernoulli ist der erste, der eine allgemeine Construction angab, für jede brechende krumme Linie mittelst ihrer Krümmungshalbmesser die Puncte der Diacaustica zu bestimmen. Acta Er. 1693 und Opp. T. I. nr. 56. wo der Herausgeber, Cramer, den Beweis beygefügt hat. Aus seinen nachgelassenen Papieren ist in den Opp. T. II. nr. 103. art. 17. eine Auflösung mitgetheilt, die mit der hier vorgetragenen in einigen Stücken übereinkommt, doch aber sowohl in Absicht der angewandten geometrischen Construction als der ganzen Form der Rechnung verschieden ist. Joh. Bernoulli hat von der Brennlinie durch Brechung am Ende der Lectionum Hospitalianarum gehandelt. Sein Verfahren ist aber sehr unbequem. Er sucht die Länge des gebrochnen Strahls aus der Gleichung zwischen rechtwinklichten Coordinaten an der brechenden Curve. Bey parallelen auffallenden Strahlen ist die Rechnung noch erträglich; allein für divergirende Strahlen ist Bernoulli gezwungen sie unvollendet zu lassen. Die Länge des gebrochenen Strahls hängt von einer gewissen Linie ab, für welche die Gleichung unentwickelt bleibt.

L'Hopital hat in der Analyse des infiniment petits, nr. 133. eine analytische Auflösung gegeben, die leicht genug ist, aber wegen der Differenzen der Einfalls-Sinus und der Brechungs-Sinus noch einen Anstoß lassen möchte. Er hat daraus die von Jakob Bernoulli gegebene Construction hergeleitet. Das Verfahren ist im Wesentlichen dasselbe mit dem von Cramer dieser Construction beygefügten Beweise, und dem von Kästner in dem Lehrbegriffe der Optik, S. 226 gebrauchten. Die in diesem Artikel vorgetragene Auflösung wird vollkommen scharf seyn; sie gebraucht die Hülfe der Geometrie nicht weiter, als es die Natur der Frage nothwendig macht.

19. Ein besonderer Fall bey der Brechung durch den Kreis, wo die nach einem Puncte hin zielenden Strahlen nach einem einzigen hin gebrochen werden, verdient noch Bemerkung.

Es ist AMB (Fig. 115.) ein Halbkreis aus C über AB beschrieben. In M falle ein Strahl LM auf, der nach

nem gegebenen Puncte D auf der Verlängerung von B gerichtet iſt. Man nehme AD:AE gleich dem Brechungsverhältniſſe, ſo iſt ME der gebrochne Strahl.

Das Brechungsverhältniß ſey m:n. der Einfallswinkel CMD = φ, der Brechungswinkel CME = ω, s iſt

$$\sin\varphi : \sin D = CD : CM$$
$$\sin E : \sin\omega = CM : CE,$$
$$\text{alſo } \sin\varphi . \sin E : \sin\omega . \sin D = CD : CE.$$
$$\text{oder } m \times MD : n \times ME = CD : CE.$$

damit für den gegebenen Vereinigungspunct D der auffallenden Strahlen auch der für die gebrochenen E derſelbe eibe, muß das Verhältniß MD:ME unveränderlich yn. Der Kreis hat die Eigenſchaft, daß das Verhältß MD:ME für jeden Punct M einem gegebenen eich bleibt, wenn die Puncte D, E ſo genommen werı, daß die Verhältniſſe AD:AE und BD:BE dem gebenen gleich ſind, ſ. Kreis. Es ſey nun AD:AE = D:BE, ſo iſt

$$D : AE = AD + BD : AB = AB + 2BD : AB$$
$$: CD : CB, \text{ alſo}$$
$$AD : AE = CD : CB.$$

araus iſt ferner

$$AD : AE = AD - CD : AE - CB = AC : CE$$
$$= CB : CE,$$
$$\text{alſo } AD : AE = CB : CE.$$

us dieſer Proportion und der vorher gefundenen folgt

$$ADqu : AEqu = CD : CE, \text{ und } AD : AE$$
$$: \frac{CD}{AD} : \frac{CE}{AE}. \quad \text{Da } MD : ME = AD : AE, \text{ ſo}$$
$$m : n = \frac{CD}{AD} : \frac{CE}{AE}, \text{ alſo } m : n = AD : AE.$$

Hieraus iſt $m^2 : n^2 = CD : CE$.

uygens hat dieſen Satz in dem tract. de Lumine, pp. reliqu. I. p. 82, ohne Beweis.

Diagonalfläche ist eine Ebene, die durch zwey parallele Seitenlinien eines Parallelepipedum, welche nicht zu derselben Seitenfläche gehören, gelegt wird. Sie theilt den Körper in zwey gleiche und ähnliche Theile. Eine Ebene, durch eine Seitenlinie der einen Grundfläche eines Prisma, und eine ihr parallele Diagonallinie der andern Grundfläche, ist auch eine Diagonalfläche. Ein Schnitt durch die Diagonale der Seitenfläche eines dreyeckigen Prisma und eine der beiden gegen über liegenden Ecken ist es auch.

Diagonal-Linie oder **Diagonale** ist eine gerade Linie, welche in einer geradlinichten Figur durch zwey Winkelpuncte, die nicht zunächst bey einander liegen, gezogen ist.

In einem Parallelogramm seyn die beiden Seiten a, b, der eingeschlossene spitze Winkel $= \varphi$, die gegen über liegende Diagonale $= d$, so ist $dd = aa + bb - 2ab\cos\varphi$; und das Quadrat der andern Diagonale D, welche dem stumpfen Winkel, $2R - \varphi$, gegen über liegt, ist $D^2 = aa + bb + 2ab\cos\varphi$, (s. Dreyeck und Formeln d. ebenen Trigon.). In der Lehre von der Zusammensetzung der Bewegungen sind diese Sätze nöthig. Bey Zeichnung von Grundrissen ist es nützlich, die Diagonalen zu wissen.

Diagramma, eine geometrische Zeichnung zum Verständniß des Beweises eines Satzes, oder der Auflösung einer Aufgabe, es sey in der reinen, oder in der angewandten Mathematik. Das Wort wird nur bisweilen statt Figur im Lateinischen gebraucht.

Diagramma Hipparchi heißt insbesondere die Zeichnung von der Lage der Sonne, des Mondes und der Erde bey Finsternissen, mit den dazu gehörigen Linien, weil Hipparchus durch Beobachtungen der Finsternisse den Abstand der Erde von der Sonne zu bestimmen gesucht hat.

Diameter, s. Durchmesser.

Diametralzahl iſt ein Product aus zwey Factoren, n deren Quadraten die Summe das Quadrat einer ra- nalen Zahl iſt. Z. B. 12 iſt das Product von 3 und 4, ren Quadrate addirt das Quadrat von 5 geben. Eine iametralzahl druckt den Inhalt eines Rechtecks aus, deſ- i Diagonale und Seiten rationale Verhältniſſe gegen ein- der haben. Stifel hat in ſeiner Arithmetica integra ſe Form einer Zahl, die jetzt nicht gebraucht wird, um- indlich abgehandelt.

Differentia, differentialis numerus, heißt Neyers Canone mirifico Logarithmorum, r Unterſchied der Logarithmen von dem Sinus id Coſinus eines Winkels, oder der Logarithme von der angente dieſes Winkels. Dieſe iſt nämlich die vierte roportionallinie zu dem Coſinus, dem Sinus und dem ſinus totus. Den letztern nimmt Neper zwar . . = 10000000, aber den Logarithmen deſſelben ſetzt er in nem Syſtem = 0. In der neuern Trigonometrie wird r Sinus totus gewöhnlich = 1 geſetzt, daher deſſen Lo- rithme in unſern Syſtem auch = 0 iſt. In des Urſi- is Canone triangulorum logarithmico, dem erwei- rten Neperiſchen, iſt die Benennung, differentialis, für n Logarithmen der Tangente auch beybehalten.

Differentiiren iſt das Verhältniß der Differentiale beyer oder mehrerer zuſammen gehörigen Größen finden, Differentialformeln und Differentialgleichung.

Differenz *) iſt allgemein der Theil, um welchen ne Größe vermehrt oder vermindert einer andern Größe gleich wird, was mit einem deutſchen Worte, der Unterſchied heißt. Insbeſondere iſt Differenz die Ver- nderung der Function einer veränderlichen Größe, welche ner zukommt, wenn dieſe um einen beliebigen Theil ver-

*) Bey den Artikeln, welche die Differenzen- und Differentialrech- nung betreffen, iſt die ſyſtematiſche Anordnung der alphabe- tiſchen vorgezogen, weil ſie nothwendig in der Ordnung, wie ſie hier folgen, geleſen werden müſſen.

mehrt oder vermindert wird; oder die Veränderung einer Function mehrerer veränderlichen Größen, deren jede um einen beliebigen Theil verändert wird, wofern sie von einander unabhängig sind, oder um einen solchen Theil, wie es die Verbindung derselben erfordert. Sind x und y zwey mit einander verknüpfte Größen, so ist jede eine Function der andern, und ihre Differenz angeben, ist die zusammengehörigen Veränderungen derselben mit einander vergleichen. Eben so, wenn mehr als zwey veränderliche Größen mit einander in Verbindung stehen. Es kommt hier also darauf an, zusammengehörige Veränderungen von Größen mit einander zu vergleichen, und hierdurch sind Differenzen den Differentialen analog, nur daß letztere sich mit keiner endlichen Größe vergleichen lassen. Deswegen soll auch die Benennung, Differenz, für diejenige Art des Unterschiedes, welche die allgemeine Veränderung einer Function durch die Veränderung ihrer veränderlichen Größe darstellt, eigen bleiben. In englischen Schriften pflegt diese Art des Unterschiedes Incrementum genannt zu werden, welches aber nicht immer eine Vergrößerung anzeigt. Die deutsche Benennung, Unterschied, werde gebraucht von dem Unterschiede zweyer bestimmten Zahlen, oder dem Unterschiede unveränderlicher, der Quantität nach unbestimmter Größen, so fern er ohne Rücksicht auf den Unterschied anderer Größen auf irgend eine Art angegeben wird, dergleichen in algebraischen, analytischen und geometrischen Sätzen häufig vorkommt, z. B. in dem Satze, $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$.

Die Differenz einer veränderlichen Größe, als x, y, z, wird durch das vorgesetzte Zeichen Δ bezeichnet, nämlich Δx, Δy, Δz. Diese Symbole sind einfache Größenzeichen, wenn gleich der Figur nach zusammengesetzt. Sie bedeuten Größen, die mit x, y, z, gleichartig sind. Wird für die veränderliche Größe x eine Größe von einer gewissen Form gesetzt, so muß sie durch einen Punct von dem Differenzzeichen abgesondert werden. Z. B. $\Delta.x^2$ bedeutet die Veränderung von x^2, dagegen Δx^2 das Quadrat von Δx bedeutet. Auf gleiche Art sind $\Delta.x^n$ und Δx^n

zu unterscheiden. Auch bedeutet $\Delta.xy$ die Veränderung des Products xy, aber $y\Delta x$ das Product aus y in die Veränderung von x.

In allgemeinen Rechnungen bedeutet Δz eine Zunahme der veränderlichen Größe z, weil man in einer Reihe von Größen die größern auf die kleinern folgen zu lassen pflegt, lieber als umgekehrt. Inzwischen kann Δz auch negativ werden, so wie z selbst von dem positiven Werthe, den es unter den zum Grunde der Rechnung gelegten Umständen hat, unter andern Umständen zu einem negativen übergehen kann. Ein negatives Δz bedeutet eine Abnahme von z. Ist nämlich $\Delta z = V\Delta x$, wo V eine Function von x allein, nebst Δx, oder auch von x und z, bedeutet, so wird für ein positives Δx die Differenz Δz negativ, wenn V negativ wird.

In besondern Fällen zeigt man die Abnahme einer veränderlichen Größe z durch $-\Delta z$ an, so daß Δz schlechtweg die Quantität der Abnahme bedeutet. Wird dieses negativ, so verwandelt sich das Abnehmen in ein Zunehmen.

Wenn die durch z allgemein bezeichneten Glieder einer Reihe nicht gleichförmig zunehmen, so läßt sich aus den Differenzen eine neue Reihe von Unterschieden derselben, bilden, aus den Unterschieden derselben, wenn sie nicht alle sich gleich sind, wieder eine Reihe, und so ferner, entweder ohne Ende fort, oder bis man auf beständige Unterschiede kommt. Ein Glied aus der Reihe der zweyten Unterschiede wird allgemein durch $\Delta^2 z$, aus der Reihe der dritten durch $\Delta^3 z$, u. s. f. bezeichnet.

Differenzen-Rechnung (Methodus incrementorum; Methode des différences; Calcul aux différences finies) ist die Rechnung, wodurch die Relation der Differenz einer Function zu der Differenz der Functionalgröße, oder umgekehrt die Function aus der Relation der Differenzen gefunden wird. Auch mag die Function mehr als eine veränderliche Größe begreifen. Die Rechnung erstreckt sich auch auf die Differenzen höherer Ordnungen.

Die Differenzen-Rechnung steht in genauer Beziehung auf die Differentialrechnung. Diese sieht aber die Reihe

der veränderlichen Größen als eine ſtetige an, daher jede Potenz der Differenzen gegen dieſe verſchwindet.

I. Differenzen rationaler Functionen.

1. Es ſey $z = x^n$, und $z + \Delta z = (x + \Delta x)^n$, ſo iſt, nach dem binomiſchen Lehrſatze,

$$\Delta z = n x^{n-1} \Delta x + \frac{n.n-1.}{1.2} x^{n-2} \Delta x^2$$
$$+ \frac{n.n-1.n-2.}{1.2.3} x^{n-3} \Delta x^3 + \frac{n \ldots n-3}{1 \ldots 4} x^{n-4} \Delta x^4$$
$$+ \text{etc.}$$

2. Alſo iſt $\Delta.x^2 = 2x\Delta x + \Delta x^2$
$\Delta.x^3 = 3x^2\Delta x + 3x\Delta x^2 + \Delta x^3$
$\Delta.x^4 = 4x^3\Delta x + 6x^2\Delta x^2 + 4x\Delta x^3 + \Delta x^4$
u. ſ. w.

3. Wenn n eine negative ganze Zahl, oder eine gebrochene iſt, ſo bricht die Reihe nicht ab, z. B.

$$\Delta.x^{-1} = \Delta.\frac{1}{x} = -x^{-2}\Delta x + x^{-3}\Delta x^2 - x^{-4}\Delta x^3 + \text{etc.}$$

$$\Delta.x^{-2} = \Delta.\frac{1}{x^2} = -2x^{-3}\Delta x + 3x^{-4}\Delta x^2 - 4x^{-5}\Delta x^3 + \text{etc.}$$

$$\Delta.x^{\frac{1}{2}} = +\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}\Delta x - \frac{1}{8}x^{-\frac{3}{2}}\Delta x^2 + \frac{1}{16}x^{-\frac{5}{2}}\Delta x^3 - \text{etc.}$$

Die beiden erſten Reihen geben negative Werthe für die Differenz der Function, für zunehmende x. Ein Bruch nimmt ab, wenn der Nenner wächſt.

4. Man bemerke, daß die Zahl-Factoren der Potenzen von Δx jeder aus dem mit der nächſt vorhergehenden verbundenen durch die Multiplication mit dem Exponenten von x in dieſem, und durch die Diviſion mit der Stellenzahl des Factors ſelbſt entſtehen. Der Zahl-Factor des

ersten Gliedes ist der Exponent der Function. Dieses rührt von der Form der Binomial-Coefficienten her. Die Exponenten von x werden folgweise um 1 vermindert.

5. Es sey $z = a + bx + cx^2 + dx^3$, so ist

$$\Delta z = (b + 2cx + 3dx^2)\Delta z + (c + 3dx)\Delta x^2 + d\Delta x^3.$$

Die Factoren der Differenzen werden nach dem in (4) bemerkten Gesetze aus einander nach der Reihe hergeleitet.

6. Es seyn t und u zwey veränderliche Größen, und $z = tu$, so ist

$$z + \Delta z = (t + \Delta t)(u + \Delta u), \text{ also}$$
$$\Delta z = u\Delta t + t\Delta u + \Delta t.\Delta u.$$

7. Es sey $z = tuv$, so ist

$$\Delta z = uv\Delta t + tv\Delta u + tu\Delta v + v\Delta t.\Delta u + u\Delta t.\Delta v + t\Delta u.\Delta v + \Delta t.\Delta u.\Delta v.$$

8. Sind t und u Functionen von x, so sind Δt und Δu Functionen von x und Δx. Z. B. Es sey $t = a + bx + cx^2$, und $u = \alpha + \beta x + \gamma x^2$, so ist $\Delta t = (b + 2cx)\Delta x + c\Delta x^2$; und $\Delta u = (\beta + 2\gamma x)\Delta x + \gamma\Delta x^2$. Ist $z = tu$, so ist

$$\Delta z = (a\beta + b\alpha + 2(a\gamma + b\beta + c\alpha)x + 3(b\gamma + c\beta)x^2 + 4c\gamma x^3)\Delta x + (a\gamma + b\beta + c\alpha + 3(b\gamma + c\beta)x + 6c\gamma x^2)\Delta x^2 + (b\gamma + c\beta + 4c\gamma x)\Delta x^3 + c\gamma\Delta x^4.$$

Aus dem Factor von Δx werden die übrigen zufolge der Bemerkung in (4.) leicht hergeleitet.

9. Es ist

$$\Delta.x(x+1) = (2x+1)\Delta x + \Delta x^2$$
$$\Delta.x(x+1)(x+2) = (3x^2 + 6x + 2)\Delta x + (3x+3)\Delta x^2 + \Delta x^3$$
$$\Delta.x(x+1)(x+2)(x+3) = (4x^3 + 18x^2 + 22x + 6)\Delta x + (6x^2 + 18x + 11)\Delta x^2 + (4x+6)\Delta x^3 + \Delta x^4.$$

Dieſe Differenzen zu erhalten, entwickele man das Product in der Function, ſuche daraus den erſten Terminus, der bloß Δx enthält, und daraus nach (4.) die folgenden.

Setzt man $\Delta x = 1$, ſo iſt

$\Delta.x(x+1) = 2(x+1)$

$\Delta.x(x+1)(x+2) = 3(x+1)(x+2)$

$\Delta.x(x+1)(x+2)(x+3) = 4(x+1)(x+2)(x+3)$

u. ſ. f.

10. Die Differenzen für $\Delta x = 1$ erhält man unmittelbar, wenn man in jedem der Producte $x+1$ für x ſetzt, und es von dem ſolchergeſtalt veränderten abzieht, da beide Producte nur in einem Factor verſchieden ſind. Auf dieſe Art wird auch erhalten

$\Delta.(mx+a)(mx+m+a) = 2m(mx+m+a)$

$\Delta.(mx+a)(mx+m+a)(mx+2m+a)$
$= 3m(mx+m+a)(mx+2m+a).$

10. Es ſey $z = \frac{t}{u}$, ſo iſt

$$z + \Delta z = \frac{t+\Delta t}{u+\Delta u}$$

$$\Delta z = \frac{u\Delta t - t\Delta u}{u(u+\Delta u)}.$$

Exempel. $z = \frac{\alpha+\beta x}{a+bx}$

$$\Delta z = \frac{(a\beta - b\alpha)\Delta x}{(a+bx)(a+bx+b\Delta x)}.$$

12. Wenn $\Delta x = 1$ genommen wird, ſo iſt

$$\Delta.\frac{1}{mx+a} = \frac{-m}{(mx+a)(mx+m+a)};$$

$$\Delta.\frac{1}{(mx+a)(mx+m+a)} = \frac{-2m}{(mx+a)(mx+m+a)(mx+2m+a)}$$

u. ſ. f.

13. Es sey zwischen zwey veränderlichen Größen, , y, eine rationale Gleichung, wie folgende, gegeben:

$$ax^2+bxy+cy^2+dx+ey+f=0,$$

) ist das Verhältniß der Differenzen Δx und Δy in fol- ender Gleichung enthalten,

$$(2ax+by+d)\Delta x+(bx+2cy+e)\Delta y+a\Delta x^2+b\Delta x\Delta y+c\Delta y^2=0.$$

Die beiden ersten Glieder der Gleichung werden erhalten, enn für jeden Factor x gesetzt wird Δx, und für jeden actor y eben so Δy. Aus diesen Gliedern entstehen die rey übrigen eben so, nur daß durchgehends durch 2 divi- irt wird.

II. Differenzen irrationaler Functionen.

14. Für diese mag es an einem Beyspiele genügen. s sey $z=\sqrt{(aa+xx)}$, so ist $z+\Delta z=\sqrt{(aa+xx+2x\Delta x+\Delta x^2)}$. Wird die Quadratwurzel aus em Quadrinomium, oder auch aus dem Trinomium $z+2x\Delta x+\Delta x^2$, nach dem binomischen Lehrsatze ent- ickelt, so erhält man eine Reihe, die nach den Potenzen on Δx fortschreitet. Bequemer gebraucht man hier die Methode der unbestimmten Coefficienten. Es sey, wenn as einfache Buchstabenzeichen u für Δx gesetzt wird,

$$z+\Delta z=z+Au+Bu^2+Cu^3+Du^4+Eu^5+\text{etc.}$$

) ist, wenn auf beiden Seiten das Quadrat genommen, nd für $(z+\Delta z)^2$ sein Werth gesetzt wird,

$$a+xx+2xu+u^2=z^2+2Azu+(2Bz+A^2)u^2+(2Cz+2AB)u^3+(2Dz+2AC+B^2)u^4+(2Ez+2AD)+2BC)u^5+\text{etc.}$$

Die Coefficienten derselben Potenzen von u in beiden Thei- n der Gleichung gleich gesetzt, wird, da $aa+xx=zz$ t, erhalten

I. $Az = x$, und $A = \frac{x}{z}$.

II. $2Bz + A^2 = 1$; daraus $B = \frac{a^2}{2z^3}$.

III. $2Cz + 2AB = 0$; daraus $C = -\frac{a^2x}{2z^5}$.

IV. $2Dz + 2AC + B^2 = 0$, daraus

$$D = \frac{a^2(4x^2 - a^2)}{8z^7}.$$

V. $2Ez + 2AD + 2BC = 0$, daraus

$$E = -\frac{a^2x(4x^2 - 3a^2)}{8z^9}.$$

u. ſ. w.

Wenn man von den Coefficienten die Differentiale nach den Regeln der Differentialrechnung nimmt, ſo iſt

$$B = \frac{\partial A}{2\partial x}; C = \frac{\partial B}{3\partial x}; D = \frac{\partial C}{4\partial x}; E = \frac{\partial D}{5\partial x},$$

u. ſ. f. Es iſt ein ähnliches Verfahren, wie das in (4.) angezeigte.

III. Allgemeine Form der Differenzen.

15. Die Formel für ein Glied einer arithmetiſchen Reihe irgend einer Ordnung in dem Artikel, arithmetiſche Reihen höherer Ordnungen, S. 200, §. 10. wird uns dienen, ſowohl die Geſtalt der für die Differenz Δz gehörigen Reihe zu beſtimmen, als auch die Derivation der Coefficienten zu den Potenzen von Δx, jedes aus den vorhergehenden, zu entdecken. In dieſer Formel, nämlich

$$y = A + u \cdot \frac{\Delta A}{\Delta u} + \frac{u(u - \Delta u)}{1 \cdot 2} \cdot \frac{\Delta^2 A}{\Delta u^2} + \frac{u(u - \Delta u)(u - 2\Delta u)}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot \frac{\Delta^3 A}{\Delta u^3} + \text{etc.}$$

iſt y eine veränderliche Größe, die nach demſelben Geſetze, wie die Größen einer Reihe, die in gleichen Abſtänden von

von einander nach A folgen, durch ihren Abstand u von dem Anfangsgliede A der Reihe gebildet wird. Die außer A gegebenen Größen der Reihe erscheinen in der Formel nicht selbst, sondern mittelbar durch die Anfangsglieder der Differenzreihen, ΔA, $\Delta^2 A$, $\Delta^3 A$, etc. Der Abstand jeder von der nächsten ist Δu, welches hier nicht eine Veränderung von u, sondern ein Intervall bedeutet, das als Einheit für den Abstand u des Gliedes y von A dient, indem $\frac{u}{\Delta u}$ die Stellenzahl für y ist. Nun sey A eine Function von x, es sey eine gesonderte oder ungesonderte, eine algebraische oder transscendente, und die Glieder der Reihe, B, C, D, etc. in den Abständen Δu, $2\Delta u$, $3\Delta u$, etc. von dem Anfangsgliede A seyn nach ihrer Folge eben solche Functionen von $x+\Delta u$, $x+2\Delta u$, $x+3\Delta u$, etc. so sind die Differenzquotienten $\frac{\Delta A}{\Delta u}$, $\frac{\Delta^2 A}{\Delta u^2}$, $\frac{\Delta^3 A}{\Delta u^3}$; etc. durch die Beschaffenheit der Function und durch Δu bestimmt. Umgekehrt bestimmen diese Quotienten zusammen die Function von x. Nimmt man in der Formel für y die Stellenzahl $\frac{u}{\Delta u}$ einer ganzen Zahl m gleich, so ist y dieselbe Function von $x+m\Delta u$ oder von $x+u$, wie es A von x ist. Alle solche Werthe von y werden aus den Stellenzahlen auf einerley Art zusammengesetzt, oder sind dieselben Functionen von u, und daher auch von $x-c$, wenn $u=x-c$ gesetzt wird, folglich auch von x. Ist $\frac{u}{\Delta u}$ eine gebrochene rationale Zahl, so ist y ein eingeschaltetes Glied der Reihe, von welchem dasselbe gilt. Denn bey Einschaltung irgend einer Anzahl von Gliedern in einer arithmetischen Reihe bleibt die erweiterte Reihe immer von derselben Ordnung, (a. a. O. 26.). Die Glieder der ursprünglichen Reihe werden nun aus den veränderten Stellenzahlen und Anfangsgliedern der Differenzreihen auf dieselbe Art zusam-

mengesetzt, wie die eingeschalteten Glieder aus ihren zugehörigen Stellenzahlen und jenen Anfangsgliedern. Umgekehrt werden daher diese auch aus den gebrochenen Stellenzahlen und den Anfangsgliedern der Differenzreihen in der ursprünglichen Reihe eben so zusammengesetzt, wie die Glieder derselben in den durch ganze Zahlen bezeichneten Stellen. Da die Anzahl der einzuschaltenden Glieder willkührlich ist, und unbestimmt groß gedacht werden kann, so gilt eben dieses für eine stetige Folge von Gliedern, die Stellenzahlen mögen rational oder irrational seyn. Demnach ist die durch die angeführte Formel bestimmte Größe y eben eine solche Function von $x+u$ als es das Anfangsglied einer Reihe A von x ist.

16. Man setze für die Differenzquotienten $\frac{\Delta A}{\Delta u}$, $\frac{\Delta^2 A}{\Delta u^2}$, $\frac{\Delta^3 A}{\Delta^3 u}$, etc. nach ihrer Folge die einfachen Zeichen, P, Q, R, S, etc. und setze auch $A = fx$, eine Function von x, und daher eben so $y = f(x+u)$, so ist

$$f(x+u) = fx + Pu + \frac{Q}{1.2}u(u-\Delta u) + \frac{R}{1.2.3}u(u-\Delta u)(u-2\Delta u) + \frac{S}{1.2.3.4}u(u-\Delta u)(u-2\Delta u)(u-3\Delta u) + \text{etc.}$$

Die Quotienten P, Q, R, etc. enthalten jeder einen Theil, der von Δu frey ist. Denn ΔA, oder $f(x+\Delta u) - fx$, enthält in allen Gliedern eine Function von u oder Δu selbst, weil alles, was von x allein abhängt oder bloß unveränderliche Größen enthält, beyden Functionen der fx und der $f(x+\Delta u)$ gemein ist, also bey der Subtraction sich aufhebt. Es muß aber jeder Theil von ΔA bloß Δu enthalten, weil das Verhältniß $\Delta A : \Delta u$ sich einer gewissen Gränze nähern muß, je kleiner Δu genommen wird, diese Gränze aber nicht von

willkührlichen endlichen Größe Δu abhängen kann,
rn allein durch die Beſchaffenheit der Function fx
nmt werden muß. Folglich iſt $\frac{\Delta A}{\Delta u}$ oder P zum
eine Function von x allein. Iſt dieſe für den zu A
rigen Werth von x endlich, ſo iſt die Gränze des
ältniſſes ΔA : Δu ein endliches Verhältniß; wird
Function Null oder unendlich groß, ſo wird ΔA
Δu immer kleiner, oder in dem andern Falle im-
größer, je kleiner Δu genommen wird, ohne einen
ſtand in dem einem wie in dem andern Falle.
Eben ſo iſt Q, welches als Differenzquotient in der
ten Differenzreihe, aus P auf ähnliche Art hergeleitet
, wie P aus fx, zum Theil eine Function von x al-
So enthalten auch R, S etc. Functionen von
ey von Δu.
Wenn das Gränzverhältniß von ΔA : Δu; von
: Δu²; von Δ³A : Δu³; etc. für den Werth von x,
u dem Anfangsgliede A gehört, nicht ein endliches iſt,
uß es doch für andere Werthe von x, das dazu gehö-
Glied der Reihe als Anfangsglied genommen, ein
ches ſeyn können. Darum müſſen die Functionen
, R, etc. einen von Δu freyen Theil enthalten.
17. Es zerfällt dergeſtalt die Differenz f(x + u)
x in zwey Theile, deren einer bloß von x abhängt,
andere zugleich eine Function von Δu nebſt x iſt.
iſt f(x + u) ganz unabhängig von dem Abſtande
in welchem die Glieder der Reihe A, B, C, D, etc.
einander geſetzt werden. Daher müſſen alle Theile,
je Δu enthalten, ſich aufheben. Bezeichnet man
denjenigen Theil der Quotienten, P, Q, R, S, etc.
ein Δu enthält, nach der Folge durch p, q, s, r, etc.

$$: + u) = fx + pu + \frac{1}{2} qu^2 + \frac{1}{6} ru^3 + \frac{1}{24} s^4 + \frac{1}{120} t^5 + \text{etc.}$$

18. Hier zeigt sich nun erstlich die Gestalt der Reihe für die Differenz der Function fx. Die Exponenten der Progressionalgröße u sind bloß ganze positive Zahlen. Zugleich ergiebt sich aus dem, was gleich vorher von der Beschaffenheit der Functionen p, q, r, s, etc, bemerkt worden ist, ihre Derivation aus einander, nebst der von p aus fx. Nämlich p entsteht aus fx, wenn, nachdem in fx für x gesetzt ist $x+\Delta u$, aus der Differenz $f(x+\Delta u)-fx$, bloß die Glieder genommen werden, die Δu allein enthalten, und das Aggregat durch Δu dividirt wird. Der Theil von Q, der kein Δu enthält, das ist q, wird aus dem von P, der gleichfalls davon frey ist, oder aus p, eben so hergeleitet, wie p aus fx. Aus q wird auf solche Art r; aus r wird s, und so fort wird in jedem Differenzquotienten der von Δu unabhängige Theil gefunden. Statt Δu kann zur Bequemlichkeit u selbst genommen werden, welches so wie Δu eine willkührliche Veränderung von x ist. In Absicht auf das Resultat der Operationen ist es einerley, ob man Δu oder u schreibt. Doch muß man den Abstand Δu der beiden ersten Glieder der Reihe, und den Abstand u des Gliedes $f(x+u)$ von dem Anfangsgliede, dabey nicht für gleichgültig nehmen.

19. Die Functionen p, q, r, etc. nenne man die Gränzquotienten von $\frac{\Delta A}{\Delta u}$, $\frac{\Delta^2 A}{\Delta u^2}$, $\frac{\Delta^3 A}{\Delta u^3}$, etc. oder, wenn fx für A, und Δx für Δu gesetzt wird, so daß Δx den Abstand der beiden ersten Glieder der Reihe bedeutet, die Gränzquotienten von $\frac{\Delta fx}{\Delta x^1}$, $\frac{\Delta^2 fx}{\Delta x^2}$, $\frac{\Delta^3 fx}{\Delta x^3}$, etc..

20. Es ist sehr merkwürdig, daß der erste Gränzquotient p die Function von $x+u$ bestimmt, da durch p die übrigen Gränzquotienten alle gegeben werden. Der Quotient $\frac{\Delta fx}{\Delta x}$ bestimmt die Function nicht, weil er, so wie alle übrigen solche Quotienten, von Δx zugleich abhängt.

n einer krummen Linie bestimmt er nur die Lage der berüh-
nden geraden Linie. Der Gränzquotient p ist daher
arakteristisch für die Function fx.

21. La Grange nennt in seiner Théorie des fon-
ions analytiques die hier durch p, q, r, s, etc. be-
chneten Functionen fonctions dérivées, in Beziehung
f die Function fx, als fonction primitive. Er
terscheidet sie in der Bezeichnung durch die Strichelung
s Functionszeichens, und nennt die erste abgeleitete, f'x
, i. p), fonction prime; die zweyte f''x (oder q),
nction seconde; die dritte f'''x (oder r) fonction
erce; u. s. f. Die Gestalt der Reihe für f(x + u),
ld die Formation der Coefficienten von u leitet la Grange
s ganz andern Betrachtungen her, als hier zum Grun-
gelegt sind. Allein es möchten dabey noch Schwierig-
ten seyn, zu deren Erörterung hier aber der Raum fehlt.
nige Erinnerungen hat Pasquich gemacht in den
mentis Analyseos et Geometriae sublimioris,
trod. XVIII.

22. Exempel. Es sey $fx = (1 - x^2)^{-\frac{1}{2}}$, und es
f(x + u) entwickelt werden.

Dieses zu bewerkstelligen, muß man den Werth von p
gemein für $fx = (1 - x^2)^{-m}$ suchen. Es ist . . .
$x+u) = (1 - x^2 - 2xu + u^2)^{-m} = (1 - x^2)^{-m}$
$2mx(1 - x^2)^{-m-1}u + Mu^2$ (zufolge des bino-
schen Lehrsatzes) wo Mu^2 alle übrigen Glieder der Fun-
on bedeutet, die u^2 und höhere Potenzen von u ent-
lten. Nun ist zufolge (18.) $p = 2mx(1 - x^2)^{-m-1}$.
lit Hülfe dieser allgemeinen Formel lassen sich die Gränz-
otienten p, q, r, etc. für $fx = (1 - x^2)^{-\frac{1}{2}}$ entwickeln.
ier ist $p = x(1 - x^2)^{-\frac{3}{2}}$. In beiden Factoren dieser
nction setze man x + u für x, und verfahre ferner nach
8.) mit Zuziehung der allgemeinen Formel für p,
ist

$$q=(1-x^2)^{-\frac{3}{2}}+3x^2(1-x^2)^{-\frac{3}{2}}$$
$$=(1+2x^2)(1-x^2)^{-\frac{3}{2}},$$

indem der erste Theil von q in $(1-x^2)(1-x^2)^{-\frac{3}{2}}$ wandelt ist.

In dieser Function wird wieder $x+u$ für x ge und eben so wie für fx und q verfahren, so wird Gränzquotient

$$r=4x(1-x^2)^{-\frac{3}{2}}+5(x+2x^3)(1-x^2)$$
$$=(9x+6x^3)(1-x^2)^{-\frac{7}{2}}.$$

Hieraus ist auf gleiche Art

$$s=(9+18x^2)(1-x^2)^{-\frac{7}{2}}+7(9x^2+6x^4)$$
$$(1-x^2$$
$$=(9+72x^2+24x^4)\,(1-x^2)^{-\frac{9}{2}}.$$

Daraus noch

$$t=(225x+600x^3+120x^5)(1-x^2)^{-\frac{11}{2}}$$

u. s. f.

V. Differenzen transscendenter Function

23 Für transscendente Functionen ist kein algebr scher Ausdruck vorhanden. Kann man aber die Grä des Quotienten $\frac{\Delta fx}{\Delta u}$ oder des $\frac{\Delta fx}{\Delta x}$ angeben, werden daraus nach der in (18.) erklärten Methode Gränzen der höhern Differenzquotienten, also die Coe cienten in der entwickelten Function gefunden.

24. Es sey $fx=\log x$ in irgend einem System Logarithmen; es wird die entwickelte Function, $\log(x+$ $=lx+pu+\frac{1}{2}qu^2+\frac{1}{6}ru^3+\frac{1}{24}su^4+$ etc gesucht.

Aus dieser Formel folgt $l(x+u)-lx,$ $l(1+\frac{u}{x})=pu+\frac{1}{2}qu^2+\frac{1}{6}ru^3+$ etc.

in jedem logarithmischen System das Gränzverhältniß
s Logarithmen einer Zahl zu dem Überschusse der Zahl
ver die Einheit ein bestimmtes Verhältniß, (s. Logarith-
en). Man setze $pu + \frac{1}{2}qu^2 + \frac{1}{6}ru^3 + \text{etc.}$
$= Mu$, so ist das Gränzverhältniß von $Mu : \frac{u}{x}$ oder
n $M : \frac{1}{x} = c : 1$, wenn $c : 1$ jenes bestimmte Ver-
ältniß in dem angenommenen System ist. Es ist aber p
e Gränze von M, also ist $p : \frac{1}{x} = c : 1$, und $p = \frac{c}{x}$.
un werden hieraus die folgenden Coefficienten bestimmt.
an setze nämlich $p' = \frac{c}{x+u}$, so ist $p' - p =$
$\frac{cu}{x(x+u)}$, und die Gränze von $\frac{p'-p}{u}$, das ist
$= -\frac{c}{x^2}$. Weiter sey $q' = -\frac{c}{(x+u)^2}$, so ist
$' - q = \frac{c(2ux+uu)}{x^2(x+u)^2}$, daher $r = \frac{2c}{x^3}$. Ferner
y $r' = \frac{2c}{(x+u)^3}$, so ist
$-r = -\frac{2c(3x^2u+3xu^2+u^3)}{x^3(x+u)^3}$. Daher
$= -\frac{2.3c}{x^4}$. Daraus erhellet schon hinlänglich
as Gesetz der Reihe,

$$\log(x+u) = lx + \frac{cu}{x} - \frac{cu^2}{2x^2} + \frac{cu^3}{3x^3} - \cdots - \frac{cu^4}{4x^4} + \text{etc.}$$

In dem natürlichen Syſtem iſt $c = 1$. Wie eine ſchneller convergirende Reihe gefunden wird, ſ. Logarithmen.

25. Es ſey $fx = a^x$, wo a die Baſis des Syſtems iſt, worin x als Logarithme zu der Zahl a^x gehört. Es ſoll $f(x+u)$ entwickelt werden.

Es ſey $f(x+u) = a^x + pu + \frac{1}{2}qu^2 + \frac{1}{6}ru^3$ + etc. $= a^x + Mu$. Alſo iſt $a^{x+u} - a^x = Mu$, oder $\frac{a^x(a^u-1)}{u} = M$. Die Gränze des Quotienten $\frac{a^u-1}{u}$ iſt, wie in (24.) bemerkt worden, $= \frac{1}{c}$; alſo iſt $\frac{a^x}{c}$ die Gränze von M, und $p = \frac{a^x}{c}$. Es ſey $p' = \frac{a^{x+u}}{c}$, oder $p' = \frac{a^x \cdot a^u}{c}$, ſo iſt $p' - p = \frac{1}{c}a^x(a^u-1)$, und die Gränze von $\frac{p'-p}{u}$, das iſt, $q = \frac{1}{c^2}a^x$. Eben ſo iſt $r = \frac{1}{c^3}a^x$; $s = \frac{1}{c^4}a^x$; u. ſ. f. folglich

$$a^{x+u} = a^x\left(1 + \frac{u}{c} + \frac{u^2}{2c^2} + \frac{u^3}{6c^3} + \frac{u^4}{24c^4} + \text{etc.}\right)$$

und

$$a^u = 1 + \frac{u}{c} + \frac{u^2}{2c^2} + \frac{u^3}{6c^3} + \frac{u^4}{24c^4} + \text{etc.}$$

26. Es ſey $fx = \sin x$, oder, wenn der Winkel durch φ bezeichnet wird, $f\varphi = \sin\varphi$. Es ſoll $f(\varphi+\omega)$ oder $\sin(\varphi+\omega)$ durch eine nach ω geordnete Reihe entwickelt werden.

Es ſey $\sin(\varphi+\omega)=\sin\varphi+p\omega+\frac{1}{2}q\omega^2$

$+\frac{1}{6}r\omega^3+$ etc. Nun iſt $\sin(\varphi+\omega)-\sin\varphi$

$=2\cos(\varphi+\frac{1}{2}\omega).\sin\frac{1}{2}\omega$, (Goniometrie 28.). Die

Gränze des Quotienten $\frac{\sin\frac{1}{2}\omega}{\omega}$ iſt $=\frac{1}{2}$, weil das

Gränzverhältniß zwiſchen Bogen und Chorde das der

Gleichheit iſt, (ſ. Bogen), und daher eben dieſes auch für

in ω und ω Statt hat. Es iſt alſo $p=\cos\varphi$. Um

daraus q herzuleiten, ſey $p'=\cos(\varphi+\omega)$, ſo iſt $p'-p=$

$\cos(\varphi+\omega)-\cos\varphi=-2\sin(\varphi+\frac{1}{2}\omega).\sin\frac{1}{2}\omega$,

und die Gränze von $\frac{p'-p}{\omega}$, das iſt $q=-\sin\varphi$.

Daraus folgt (eben ſo wie p aus $\sin\varphi$),

$=-\cos\varphi$; hieraus $s=+\sin\varphi$: dann

$=-\cos\varphi$, u. ſ. f Demnach iſt

$$\sin(\varphi+\omega)=\sin\varphi+\cos\varphi.\omega-\frac{1}{2}\sin\varphi.\omega^2$$

$$-\frac{1}{6}\cos\varphi.\omega^3+\frac{1}{24}\sin\varphi.\omega^4+\frac{1}{120}\cos\varphi.\omega^5+\text{etc.}$$

27. Es ſey $f\varphi=\cos\varphi$, ſo iſt

$$\cos(\varphi+\omega)=\cos\varphi-\sin\varphi.\omega-\frac{1}{2}\cos\varphi.\omega^2$$

$$+\frac{1}{6}\sin\varphi.\omega^3+\frac{1}{24}\cos\varphi.\omega^4-\frac{1}{120}\sin\varphi.\omega^5-\text{etc.}$$

Das Verfahren bey der Entwickelung iſt dem in (29.) ganz ähnlich. Oder man leite die Formel aus der für $\sin(90°-\varphi-\omega)$ her, wo ω negativ, in Beziehung auf ω in (26.) iſt.

28. Setzt man in den beiden gefundenen Formeln $b=0$, ſo iſt

$$\sin\omega = \omega - \frac{1}{1.2.3}\omega^3 + \frac{1}{1..5}\omega^5 - \frac{1}{1..7}\omega^7 + \text{etc.}$$

$$\cos\omega = 1 - \frac{1}{2}\omega^2 + \frac{1}{1..4}\omega^4 - \frac{1}{1..6}\omega^6 + \text{etc.}$$

29. Wollte man diese letztern Formeln unmittelbar finden, so daß man gleich anfangs $\varphi = 0$ setzte, so wäre für den Sinus der Gränzquotient $p = 1$, und für den Cosinus wäre derselbe $= 0$. Deswegen müßte man die Anfangsglieder der Differenzreihen für die beiden Folgen

$$\sin 0,\ \sin\omega,\ \sin 2\omega,\ \sin 3\omega,\ \sin 4\omega,\ \text{etc.}$$

$$\cos 0,\ \cos\omega,\ \cos 2\omega,\ \cos 3\omega,\ \cos 4\omega,\ \text{etc.}$$

selbst suchen, und dann die Gränzen der Quotienten nehmen, welche dieselben, durch die zugehörige Potenz von ω dividirt, geben.

30. In der Cyklometrie (5, 6.) sind die Formeln für $\sin\omega$ und $\cos\omega$ mittelst der Integration durch einen Umweg gefunden, weil die Differentialformeln, $\partial\sin\omega = \cos\omega.\partial\omega$ und $\partial\cos\omega = -\sin\omega.\partial\omega$ sich nicht gerade zu integriren lassen. Kästner nimmt hier eine Differentialgleichung vom zweyten Grade zu Hülfe, Analysis des Unendl. §. 285. 293, wie es auch Leibnitz für den Sinus gethan hat. Acta Er. 1693. Andere gebrauchen hier die Rechnung mit unmöglichen Größen, wie Euler in der Introd. in Anal. Inf. T. 1. §. 133; la Grange in der Théorie des fonctions, §. 25. Die Differenzenrechnung nimmt hier den kürzesten Weg. Die Bestimmung von p wird mit allem Fug aus der Natur der Frage hergeleitet.

31. Es sey $f\varphi = \text{tang}\,\varphi$, und $\text{tang}(\varphi+\omega) = \text{tg}\,\varphi + p\omega + \frac{1}{2}q\omega^2 + \frac{1}{6}r\omega^3 + \frac{1}{24}s\omega^4 + \text{etc.}$ In dieser Reihe sollen die Coefficienten bestimmt werden.

Es ist $\text{tg}(\varphi+\omega) - \text{tg}\,\varphi = \frac{\text{tg}\,\varphi + \text{tg}\,\omega}{1 - \text{tg}\,\varphi.\,\text{tg}\,\omega} - \text{tg}\,\varphi$

$= \frac{(1+\operatorname{tg}\varphi^2)\operatorname{tg}\omega}{1-\operatorname{tg}\varphi.\operatorname{tg}\omega}$. Der Kürze wegen ſey

$\operatorname{tg}\varphi = t$, ſo iſt $\Delta f\varphi = \frac{(1+t^2)\operatorname{tg}\omega}{1-t.\operatorname{tg}\omega}$, und

$\frac{\Delta\varphi}{\omega}$ oder $\frac{\Delta t}{\omega} = \frac{1+t^2}{1-t.\operatorname{tg}\varphi} \cdot \frac{\operatorname{tg}\omega}{\omega}$. Die Gränes Quotienten $\frac{\operatorname{tg}\omega}{\omega}$ iſt $= 1$. Wird nun zugleich m andern Factor $\operatorname{tg}\omega = 0$ geſetzt, ſo wird die Gränze $\frac{\Delta t}{\omega} = 1+t^2$, und es iſt $p = 1+t^2$. Setzt man $t+\Delta t$ für t, und p' für p, ſo iſt $p'-p = 2t\Delta t + t^2$, und $\frac{p'-p}{\omega} = (2t+\Delta t)\frac{\Delta t}{\omega}$. Die Gränze s Quotienten iſt $q = 2t(1+t^2)$, indem hier alles gelaſſen werden muß, was von ω abhängt, alſo auch in dem Factor $2t+\Delta t$. Ferner iſt $q'-q = 2\Delta t + t^2\Delta t + M\Delta t^2$, wo $M\Delta t^2$ alle Theile begreift, wel- Δt^2 und Δt^3 enthalten, und $\frac{q'-q}{\omega} = (2+6t^2)\frac{\Delta t}{\omega} + \frac{M\Delta t^2}{\omega}$. Die Gränze dieſes Quotienten iſt $(2+6t^2)(1+t^2) = 2+8t^2+6t^4$. Auf dieſel- Art, wie r aus q hergeleitet iſt, wird aus r der nzquotient s gefunden, nämlich $s = (16t+24t^3) + t^5) = 8(2t+5t^3+3t^5)$. Hieraus iſt der fol- de Gränzquotient, der zum Unterſchiede von t durch (t) ichnet werde, $(t) = 8(2+15t^2+15t^4)(1+t^2)$ $(2+17t^2+30t^4+15t^6)$; u. ſ. w.

Demnach iſt, wenn $\operatorname{tg}\varphi = t$ iſt,

$$\operatorname{tg}(\varphi+\omega) = t + (1+t^2)\left[\omega + t\omega^2 + \left(\frac{1}{3}+t^2\right)\omega^3 + \left(\frac{2}{3}t+t^3\right)\omega^4 + \left(\frac{2}{15}+t^2+t^4\right)\omega^5 + \left(\frac{17}{45}t+\frac{4}{3}t^3+t^5\right)\omega^6 + \text{etc.}\right]$$

32. Wenn $\varphi = \frac{1}{4}\pi$ oder 45°, so ist $t = 1$

$$\text{tang}(\tfrac{1}{4}\pi + \omega) = 1 + 2(\omega + \omega^2 + \tfrac{4}{3}\omega^3 + \tfrac{5}{3}$$

$$+ \tfrac{32}{15}\omega^5 + \tfrac{122}{45}\omega^6 + \text{etc}$$

Nimmt man ω negativ, so ist

$$\text{tang}(\tfrac{1}{4}\pi - \omega) = 1 - 2(\omega - \omega^2 + \tfrac{4}{3}\omega^3 - \tfrac{5}{3}$$

$$+ \tfrac{32}{15}\omega^5 - \tfrac{122}{45}\omega^6 + \text{e}$$

Das Product dieser beiden Reihen ist $= 1$, wie muß, da die Tangente des einen Winkels die Cota des andern ist. Sie sind sehr brauchbar, die Tan und Cotangenten solcher Winkel zu berechnen, wel mittelbar keine convergirende Reihen für jene geben Eulers Differentialrechnung. II. §. 98. hat die für tang $(\varphi + \omega)$ eine andere Gestalt.

33. Es sey $fy = \text{Ang. sin } y = \varphi$, und $f(y+u) = \text{Ang. sin } (y+u) = \varphi + \omega$; nun Differenz der Winkel durch die Differenz der Sinu gedruckt werden.

Man setze wiederum $f(y+u) = fy +$

$$+ \tfrac{1}{2}qu^2 + \tfrac{1}{6}ru^3 + \text{etc.}, \text{ so ist } \omega = pu + \tfrac{1}{2}$$

$$+ \tfrac{1}{6}ru^5 + \text{etc., und } \frac{\omega}{u} = p + \tfrac{1}{2}qu +$$

In (26.) ist gefunden, daß der Gränzquotien $\frac{\Delta \sin \varphi}{\Delta \varphi} = \cos \varphi$ ist, also ist hier $p = \frac{1}{\cos \varphi} = \sqrt{(}$

Die Gränzen der Differenzquotienten dieser Functio schon in (22.) gefunden. Es ist daselbst fx, wa

p ist, wenn für das dortige x hier y genommen wird. Also kommen für die dortigen p, q, r, s, t, hier q, r, s, t, (u), wo die Klammern das (u), als Differenzquotienten, von u, als Veränderung des Sinus, unterscheiden. Man setze $\sqrt{(1-yy)} = x$, als $\cos\varphi$, so ist

$$\text{Ang.sin}(y+u) = \text{Ang.sin}\,y + \frac{u}{x} + \frac{yu^2}{2x^3} + \frac{(1+2y^2)u^3}{6x^5} + \frac{(9y+6y^3)u^4}{24x^7} + \frac{(9+72y^2+24y^4)u^5}{120x^9} + \frac{(225y+600y^3+120y^5)u^6}{720x^{11}} + \text{etc.}$$

34. Es sey $fx = \text{Ang.}\cos x = \varphi$, und $f(x+u) = \text{Ang.}\cos(x+u) = \varphi + \omega$; nun soll die Differenz der Winkel entwickelt werden.

Da die Gränze von $\frac{\Delta\cos\varphi}{\Delta\varphi} = -\sin\varphi$ ist (26 und 27.), so ist hier $p = -\frac{1}{\sin\varphi} = -\frac{1}{\sqrt{(1-xx)}}$, und die Coefficienten in der entwickelten Reihe sind dieselben mit denen in (33.) nur entgegengesetzt, ausserdem daß x und y mit einander vertauscht werden. Es ist also

$$\text{Ang.}\cos(x+u) = \text{Ang.}\cos x - \frac{u}{y} - \frac{xu^2}{2y^3} - \frac{(1+2x^2)u^3}{6y^5} - \frac{(9x+6x^3)u^4}{24y^7} - \frac{(9+72x^2+24x^4)u^5}{120y^9} - \text{etc.}$$

Diese Formel und die in (33.) sind bey kleinen Werthen von u sehr convergirend, ausser wenn in jener der Winkel nahe ein rechter, und in dieser sehr klein ist.

35. Wenn $\varphi = 0$ genommen wird, so ist $y = 0$, und $x = 1$, also $\text{Ang.sin}\,u = u + \frac{u^3}{6} + \frac{9u^5}{120} + \text{etc.}$

Dieſe Reihe wird bequemer durch die Integralrechnu
funden, ſ. Cyklometrie. 1.

36. Es ſey $ft = \text{Ang. tang } t = \varphi$, und $f($
$= \text{Ang. tang}(t+u) = \varphi + \omega$; nun ſoll die D
der Winkel durch die Differenz der Tangenten ang
werden.

Man ſetze $f(t+u) = ft + pu + \frac{1}{2}qu^2 +$
$+$ etc. In (31.) iſt gefunden, daß die Grän
$\frac{\Delta \text{tang } \varphi}{\Delta \varphi} = 1 + t^2$ iſt, nämlich der dortige Wer
p. Daher iſt hier p (als Gränze von $\frac{\Delta \varphi}{\Delta \text{tang } \varphi}$) :
$\frac{1}{1+t^2}$, oder $p = (1+t^2)^{-1}$. Setzt man $t+u$
ſo iſt $p' = (1+t^2+2tu+u^2)^{-1} = (1+t^2)$
$2t(1+t^2)^{-2}u +$ etc., und die Gränze von $\frac{p'}{}$
oder $q = -2t(1+t^2)^{-2}$. Wird hier $t+u$ für
ſetzt, ſo iſt $q' = -2(t+u)(1+t^2+2tu+u^2$
$-2(t+u)((1+t^2)^{-2} - 4t(1+t^2)^{-3}u) +$ etc
$q' - q = 8t^2(1+t^2)^{-3}u - 2(1+t^2)^{-2}u +$ et
$(8t^2 - 2(1+t^2))(1+t^2)^{-3}u +$ etc. und die Grä
$\frac{q'-q}{u}$ oder $r = (6t^2-2)(1+t^2)^{-3}$. Auf glei
wird hieraus hergeleitet $s = 24(t-t^3)(1+t^2)^{-4}$.
aus $(t) = 24(1-10t^2+5t^4)(1+t^2)^{-5}$ u. ſ. f.
Potenz des Binomium wird bey jeder Operation en
elt, und die Differenz des einen Factors in den a
Factor multiplicirt; wobey das Quadrat und die h
Potenzen von u weggelaſſen werden. Demnach iſt

$$\text{Ang.tang}(t+u) = \text{Ang.tang}\, t + \frac{u}{1+t^2} - \frac{tu^2}{(1+t^2)^2} + \frac{(3t^2-1)u^3}{3(1+t^2)^3} - \frac{(t^3-t)u^4}{(1+t^2)^4} + \frac{(5t^4-10t^2+1)u^5}{5(1+t^2)^5} - \frac{(3t^5-10t^3+3t)u^6}{3(1+t^2)^6} + \text{etc.}$$

Man vergleiche Euleri Calc. differ. II. §. 86. 87.

37. Wenn $t=0$ genommen wird, so ist

$$\text{Ang.tang}\, u = u - \frac{1}{3}u^3 + \frac{1}{5}u^5 - \text{etc.}$$

Diese Formel wird unmittelbar und leichter durch die Differentialrechnung gefunden, s. Cyklometrie. 10.

38. Die Differentialrechnung liefert nach den Regeln ihres Verfahrens die Quotienten p, q, r. etc. leichter. Unsere Formel erhält durch Einführung der Differentialquotienten folgende Gestalt:

$$f(x+u) = fx + \frac{\partial fx}{\partial x}\cdot\frac{u}{1} + \frac{\partial^2 fx}{\partial x^2}\cdot\frac{u^2}{1.2} + \frac{\partial^3 fx}{\partial x^3}\cdot\frac{u^3}{1.2.3} + \frac{\partial^4 fx}{\partial x^4}\cdot\frac{u^4}{1.2.3.4} + \text{etc.}$$

Die Differentialquotienten sind ganz dasselbe mit dem, was hier Gränzquotienten genannt sind. Die Formel ist der nach Taylor benahmte Lehrsatz.

39. Wenn $x=0$, und A der Werth der Function fx für $x=0$ ist, so ist

$$fu = A + \frac{\partial fx}{\partial x}\cdot\frac{u}{1} + \frac{\partial^2 fx}{\partial x^2}\cdot\frac{u^2}{1.2} + \frac{\partial^3 fx}{\partial u^3}\cdot\frac{u^3}{1.2.3} + \frac{\partial^4 fx}{\partial u^4}\cdot\frac{u^4}{1.2.3.4} + \text{etc.}$$

wo man die Bezeichnung u auch mit x vertauschen kann, weil u jeden Werth der Functionalgröße bedeuten kann, der durch x bezeichnet wird. Allein in den Differentialquotienten muß man, nachdem sie durch x ausgedruckt sind, $x=0$ setzen, weil diese Quotienten gar nicht von u ab-

hangen, alſo auch nicht von x, wenn u mit x vertauſcht wird.

Iſt für das Anfangsglied A der Werth von x nicht Null, ſondern = a, ſo muß man in den Differentialquotienten a für das als veränderlich betrachtete x ſetzen.

40. Die Reihe für die Differenz einer Function, oder für $f(x+u)-fx$, (wo x auch o ſeyn mag) kann langſam convergiren, oder gar divergiren, weil eine Reihe im Allgemeinen nur die Form, nicht nothwendig die Quantität einer Größe, angiebt. Doch mag die Reihe für hinlänglich kleine u, die es nämlich in Vergleichung mit der Größen-Einheit ſind, immer convergirend gemacht werden. Für große x den Werth der Function x zu entwickeln, muß man erſt den Werth der Function für ein kleines x ſuchen, dann den Werth für $f(x+u)$, wo u wiederum hinlänglich klein genommen werde. Ferner iſt, wenn dieſes $x+u$ durch bezeichnet wird, der Werth von $f(x+u)$ auf gleiche Art zu beſtimmen, wodurch man ſo fortfahrend den Werth der Function für irgend ein x herausbringen mag. Ein Beyſpiel iſt in (31.) vorgekommen. Bey der Berechnung der goniometriſchen Linien verfährt man ſolchergeſtalt.

Die Reihe für die Differenz ſtellt die Ordinaten einer paraboliſchen Linie vor, welche die Curve, deren Ordinate die Function ſelbſt iſt, nur oſculirt, aber nicht mit ihr einerley iſt, daher man die Curve in Portionen abtheilen, und dieſe einzeln beſtimmen muß. Dabey kommt es darauf an, wie genau die Endpuncte der Portionen beſtimmt werden. S. berührende Linie.

V. Differenz einer Function zweyer veränderlichen Größen.

41. Es ſey V irgend eine Function von x und y. Man ſucht die allgemeine Form der Differenz von V durch die Differenzen von x und y. Zur Erläuterung mögen die Beyſpiele vorangehen. Es ſey

I. $V = ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f.$

Man ſetze $x + \Delta x$ für x; $y + \Delta y$ für y, $V + \Delta V$ für V, ſo daß ΔV die Differenz iſt, um welche V ſich verändert, wenn x ſich um Δx, und y ſich um Δy verändert. Zieht man von der durch die Subſtitutionen entſtandenen Gleichung die gegebene ab, ſo iſt

$$\Delta V = (2ax + by + d + a\Delta x)\Delta x + (2cy + bx + e + c\Delta y)\Delta y + b\Delta x\Delta y.$$

Das erſte Glied iſt die partielle Differenz von V, wenn x allein verändert wird; das zweyte die partielle Differenz von V, wenn y allein veränderlich geſetzt wird; das dritte iſt die partielle Differenz des erſten Gliedes, y allein darin veränderlich geſetzt, oder des zweyten, wenn x allein darin verändert wird.

II. Es ſey $V = \alpha x^3 + \beta x^2 y + \gamma x y^2 + \delta y^3$, ſo iſt

$$\Delta V = (3\alpha x^2 + 2\beta xy + \gamma y^2 + 3\alpha x\Delta x + \beta y\Delta x + \alpha\Delta x^2)\Delta x + (3\delta y^2 + 2\gamma xy + \beta x^2 + 3\delta y\Delta y + \gamma x\Delta y + \delta\Delta y^2)\Delta y + (2\beta x + 2\gamma y + \gamma\Delta y + \beta\Delta x)\Delta x\Delta y.$$

Die Form der Glieder iſt dieſelbe wie in dem erſten Beyſpiele.

III. Noch ſey $V = \frac{x}{y}$, ſo iſt $\Delta V = \frac{y\Delta x - x\Delta y}{y(y+\Delta y)}$ wie in (10.), oder $\Delta V = \frac{\Delta x}{y} - \frac{x\Delta y}{y(y+\Delta y)} - \frac{\Delta x.\Delta y}{y(y+\Delta y)}$. Das erſte Glied iſt die partielle Differenz in Rückſicht auf x, das zweyte in Rückſicht auf y, weil $\Delta.\frac{1}{y} = \frac{1}{y+\Delta y} - \frac{1}{y} = -\frac{\Delta y}{y(y+\Delta y)}$ iſt; das dritte iſt die partielle Differenz des erſten Gliedes

in Rückſicht auf y, oder des zweyten in Rückſich
Daſſelbe gilt, wenn für x, eine Function von x,
y eine Function von y geſetzt wird.

42. Es ſey V irgend eine Function von x
Ihre partielle Differenz in Rückſicht auf x allein ſe
und in Rückſicht auf y allein ſey die partielle D
$= Q\Delta y$. Die partielle Differenz von P in Rück
y allein ſey $p\Delta y$; und von Q in Rückſicht auf
ſey ſie $q\Delta x$. Durch die Subſtitution von $x +$
x verwandelt ſich V in $V + P\Delta x$, und dieſe
Subſtitution von $y + \Delta y$ für y in $V + P\Delta x$
$+ p\Delta y.\Delta x$. Dieſes iſt die vollſtändige ver
Function, da ſowohl $y + \Delta y$ für y, als $x + \Delta$
geſetzt iſt. Alſo iſt $\Delta V = P\Delta x + Q\Delta y + p\Delta$
Auf gleiche Art verwandelt ſich durch die Sub
von $y + \Delta y$ für y die Function V in $V + Q\Delta y$;
durch Subſtitution von $x + \Delta x$ für x in V
$+ P\Delta x + q\Delta x.\Delta y$. Hieraus iſt $\Delta V =$
$+ P\Delta x + q\Delta x.\Delta y$. Aus der Vergleichun
Werthes mit dem vorhergehenden folgt $p\Delta y.\Delta x$
$q\Delta x.\Delta y$; alſo $p = q$.

Die partielle Differenz von V in Rückſicht a
lein hat zur partiellen Differenz in Rückſicht auf
dieſelbe, welche die partielle Differenz von V, in D
auf y allein genommen hat, wenn in derſelben
verändert wird.

Der hier vorgetragene Lehrſatz giebt ein Prüfu
tel an die Hand, zu erfahren, ob eine gegebene D
welche nebſt Δx und Δy auch $\Delta x\Delta y$ enthält, v
Function zweyer veränderlichen Größen entſtehen
Die Gleichung $p = q$ iſt eine Bedingungsgle
für die Möglichkeit der Relation zwiſchen der g
Differenzengleichung, und einer zuſtimmenden G
für die Größen ſelbſt.

VI. Höhere Differenzen.

43. Wenn von der Differenz einer Function fx die Differenz, von dieser aufs neue die Differenz genommen, und so fortgefahren wird, man mag nun zuletzt auf eine unveränderliche Differenz kommen oder nicht, so heißen diese Differenzen die höhern. Die Differenz der ersten Differenz heißt die zweyte, die Differenz der zweyten heißt die dritte, u. s. f. die Bezeichnungen sind für diese höhere Differenzen, $\Delta^2 fx$, $\Delta^3 fx$, $\Delta^4 fx$, etc. oder wenn $fx = z$ ist, $\Delta^2 z$, $\Delta^3 z$, $\Delta^4 z$, etc. Sie werden auf dieselbe Art jede aus der nächst niedrigern hergeleitet, wie Δz aus fx, indem nämlich für x gesetzt wird $x + \Delta x$. So wie die erste Differenz den Factor Δx hat, so erhält die zweyte den Factor Δx^2, die dritte den Factor Δx^3, u. s. f.

44. Die höhern Differenzen sind schon in der allgemeinen Formel für die Differenz einer Function angewandt: nur sind dabey die höhern Potenzen von Δx, nach der niedrigsten, zu der Differenz gehörigen weggelassen, weil diese gar keinen Einfluß auf die entwickelte Function, $f(x+\Delta x)$ oder $f(x+u)$, haben.

45. Die zweyte Differenz entsteht aus drey auf einander folgenden Werthen der Function fx; die dritte aus vier solchen Werthen, u. s. w. (s. arithm. Reihen höh. Ordn.) Die Unterschiede der Werthe von x könnten zwar ungleich genommen werden, allein alsdann ist das Gesetz zu bestimmen, nach welchem sich die zu den Werthen der Function gehörigen x verändern sollen. Demnach wäre x eine Function einer Größe y, deren Unterschiede gleich groß sind, oder man müßte diese wiederum eine Function einer andern Größe v seyn lassen, so daß man zuletzt doch auf einer Größe stehen bleiben muß, deren Veränderungen gleich groß sind, indem die zugehörigen Werthe der Function fx sich ungleichförmig verändern. So wie jene das Maß oder die Einheit für die ersten Differenzen der Function fx sind, so sind ihre Quadrate es für die zweyten Differenzen, ihre Cubi für die dritten u. s. f. Ohne

Auch ſind $\frac{\Delta^2 z}{\Delta x . \Delta z}$; $\frac{\Delta^3 z}{\Delta x^2 . \Delta z}$; $\frac{\Delta}{\Delta x}$

gemeinen endliche Quotienten. Denn der

ſehen werden als das Product $\frac{\Delta^2 z}{\Delta x^2} \cdot \frac{\Delta}{\Delta}$

als das Product $\frac{\Delta^3 z}{\Delta x^3} \cdot \frac{\Delta x}{\Delta z}$; der dri

duct $\frac{\Delta^3 z}{\Delta x^3} \cdot \frac{\Delta x^2}{\Delta^2 z}$. So auch bey Q

rer Ordnungen. Ein Product von Dif

Ordnungszahlen die Summe m geben, geh

Ordnung mit $\Delta^m z$, oder zu dem mten, un

$\Delta^m z$ durch jenes Product dividirt, iſt im

endliche Größe.

46. Exempel. Es ſey $z = x^4$, un

Setzt man $\Delta x = u$, ſo iſt

$\Delta z = 4x^3 u + 6x^2 u^2 + 4x u^3 +$

$\Delta^2 z = 12x^2 u^2 + 24x u^3 + 14u^4$

$\Delta^3 z = 24 x u^3 + 36 u^4$

47. Exempel. Es sey $z = xy$, und es bleibe unbestimmt, ob von x oder y die Differenzen unveränderlich sind. Es ist

$$\Delta z = y\Delta x + x\Delta y + \Delta x \Delta y.$$

Setzt man $x + \Delta x$ für x; $y + \Delta y$ für y; $\Delta x + \Delta^2 x$ für Δx; $\Delta y + \Delta^2 y$ für Δy, oder multiplicirt man die Differenz jedes Factors in den andern Factor, und die Differenzen selbst in einander, so ist die zweyte Differenz

$$\begin{aligned}\Delta^2 z = {} & y\Delta^2 x + 2\Delta y \Delta x + \Delta^2 y . x \\ & + 2\Delta y \Delta^2 x + 2\Delta^2 y \Delta x \\ & + \Delta^2 y \Delta^2 x\end{aligned}$$

Hieraus wird auf dieselbe Art erhalten

$$\begin{aligned}\Delta^3 z = {} & y\Delta^3 x + 3\Delta y \Delta^2 x + 3\Delta^2 y \Delta x + \Delta^3 y . x \\ & + 3\Delta y \Delta^3 x + 6\Delta^2 y \Delta^2 x + 3\Delta^3 y \Delta x \\ & + 3\Delta^2 y \Delta^3 x + 3\Delta^3 y \Delta^2 x \\ & + \Delta^3 y \Delta^3 x.\end{aligned}$$

Man bemerkt hier leicht das Gesetz, nach welchem die Differenzen der verschiedenen Ordnungen mit einander verbunden werden, und in den Abschnitten der Differenz von auf einander folgen, wie auch das Gesetz, der numerischen Coefficienten.

III. Allgemeine Formeln für die Anfangsglieder der Differenzreihen.

48. Eine Function von x sey fx, und $\frac{\partial fx}{\partial x} = \alpha$;

$\frac{\partial^2 fx}{\partial x^2} = \beta$; $\frac{\partial^3 fx}{6\partial x^3} = \gamma$; $\frac{\partial^4 fx}{24\partial x^4} = \delta$;

$\frac{\partial^5 fx}{120\partial x^5} = \varepsilon$; etc. Nun ist

$fx = fx$

$f(x+u) = fx + \alpha u + \beta u^2 + \gamma u^3 + \delta u^4 + \varepsilon u^5 + \text{etc.}$

$f(x+2u) = fx + 2\alpha u + 4\beta u^2 + 8\gamma u^3 + 16\delta u^4 + 32\varepsilon u^5 + \text{etc.}$

$f(x+3u) = fx + 3\alpha u + 9\beta u^2 + 27\gamma u^3 + 81\delta u^4 + 243\varepsilon u^5 + \text{etc.}$

etc. etc.

Es iſt klar, daß die numeriſchen Coefficienten in den Anfangsgliedern der Differenzreihen von den ſucceſſiven Werthen der Function, oder in Δfx, $\Delta^2 fx$, $\Delta^3 fx$, etc. einerley ſind mit den Anfangsgliedern der Differenzreihen von den Potenzen der natürlichen Zahlen mit Einſchluß der Null, nach ihrer Ordnung genommen. Nämlich

$\Delta fx = \alpha u + \beta u^2 + \gamma u^3 + \delta u^4 + \varepsilon u^5 + \text{etc.}$

$\Delta^2 fx = 2\beta u^2 + 6\gamma u^3 + 14\delta u^4 + 30\varepsilon u^5 + \text{etc.}$

$\Delta^3 fx = 6\gamma u^3 + 36\delta u^4 + 150\varepsilon u^5 + \text{etc.}$

$\Delta^4 fx = 24\delta u^4 + 240\varepsilon u^5 + \text{etc.}$

$\Delta^5 fx = 120\varepsilon u^5 + \text{etc.}$

49. Kann man nun zwey Werthe einer Function für die zugehörigen x, nebſt den Differentialquotienten berechnen, ſo kann man zwiſchen jenen Werthen ſehr leicht ſo viele Glieder als man will, einſchalten.

50. Exempel. Es ſey $fx = \sin\varphi$, und $f(x+u) = \sin(\varphi+\omega)$, ſo iſt $x = \varphi$; $u = \omega$; und $\alpha = \cos\varphi$; $\beta = -\frac{1}{2}\sin\varphi$; $\gamma = -\frac{1}{6}\cos\varphi$; $\delta = +\frac{1}{24}\sin\varphi$; $\varepsilon = +\frac{1}{120}\cos\varphi$; etc. Dadurch iſt

$$\Delta \sin\varphi = \cos\varphi \cdot \omega - \frac{1}{2}\sin\varphi \cdot \omega^2 - \frac{1}{6}\cos\varphi \cdot \omega^3 + \frac{1}{24}\sin\varphi \cdot \omega^4 + \frac{1}{120}\cos\varphi \cdot \omega^5 - \text{etc.}$$

$$\Delta^2 \sin\varphi = -\sin\varphi \cdot \omega^2 - \cos\varphi \cdot \omega^3 + \frac{7}{12}\sin\varphi \cdot \omega^4 + \frac{1}{4}\cos\varphi \cdot \omega^5 - \text{etc.}$$

$$\Delta^3 \sin\varphi = -\cos\varphi \cdot \omega^3 + \frac{3}{2}\sin\varphi \cdot \omega^4 + \frac{9}{4}\cos\varphi \cdot \omega^5 - \text{etc.}$$

$$\Delta^4 \sin\varphi = +\sin\varphi \cdot \omega^4 + 2\cos\varphi \cdot \omega^5 - \text{etc.}$$

$$\Delta^5 \sin\varphi = +\cos\varphi \cdot \omega^5 - \text{etc.}$$

etc.

Z. B. Es sey $\varphi = 42$ Centesimalgrade, und $\omega = 1'$, nach derselben Eintheilung, so daß $\omega = \frac{\pi}{20000}$. Aus der Einleitung zu Hoberts und Idelers Tafeln, S. L. oder Callets Tafeln ist

$$\text{l}\sin\varphi = 9,\ 78739\ 46195 - 10$$
$$\text{l}\cos\varphi = 9,\ 89771\ 22994 - 10$$

Ferner ist

$$\text{l}\pi = 0,\ 49714\ 98727$$
$$\text{l}\,10^4 = 4,\ 30102\ 99957$$
$$\text{l}\omega = 6,\ 19611\ 98770 - 10$$
$$\text{l}\omega^2 = 2,\ 39223\ 97540 - 10$$

Mit Hülfe dieser Logarithmen wird gefunden

$$\cos\varphi \cdot \omega = 0,\ 000124\ 117259$$
$$\cos\varphi \cdot \omega^3 = 0,\ \ldots\ldots\ \ldots\ldots\ 3$$
$$\sin\varphi \cdot \omega^2 = 0,\ \ldots\ldots\ \ldots\ 15123$$

Daraus ist für die Winkel 42^c; $42^c\,1'$; $42^c\,2'$; etc.

$$\Delta \sin 42^\circ = +\,0,000124\ 109698$$
$$\Delta^2 \sin 42^\circ = -\,0,000000\ 015126$$
$$\Delta^3 \sin 42^\circ = -\,0,\ldots\ldots\ \ldots\ldots 3$$

übereinstimmig mit der Tafel der Differenzen a. a. O. S. XXIX, die daselbst auf 28 Decimalstellen berechnet sind, allein auf eine mühsame Art, nicht durch eine allgemeine Formel.

51. Exempel. Es sey $fx = \log.\text{nat.}\sin\varphi$, und $f(x+u) = \log.\text{nat.}\sin(\varphi+\omega)$, so ist $x=\varphi$; $u=\omega$,

und $\alpha = \frac{\cos\varphi}{\sin\varphi}$; $\beta = -\frac{1}{2\sin\varphi^2}$; $\gamma = +\frac{\cos\varphi}{3\sin\varphi^3}$;

$\delta = -\frac{2+\operatorname{ccl}2\varphi}{12\sin\varphi^4}$; $\varepsilon = +\frac{(5+\cos 2\varphi)\cos\varphi}{30\sin\varphi^5}$;

etc.

Verlangt man die gemeinen tabularischen Logarithmen, so müssen die Differenzen mit dem Modulus des tabularischen Systems multiplicirt werden. Dieser ist

$$M = 0,434294481\ldots \text{ und}$$
$$\log M = 9,637784\,3114 - 10.$$

Z. B. $\varphi = 42^\circ$ Centesimale; $\omega = 10' = \frac{\pi}{2000}$.

Es ist

$$M.\alpha\omega = \quad 0,000879\ 471698$$
$$M.\beta\omega^2 = -\,0,000001\ 426280$$
$$M.\gamma\omega^3 = +\,0,\ldots\ldots\ \ldots 192553$$
$$M.\delta\omega^4 = -\,0,\ldots\ldots\ \ldots\ldots 355$$

etc.

Hieraus ist für die Winkel 42°; $42^\circ\,10'$; $42^\circ\,20'$; etc.

$$\Delta \log.\sin 42^\circ = +\,0,000878\ 047341$$
$$\Delta^2 \log.\sin 42^\circ = -\,0,000002\ 841056$$
$$\Delta^3 \log.\sin 42^\circ = +\,0,\ldots\ldots\ \ldots 11427$$
$$\Delta^4 \log.\sin 42^\circ = -\,0,\ldots\ldots\ \ldots\ldots 84$$

se Differenzen ſtimmen zu den aus Callets Tafeln hen
iteten, ganz genau, oder mit dem Unterſchiede eines
ers in der letzten Ziffer. Es iſt

$$\sin 42° = 0,612907\,053652$$

$$l\sin 42° = 9,787394\,619467$$

Mit dieſen und den gefundenen Anfangsgliedern der
ferenzreihen laſſen ſich für die folgenden Winkel die na
ichen oder logarithmiſchen Sinus finden.

III. Umgekehrte Differenzen-Rechnung.

52. Bey der umgekehrten Differenzenrechnung iſt es
Frage, aus einer Function von x, welche die Differenz
:r andern Function von x iſt, dieſe letztere zu finden.
manchen Fällen dienen zu der Auflöſung dieſer Aufgabe
Differenzen, die aus allerhand Functionen von x her
:itet ſind. In vielen Fällen aber iſt die Aufgabe nicht
)ers aufzulöſen, als daß die Differenz in eine Reihe ver
ndelt wird, wodurch die ihr zugehörige Function auch
: in der Form einer nicht abbrechenden Reihe erhalten
:d. Es iſt ein ſolcher Fall, der in der Integralrechnung
h häufig vorkommt. Bey Differenzen mit zwey verän
lichen Größen muß die Bedingung in (42) erfüllt ſeyn.

53. Die Function fx nenne man die integri
nde Function in Abſicht auf ihre Differenz Δfx.
; ſey nämlich A der Werth der Function für $x=a$,
b Q ihr Werth für $x=q$, ſo iſt $Q-A$ das Aggre
: aller Differenzen, die zwiſchen A und Q fallen. Iſt
$=0$, und ſind alle Differenzen gleichnamig, ſo iſt Q die
umme aller Differenzen zwiſchen den ſucceſſiven Wer
n von fx, von o bis Q.
Wegen der Anwendung auf die Summirung der Reihen,
b zur Erleichterung der Unterſuchung, wollen wir
$x=1$ ſetzen.

54. Es ſey z eine Function von x, und $\Delta z = x$,
an ſucht z. Weil dieſe Differenz ein Theil von $\Delta . x^2$
,l ſo ſetze man $z = ax^2 + bx + c$, nach der Methode der
beſtimmten Coefficienten. Dadurch iſt . . . .

$\Delta z = 2ax + a + b$. Die Vergleichung mit dem gegebenen Werthe von Δz giebt, $a = \frac{1}{2}$; und $a + b = 0$, also $b = -\frac{1}{2}$, und die integrirende Function . . .

$z = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x + c$. Die Größe c ist im Allgemeinen unbestimmt. In dem Unterschiede zwischen z und $z + \Delta z$ hebt sich c, welches in beiden enthalten ist.

55. Es sey $\Delta z = x^2$. Wie vorher setze man $z = ax^3 + bx^2 + cx + d$, so ist $\Delta z = 3ax^2 + (3a + 2b)x + a + b + c$. Die Vergleichung mit $\Delta z = x^2$ giebt $3a = 1$; $3a + 2b = 0$; $a + b + c = 0$. Daraus wird die integrirende Function $z = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x + d$, oder $z = x(x-1)(2x-1) + d$.

56. Ist $\Delta z = x^3$, so ist

$$z = \frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{2}x^3 + \frac{1}{4}x^2 + \text{Const.}$$

$$= \frac{1}{4}x^2(x-1)^2 + \text{Const.}$$

57. Ist $\Delta z = x^4$, so ist

$$z = \frac{1}{5}x^5 - \frac{1}{2}x^4 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{30}x + \text{Const.}$$

$$= \frac{1}{30}x(x-1)(2x-1)(3x^2 - 3x - 1) + \text{Const.}$$

58. Es sey $\Delta z = (mx + a)(mx + m + a)$, so ist aus (10.),

$$z = \frac{1}{3m}(mx - m + a)(mx + a)(mx + m + a)$$

Ist $\Delta z = (mx + a)(mx + m + a)(mx + 2m + a)$, so ist

$$z = \frac{1}{4m}(mx-m+a)(mx+a)(mx+m+a) \times (mx+2m+a),$$

wo die Conſt. nach den Umſtänden beyzufügen iſt.

59. Es ſey $\Delta z = -\frac{1}{(mx+a)(mx+m+a)}$,

ſo iſt $z = \frac{1}{m(mx+a)}$.

Iſt $\Delta z = -\frac{1}{(mx+a)(mx+m+a)\ldots(mx+rm+a)}$,

ſo iſt

$$z = \frac{1}{rm(mx+a)(mx+m+a)\ldots(mx+(r-1)m+a)}.$$

60. Es ſey $\Delta z = \frac{1}{x.x+2}$. Dieſen Bruch zerlege man in die beiden, $\frac{A}{x.x+1} + \frac{B}{x.x+1.x+2}$.

Man bringe jenen Bruch und dieſe auf gleiche Nenner, ſo geben die Zähler die Gleichung,

$$x+1 = A(x+2)+B.$$

Hieraus wird erhalten, $A=1$; $2A+B=1$; alſo $B=-1$, und es iſt

$$\frac{1}{x.x+2} = \frac{1}{x.x+1} - \frac{1}{x.x+1.x+2}.$$

Folglich iſt aus (59.)

$$z = -\frac{1}{x} + \frac{1}{2x.x+1}.$$

61. Es ſey $\Delta z = \frac{1}{x.x+3}$. Dieſen Bruch zerlege man in die drey Brüche,

$$\frac{A}{x.x+1.} + \frac{B}{x.x+1.x+2.} + \frac{C}{x.x+1.x+2.x+3.}$$

Die Reduction auf denselben Nenner giebt mittelst der Zähler die Gleichung,

$$1 = A.x+2.x+3. + B.x+3. + C,$$

das ist

$$1 = Ax^2 + (5A+B)x + 6A + 3B + C.$$

Die Vergleichung der Coefficienten auf beiden Seiten giebt, $A = 1$; $B = -2$; $C = +2$, so daß

$$\frac{1}{x.x+3.} = \frac{1}{x.x+1.} - \frac{2}{x.x+1.x+2.} + \frac{2}{x.x+1.x+2.x+3.}.$$

Daraus folgt

$$\Sigma = -\frac{1}{x} + \frac{1}{x.x+1.} - \frac{2}{3x.x+1.x+2.}.$$

Hieraus erhellt, wie die integrirende Function von $\frac{1}{x.x+n.}$ gefunden wird, wenn n eine ganze Zahl ist.

62. Man nehme die Winkel, $\varphi - \alpha$; φ; $\varphi + \alpha$; und mehrere auf beiden Seiten von φ in arithmetischer Progression, so ist (Goniometrie, 28.)

$$\sin\varphi - \sin(\varphi - \alpha) = 2\cos(\varphi - \tfrac{1}{2}\alpha).\sin\tfrac{1}{2}\alpha;$$

$$\sin(\varphi + \alpha) - \sin\varphi = 2\cos(\varphi + \tfrac{1}{2}\alpha).\sin\tfrac{1}{2}\alpha.$$

Die zweyte Gleichung entsteht aus der ersten, wenn $\varphi + \alpha$ für φ gesetzt wird. Setzt man die Differenz in der ersten $= z$, die in der zweyten $= z + \Delta z$, so ist

$$\Delta z = -4\sin\varphi.\sin\tfrac{1}{2}\alpha.\sin\tfrac{1}{2}\alpha$$
$$= -2(1-\cos\alpha)\sin\varphi.$$

63. Ferner ist

$$\cos\varphi - \cos(\varphi - \alpha) = -2\sin(\varphi - \tfrac{1}{2}\alpha).\sin\tfrac{1}{2}\alpha;$$

$$\cos(\varphi + \alpha) - \cos\varphi = -2\sin(\varphi + \tfrac{1}{2}\alpha).\sin\tfrac{1}{2}\alpha.$$

Setzt man die Differenz in der erstern Gleichung $= z$, die in der andern $= z + \Delta z$, so ist

$$\Delta z = -4 \cos\varphi . \sin \tfrac{1}{2} \alpha . \sin \tfrac{1}{2} \alpha$$

$$= -2(1 - \cos\alpha)\cos\varphi .$$

64. Ist $\Delta z = \sin\varphi$, so ist z eine Summe von Sinus, deren Winkel in arithmetischer Progression sind, und diese integrirende Function ist

$$z = \frac{-\sin\varphi + \sin(\varphi - \alpha)}{4 \sin \frac{1}{2} \alpha^2},$$

wo im Nenner auch $2(1 - \cos\alpha)$ gesetzt werden kann.

65. Ist $\Delta z = \cos\varphi$, so ist

$$z = \frac{\cos(\varphi - \alpha) - \cos\varphi}{4 \sin \frac{1}{2} \alpha^2} .$$

IX. Anwendung auf die Summirung der Reihen.

66. Es seyn y und Δy Functionen von x, wenn $\Delta x = 1$ gesetzt wird. Man bezeichne die Werthe der Function y, welche den Werthen $0, 1, 2, 3 \ldots x-1, x, x+1$, von x zugehören, durch $y,0$; $y,1$; $y,2$; $y,3 \ldots y,(x-1)$; y, x; $y,(x+1)$, wo x einen unbestimmten Werth der Functionalgröße, und y, x die dazu gehörige Function bedeutet. Die Differenzen der letztern bezeichne man durch $\Delta y,0$; $\Delta y,1$; $\Delta y,2$; . . . $\Delta y, x-1$; $\Delta y, x$; $\Delta y, x+1$; so daß

$$\begin{aligned}
y,1 - y,0 &= \Delta y,0 \\
y,2 - y,1 &= \Delta y,1 \\
y,3 - y,2 &= \Delta y,2 \\
&\vdots \\
y,(x-1) - y,(x-2) &= \Delta y,(x-2) \\
y, x \quad - y,(x-1) &= \Delta y,(x-1) \\
y,(x+1) - y, x \quad &= \Delta y, \quad x .
\end{aligned}$$

Hieraus erhellet, daß $y,(x+1)-y\,o$, die Gr
Differenzen von Δy, o bis Δy, x ist. Die Gr
ist eine Constans oder auch Null.

67. Eine Reihe von Größen, die durch eine
von x gegeben werden, zu summiren, sehe man di
ction als die Differenz einer andern Function vo
und suche diese, nach der vorher gegebenen Anleitu
solches möglich ist. In derselben setze man $x+1$
und dann auch $x=o$, so ist die gesuchte Summ
der Function von $(x+1)$, vermindert um die
die der Werth der Function für $x=o$ ist. Die
begreift die Glieder, deren Stellen o, 1, 2, 3
sind. Auf ähnliche Art findet man die Summe
der, deren erstes durch irgend einen bestimmten W
x bezeichnet wird.

68. Wenn die Reihe der durch y bezeichneten
eine durchgehends abnehmende ist, so sind die Di
negativ; oder wenn diese als positive betrachtet w
ist die summirende Function negativ. Nehmen je
the ohne Ende ab, so daß für ein unendliches x de
der Function $=o$ ist, so ist das Anfangsglied, y
$x=o$) die Summe aller Glieder der zu summire
gebenen Reihe, absolut genommen.

69. Die Summe der ganzen unendlichen abne
Reihe sey $=A$, die Summe der Glieder von der
Stelle o, bis zu dem in der Stelle x, sey Y, so ist
die Summe aller übrigen. Hieraus sieht man,
Negation der integrirenden Function bedeutet.
man die Differenz in einer abnehmenden Reihe
tiv an, so findet man eigentlich die Summe der Gli
dem in der Stelle x bis zu dem unendlich entfern
schwindenden. Nimmt man aber statt dieser
die von dem Anfangsgliede bis zu jenem in der
so findet man für diese den Werth $-Y$, welches
daß man die Summe Y von dem Anfangsgliede
hen habe, und die Summe der ganzen Reihe, nä
ist die Constans.

70. Die Function $y, (x+1)$, nenne man die summatorische Function zu der Function $\Delta y, x$. So kann jene Function als eine Summe angesehen wird, ist x eine Zahl, die sich auf $\Delta x = 1$ als ihre Einheit bezieht. Ist eine benannte Größe (Linie, Fläche, Zeit, u. m.), so ist Δx die Einheit zu dieser Gattung. Alsdann setze man $\frac{x}{x} = u$, oder behalte x als eine Zahlgröße, mit der Benennung ihrer Einheit, und verfahre eben so bey andern benannten Größen.

71. Die summatorische Function wird durch den vorgesetzten Buchstab S oder Σ bezeichnet, folgendergestalt $S.\Delta y$, oder $\Sigma.\Delta y$, wo Δy das Glied einer Reihe in der Stelle x ist, und durch eine Function von x gegeben wird.

72. Exempel. I. Die Summe der Cuborum der natürlichen Zahlen von 0 bis x zu finden. — Man setze $y = x^3$, so ist $y = \frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{2}x^3 + \frac{1}{4}x^2 = \frac{1}{4}x^2(x-1)^2$, (56.). Setzt man hier $x+1$ für x, so ist $S.x^3 = \frac{1}{4}(x+1)^2x^2$. Die Const. ist hier $= 0$.

Weil die integrirende Function die Summe bis zu dem Gliede $(x-1)^3$ giebt, so addire man zu jener noch das letzte Glied x^3, und es ist $S.x^3 = \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{2}x^3 + \frac{1}{4}x^2$.

73. Exempel. II. Die Summe der Biquadrate der natürlichen Zahlen von 0 bis x zu finden. — Man setze $\Delta y = x^4$, so ist $y = \frac{1}{5}x^5 - \frac{1}{2}x^4 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{30}x$, (57.). Setzt man in dieser Function $x+1$ für x, oder addirt x^4, so ist $S.x^4 = \frac{1}{5}x^5 + \frac{1}{2}x^4 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{30}x$.

oder $S.x^4 = \frac{1}{30}x(x+1)(2x+1)(3x^2+3x-1)$.

Vergl. arithm. Reihen höherer Ordn. S. 201.

74. Exempel. III. Die Summe der Producte, $1.2+2.3+3.4 \ldots +x(x+1)$, oder der doppelten Triangularzahlen zu finden. — In (58.) setze man $a=0$, und $m=1$, so daß $\Delta y = x(x+1)$ sey. Dadurch ist $y = \frac{1}{3}(x-1)x(x+1)$. Setzt man in dieser Function $x+1$ für x, so erhält man $S.x(x+1) = \frac{1}{3}x(x+1)(x+2)$. Dieser Werth wird $=1.2$ für $x=1$, wie es seyn muß, daher Const. $=0$ ist. Das durch $y,0$ in (66.) bezeichnete Glied ist hier $=0$, daher braucht man keine Constans, auch wenn man die Reihe mit $s.2$ für $x=1$, anfängt.

75. Exempel IV. Die Summe der Producte, $1.3+3.5 \ldots +(2x+1)(2x+3)$ zu finden. — In (58.) setze man $m=2$; $a=1$, so ist $\Delta y = (2x+1)(2x+3)$, und $y = \frac{1}{6}(2x-1)(2x+1)(2x+3)$. In dieser Function werde $x+1$ für x gesetzt, so ist $S.(2x+1)(2x+3) = \frac{1}{6}(2x+1) \times (2x+3)(2x+5) + \text{Const.}$ Für $x=0$ ist die Summe das erste Glied, 1.3; also ist $1.3 = \frac{1}{6}.1.3.5 + C.$ und Const. $= \frac{1}{2}$, so daß $S.(2x+1)(2x+3) = \frac{1}{6}(2x+1)(2x+3)(2x+5) + \frac{1}{2}$.

76. Exempel. V. Die Summe der Producte $1.2.3 + 2.3.4 + 3.4.5 \ldots + x(x+1)(x+2)$ $= \frac{1}{4}x(x+1)(x+2)(x+3)$.

77. Exempel. VI. Die Summe der Producte $1.4.7 + 4.7.10 \ldots + (3x+1)(3x+4)(3x+7)$ $= \frac{1}{12}(3x+1)(3x+4)(3x+7)(3x+10) - \frac{14}{3}$.

78. Exempel. VII. Die Summe der Quotienten $\frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \frac{1}{3.4} \ldots\ldots + \frac{1}{x(x+1)}$ ist $= \frac{x}{x+1}$. — Denn in (59.) setze man $m = 1$; $a = 0$, ist die integrirende Function $= -\frac{1}{x}$, und daher $\frac{1}{x(x+1)} = \text{Const.} - \frac{1}{x+1}$. Für $x = 1$ ist $\frac{1}{1.2} = \text{Const} - \frac{1}{2}$, also Const. $= 1$, und die Summe $= 1 - \frac{1}{x+1} = \frac{x}{x+1}$. Die Gränze, welcher sich die Summe immer mehr nähert, je größer x genommen wird, ist $= 1$, oder die Const. (s. 69.).

79. Die Summe der Quotienten $\frac{1}{1.2.3} + \frac{1}{2.3.4} + \frac{1}{3.4.5} + \ldots\ldots \frac{1}{x(x+1)(x+2)}$ ist $= \frac{1}{4} - \frac{1}{2(x+1)(x+2)}$. Die Gränze der Summe ist $= \frac{1}{4}$.

80. Die Reihe der Sinus der Vielfachen von dem Winkel α,

$$\sin\alpha + \sin 2\alpha + \sin 3\alpha \ldots\ldots + \sin n\alpha,$$

zu summiren, ſetze man $\sin n\alpha = \Delta y$. Aus (64.) iſt, wenn daſelbſt $\varphi = n\alpha$ geſetzt wird,

$$y = \frac{-\sin n\alpha + \sin(n-1)\alpha}{4\sin\frac{1}{2}\alpha^2}.$$

In dieſem Ausdruck ſetze man $(n+1)\alpha$ für $n\alpha$, weil hier $n\alpha$ für x in (66 u. 67.) ſteht. Nun iſt, mit Beyfügung der Conſtans, welches am bequemſten in dem Zähler des Bruches geſchieht,

$$\Sigma.\sin n\alpha = \frac{-\sin(n+1)\alpha + \sin n\alpha + \text{Conſt.}}{4\sin\frac{1}{2}\alpha^2}.$$

Für $n = 0$ iſt die Summe $= 0$, alſo Conſt. $= \sin\alpha$. Oder auch für $n = 1$ iſt die Summe $= \sin\alpha$. Alſo iſt $\frac{-\sin 2\alpha + \sin\alpha + \text{Conſt.}}{4\sin\frac{1}{2}\alpha^2} = \sin\alpha$, oder

$$C + \sin\alpha - 2\sin\alpha.\cos\alpha = 2(1-\cos\alpha)\sin\alpha,$$

welches ebenfalls $C = \sin\alpha$ giebt. Solchergeſtalt iſt

$$\Sigma.\sin n\alpha = \frac{\sin\alpha + \sin n\alpha - \sin(n+1)\alpha}{4\sin\frac{1}{2}\alpha^2}.$$

Da $\sin(n+1)\alpha - \sin n\alpha = 2\cos(n+\frac{1}{2})\alpha.\sin\frac{1}{2}x$, und $\sin\alpha = 2\cos\frac{1}{2}\alpha\sin\frac{1}{2}\alpha$ iſt, ſo iſt der Zähler dieſes Bruchs $= 2(\cos\frac{1}{2}\alpha - \cos)(n+\frac{1}{2})\alpha$ ($\sin\frac{1}{2}\alpha = 4\sin\frac{1}{2}(n+1)\alpha.\sin\frac{1}{2}n\alpha.\sin\frac{1}{2}\alpha$, alſo

$$\Sigma.\sin n\alpha = \frac{\sin\frac{1}{2}(n+1)\alpha.\sin\frac{1}{2}n\alpha}{\sin\frac{1}{2}\alpha}.$$

81. Die Reihe der Coſinus der Vielfachen von α,

$$\cos\alpha + \cos 2\alpha + \cos 3\alpha \ldots + \cos n\alpha,$$

zu ſummiren, ſetze man $\cos n\alpha = \Delta y$, ſo iſt aus (65.)

$$y = \frac{\cos(n-1)\alpha - \cos n\alpha}{4\sin\frac{1}{2}\alpha^2}.$$

Daraus iſt, auf ähnliche Art, wie für die Sinus,

$$\Sigma.\cos n\alpha = \frac{-1 + \cos\alpha + \cos n\alpha - \cos(n+1)\alpha}{4\sin\frac{1}{2}\alpha^2}.$$

Verwandelt man den Zähler in ein Product, ſo iſt derſelbe zuerſt $= 2(\sin(n+\frac{1}{2})\alpha - \sin\frac{1}{2}\alpha)\sin\frac{1}{2}\alpha$; und ferner $= 4\cos\frac{1}{2}(n+1)\alpha.\sin\frac{1}{2}n\alpha.\sin\frac{1}{2}\alpha$.

Also ist

$$\Sigma . \cos n\alpha = \frac{\cos \frac{1}{2}(n+1)\alpha . \sin \frac{1}{2} n\alpha}{\sin \frac{1}{2}\alpha}.$$

X. Geschichte der Differenzenrechnung.

In der methodischen Anordnung der mathematischen ersuchungen muß die Differenzenrechnung vor der fferentialrechnung vorangehen. Die letztere ist aber her bearbeitet worden als jene. Die geometrischen gen über berührende der Curven, ihre Quadraturen, baturen, Rectificationen, größte und kleinste Ordina-, u. m. führten auf verschwindende Differenzen. Diese agen waren im 17ten Jahrhundert die interessantesten. twickelungen einer Function durch Potenzen der Ver-derung der Functionalgröße setzen schon höhere analyti-Untersuchungen voraus, um Bedürfniß zu werden. mmirungen von Reihen bewerkstelligte man auf diese r jene Art, ohne auf den leichtesten Weg, durch Be-chtung der Differenzen, zu gerathen. Inzwischen hat bnitz mit systematischem Scharfsinn sich den Weg zur fferentialrechnung durch die endlichen Differenzen ge-nt. In einem Briefe an den Abbé Conti erzählt er, er anfangs die Mathematik nur als Nebensache ge-ben, und sich um manche in der Zeit seiner Jugend rkwürdige neue Untersuchungen nicht bekümmert habe. er die Eigenschaften der Zahlen zu entdecken, habe ihm rgnügen gemacht, wie seine frühzeitige Abhandlung über Combinationen vom J. 1666 bezeuge. Bald habe die Anwendung der Differenzen auf Summirungen ge-den, und sie bey Zahlenreihen gebraucht. Weiterhin er endlich auf seine Differentialrechnung gekommen, bey ihm insbesondere seine frühern Bemerkungen über Unterschiede der Zahlenreihen die Augen geöffnet hätten. enn nicht durch die Fluxionen der Linien, sondern durch Unterschiede der Zahlen sey er dazu gelangt, vermittelst r Bemerkung, daß diese Unterschiede auf stetige Grö-nreihen angewandt, verschwinden, in Vergleichung der

Größen, wovon sie die Unterschiede sind, dagegen si den Zahlenreihen als eigentliche Größen bleiben. Ich gl setzt er hinzu, daß dieser Weg ganz analytisch ist, d geometrische Differenzenrechnung, welche mit der Fl nenrechnung einerley ist, nur einen besondern Fall der gemeinen analytischen Differenzenrechnung ausmacht durch die verschwindenden Größen leichter wird, al mit endlichen Differenzen.

Die Verbindung zwischen der endlichen Differe rechnung und der Differentialrechnung kann nicht besse gestellt werden, als es hier von Leibnitz schon geschehe Man erkennt daraus seinen scharfen spähenden Bli unbekannte Gegenden der Wissenschaft, und erhält einen hinreichenden Beweis, daß er die Differentia nung durch sich selbst gefunden habe.

Newtons Methodus differentialis, die 171 erst gedruckt worden, enthält, wie oben S. 216 ang ist, nur Methoden zum Einschalten, mittelst der su ven Differenzen gegebener Glieder einer Reihe. Die Schrift, worin die Differenzenrechnung auf eine der I rentialrechnung analoge Art abgehandelt, und mit die Verbindung gebracht ist, ist Methodus incrementorum recta et inversa, auctore *Brook Taylor*. Londini 118 pag. 4, in zwey Abtheilungen, von welchen die z die Auflösungen wichtiger mathematischer und physikal Aufgaben, größtentheils aber durch Infinitesimalrech enthält. Die Notation ist unbequem. Die Differ werden durch Puncte oder kleine Buchstaben, als Za chen, unter den Symbolen der veränderlichen Größe gedeutet. Die Anzahl der Puncte oder der Buchsta gen die Ordnung der Differenz an, eine Nachahmung Newtons Bezeichnung der Differentiale, nach w Puncte über den Symbolen der veränderlichen Gr Differentiale andeuten. Durch Strichelchen über unter den Buchstabenzeichen werden die auf einande gehenden Glieder einer Reihe angegeben. Der Vortr dieser Schrift ist durch Bezeichnung und Kürze nicht l faßlich. Doch ist sie wegen der neuen Methode

verth, daß man sie durchgehe, wenn man mit den Materien schon bekannt ist. Die Formel in (16.) für die Entwickelung der Function, $f(x+u)$, ist darin der 7te Satz. Sie ist daselbst aus denselben Gründen, wie hier geschehen ist, hergeleitet, nämlich aus der Formation einer arithmetischen Reihe irgend einer Ordnung durch die Anfangsglieder der Differenzreihen. Taylor nimmt nur die Stellenzahl des entwickelten Gliedes für eine ganze. Die richtige Formel in (17.) ist bey Taylor das zweyte Corollarium des 7ten Satzes. Er findet sie unmittelbar dadurch, daß er die Incremente als verschwindend betrachtet, und nun für sie die ihnen proportionalen Fluxionen (Differentiale) setzt. Dadurch werden in unserer Formel die Factoren u, $u-\Delta u$, $u-2\Delta u$, $u-3\Delta u$ etc. sich alle gleich, jeder $=u$, und die Coefficienten P, Q, R, etc. werden Differentialquotienten der successiven Ordnungen, $\frac{\partial y}{\partial x}$, $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^3 y}{\partial x^3}$ etc. so daß der Satz bey Taylor die jetzt gewöhnliche Form, bis auf die Bezeichnungsart, hat. In dem 11ten Satze sind zwey Integrationsformeln für $\int y\,\partial x$ enthalten, die mit der Entwickelungsformel nichts gemein haben, als die Fortschreitung nach den successiven Differentialquotienten. Sie sind allgemeiner als eine ihnen ähnliche, welche Joh. Bernoulli schon im J. 1694 bekannt machte, und sie als die allgemeinste in ihrer Art angab. Denn in der Taylorschen Form läßt sich das constante Differential so wählen, daß die successiven Differentiationen möglichst einfach ausfallen, da in der Bernoullischen Form das constante Differential ein bestimmtes ist. Davon aber noch in den Integrationsmethoden. Die Formel wird in dem 12ten Satze noch auf Integrale höherer Ordnungen erweitert. In dem 13ten Satze, dem ersten der zweyten Abtheilung, wird gezeigt, wie aus einigen gleich weit abstehenden Gliedern einer Reihe ein anderes Glied durch seinen Abstand von einem der beiden äußersten Gliedern annähernd gefunden werde; in dem 14ten Satze, wie die Summe der Glieder aus dem

Geſetze der Formation hergeleitet wird, wenn es möglich iſt. Dazu iſt in der erſten Abtheilung durch Bemerkungen über die umgekehrte Differenzenrechnung Vorbereitung gemacht. Taylor lieferte darüber noch Nachträge in den engliſchen Tranſactionen. Die übrigen Sätze enthalten Anwendungen der Infiniteſimal Differenzen.

Bald nach ihrer Erſcheinung fand die Tayloriſche Schrift einen Commentator an Nicole, der in den Mém. de l' Acad. des Sc. 1717, 1723 und 1724, die Methode und ihre Anwendungen ſehr gut erläuterte, allein nicht über die erſten Differenzen hinausgieng. Er zeigt, wie Reihen, deren Glieder Producte aus Factoren in arithmetiſcher Progreſſion ſind, ſummirt werden; auch, wie die Summe von Brüchen gefunden wird, deren Nenner zweytheilige Factoren von einer gewiſſen Form enthalten.

Jacob Stirling handelte die Differenzenrechnung ausführlich ab in der Schrift: Methodus differentialis: ſive tractatus de ſummatione et interpolatione ſerierum infinitarum, Londini 1730, 153 pag. in 4. Es kommen darin feine und ſchwere Unterſuchungen über die Summirung und ſolche Verwandlungen der Reihen vor, wodurch ſie ſchneller convergirend gemacht werden. Merkwürdig ſind die Methoden, aus der Relation der Differenzen das ſummatoriſche Glied in Geſtalt einer unendlichen Reihe zu liefern, deren Glieder Brüche mit Factoren in arithmetiſcher Progreſſion im Nenner ſind. Auch zeigt Stirling, wie man, nachdem das ſummatoriſche Glied nahe gefunden iſt, eine Ergänzung wiederum nahe, und zu dieſer wieder eine Ergänzung fortſchreitend finden könne.

Euler hat in den beiden erſten Kapiteln ſeiner Differentialrechnung (1755) die Rechnung mit endlichen Differenzen ſehr lichtvoll vorgetragen. Er iſt der erſte, der die umgekehrte Methode der Differenzen ausführlich behandelte, wiewohl er doch bey Formeln mit einer veränderlichen Gröſſe ſtehen blieb. Er macht den Übergang zu der Differentialrechnung mit der Bemerkung, daß die Analyſis des Unendlichen nur ein beſonderer Fall der Methode der Differenzen ſey. Nur läßt er dadurch eine Dunkelheit oder giebt

Veranlassung zu Schwierigkeiten, daß er für die endlichen Differenzen unendlich kleine oder dem Nichts gleiche Veränderungen setzt.

Unter den Engländern hat noch Emerson, Verfasser vieler mathematischen Lehrbücher, im J. 1763 eine Schrift über die Differenzenrechnung (the method of Increments) herausgegeben, welche Hutton und la Lande sehr rühmen.

Bossüt hat in der Encyclopédie méthodique, diese Rechnung sehr deutlich in dem Artikel différences finies, vorgetragen, und hernach noch ausführlicher in der Einleitung zu seinen traités de Calcul différentiel et integral, à Paris, an VI. Auch hat Cousin in seinem traité de calcul différentiel et intégral (à Paris an IV. 1796. in 4.) in der Einleitung, Cap. 3. eine sehr gute nur kurze Übersicht dieser Lehre gegeben, und zu Ende des Werks höhere Untersuchungen über die Integration der Gleichungen mit endlichen Differenzen mitgetheilt.

In den deutschen Lehrbüchern der Mathematik ist die Untersuchung über die endlichen Differenzen der Functionen fast ganz vernachlässigt. Etwas findet man in Segners elementis Analyseos infinit. sect. 13, und 20. und in Pasquichs mathemat. Analysis, 11. Th. 16ten Abschn. Segner macht dadurch eine Verwirrung, daß er eine Formel mit endlichen vollständigen Differenzen eine aequatio differentialis completa nennt, und die Differentialgleichungen als die unvollständigsten ansieht.

Zu diesen literarischen Bemerkungen füge ich noch die Nachrichten von den neuesten Bemühungen der französischen Analysten aus Montucla Geschichte der Mathem. 2 Th. 256. f. S. bey.

Die schwere Theorie der Integration von Gleichungen mit endlichen Differenzen zwischen mehrern veränderlichen Größen, die selbst Euler unberührt gelassen hat, ist von le Grange in dem ersten Bande der Turiner Abhandlungen (1759) vorgenommen worden. Er behandelt sie auf eine ähnliche Art wie die Differentialgleichungen dieser Gattung

und gelangt dadurch zu Integrationen endlicher Differenzen, die bis dahin auf keine Weise zu erhalten gewesen waren.

Condorcet unternahm über diese Differenzengleichungen eine ähnliche Bearbeitung, wie es von ihm mit den Differentialgleichungen geschehen war. In den Memoiren der Akademie vom J. 1770 lieferte er die Bedingungsgleichungen, welche zu erkennen geben, ob eine Gleichung mit endlichen Differenzen aus einer um einen Grad unmittelbar niedrigern entstanden seyn könne, und dann, wenn dieses möglich ist, sucht er die Mittel, diese Gleichung aus jener herzuleiten, wovon er auch einige Beyspiele beyfügt. Eine weitere Ausführung seiner Theorie theilte er in dem Jahrgange für 1771 mit. Freylich hat die Entdeckung jener Gleichung große Schwierigkeit, eben so wie in der eigentlichen Integralrechnung. Wenn man sieht, wie sehr verwickelte Differenzengleichungen auf die integrirenden gebracht werden, so möchte man fast glauben, daß diese schon zum voraus bekannt gewesen seyn. Viele Leser werden wünschen, daß Condorcet sein Verfahren deutlicher und ausführlicher entwickelt hätte. Aber er scheint nur für seines gleichen haben schreiben zu wollen.

Eine neue Erweiterung erhielt diese Rechnung durch la Place in zwey Abhandlungen, die in den Mém. présentés, T. 6. et. 7. enthalten sind. Darauf lieferte dieser große Analyst noch eine lange Abhandlung in den Memoiren der Akad. von 1773, über die linearischen Gleichungen mit endlichen Differenzen, worin die Frage ist, bey einer gegebenen linearischen Gleichung mit endlichen Differenzen, erstlich zu bestimmen, ob für sie ein Integral von einer gegebenen Form möglich sey, zweytens in dem Falle der Möglichkeit die Einrichtung so zu treffen, daß sie nach den Methoden bey Differentialgleichungen integrirt werden könne; bey welcher Gelegenheit eine Methode, die Euler angewandt hat, eine Differenz der zweyten Ordnung auf eine von der ersten zu bringen, erweitert und vollkommner gemacht wird. La Place zeigt zu

eich den groſsen Nutzen der Rechnung mit endlichen Differenzen in der Verbindung mit den partiellen Differentialen, da die Bestimmung der willkührlichen Functionen oft von der Integration der erstern abhängt.

Diesen wichtigen, aber schweren Abhandlungen mag man noch eine beyfügen, welche Charles im J. 1783 der Akademie der Wissenschaften übergab. Man muſs bedauern, daſs ihr Verfasser so frühzeitig durch den Tod hinweggerafft ist.

Differentiale sind die Glieder des Verhältnisses der Veränderungen zweyer oder mehrerer zusammengehörigen Gröſsen, so fern dieses Verhältniſs nicht von der Quantität der Veränderungen, sondern bloſs von den veränderlichen Gröſsen abhängt. Nämlich, wenn zwischen zwey Gröſsen, x, y, irgend eine Relation festgesetzt ist, und diese Gröſsen um Δx und Δy sich verändern, so bleibt die Relation zwischen $x + \Delta x$ und $y + \Delta y$ dieselbe wie zwischen x und y, und das Verhältniſs $\Delta x : \Delta y$ hängt theils von dieser Relation, theils von der willkührlich zu bestimmenden Quantität der Veränderungen ab. Betrachtet man das Verhältniſs der Veränderungen von x und y nur bloſs in Rücksicht auf die Bestimmung durch die Relation zwischen diesen Gröſsen, so ist es ein **Differentialverhältniſs**, und die Glieder desselben heiſsen **Differentiale**. So heiſst auch der Theil des Quotienten $\frac{\Delta y}{\Delta x}$, der von der Quantität der Veränderungen unabhängig ist, ein **Differentialquotient**. Das Differentialverhältniſs für die Gröſsen x, y wird bezeichnet durch $\partial x : \partial y$, und der Differentialquotient durch $\frac{\partial y}{\partial x}$ oder $\frac{\partial x}{\partial y}$.

Es ist nöthig, das Differentialzeichen durch eine besondere Form des Buchstabens von dem Gröſsenzeichen zu unterscheiden. In Frankreich, und in den neuern Abhandlungen der Petersburger Akademie, hat man dies angefangen,

und in dieſem Wörterbuche wird das Differentialzeichen durch das gebogene ∂ ausgedruckt werden. Bis faſt hierher iſt in dieſem Werke dafür das curſive *d* gebraucht.

Ein paar leichte Beyſpiele werden dieſes ganz deutlich machen. Es ſey $yy = ax$, die einfachſte Gleichung für die Parabel. Nun iſt auch $(y+\Delta y)^2 = a(x+\Delta x)$. Zieht man jene Gleichung von dieſer ab, ſo bleibt . . . $2y\Delta y + \Delta y^2 = a\Delta x$. (Wegen der Bezeichnung der Differenzen oder Veränderungen, ſehe man den Artikel Differenz). Nun iſt $\Delta x : \Delta y = 2y + \Delta y : a$. Das Verhältniß der Veränderungen hängt alſo theils von y, theils von Δy ab. Betrachten wir das Verhältniß, ſo fern es von y allein, und nicht zugleich von der Quantität, die man der Veränderung Δy giebt, abhängt, ſo iſt es $= 2y : a$, und dieſes wird zum Unterſchiede von jenem durch $\partial x : \partial y$ bezeichnet, ſo daß $\partial x : \partial y = 2y : a$ iſt.

Es ſey $2ax - xx = yy$, die Gleichung für den Kreis, ſo iſt $2a(x+\Delta x) - (x+\Delta x)^2 = (y+\Delta y)^2$. Daraus iſt $2a\Delta x - 2x\Delta x - \Delta x^2 = 2y\Delta y + \Delta y^2$, und

$$\Delta x : \Delta y = 2y + \Delta y : 2a - 2x - \Delta x.$$

Das Differentialverhältniß iſt

$$\partial x : \partial y = y : a - x.$$

In beiden Beyſpielen kann ∂x gegen ∂y unvergleichbar klein werden, wenn nämlich $y = o$ geſetzt wird, in dem Anfangspuncte der Curve. Am Kreiſe iſt ∂y gegen ∂x unvergleichbar klein, wenn $x = a$ genommen wird, wodurch $y = a$ wird.

Die Differentialverhältniſſe ſind von dem wichtigſten und ausgebreiteſten Nutzen. Denn ſie ſind charakteriſtiſch für die Relation der veränderlichen Größen, eben daher weil ſie nicht von der willkührlichen Quantität der Veränderungen abhangen. Die Relation der Größen beſtimmt ganz allein das für ſie gehörige Differentialverhältniß, und dieſes hinwiederum jene, bis auf die unveränderliche Größe, welche noch in die Gleichung zwiſchen

n Größen einzuführen seyn mag, eben so wie bey der Be-
immung derselben aus den endlichen Differenzen.

Dieses auf die allgemeinste Art vollkommen einzusehen,
ient die in dem Artikel Differenzenrechnung (17.) gefundene
ormel für die endliche Veränderung einer Function von x,
enn x sich um die Größe u ändert. Es ist $f(x+u) - fx = pu + \frac{1}{2}qu^2 + \frac{1}{6}ru^3 + \frac{1}{24}su^4 + \text{etc.}$

)er erste Theil der Gleichung bezeichnet die Veränderung
er Function, der zweyte stellt ihren Werth durch die Ver-
nderung u der Functionalgröße x dar. Man setze
$x = y$, und $u = \Delta x$, so ist $\frac{\Delta y}{\Delta x} = p + \frac{1}{2}q\Delta x$
$+ \frac{1}{6}r\Delta x^2 + \frac{1}{24}s\Delta x^3 + \text{etc.}$ und p, als der von
ıx, und dadurch auch von Δy, unabhängige Theil des
Quotienten der Veränderungen, ist der Differentialquo-
ient für die Function von x in Beziehung auf x.
Nun ist eben so q der Differentialquotient für die
Function p; ferner r der Differentialquotient für die
Function q, u. s. f. (a. a. O. 18.) Demnach sind
urch p die Functionen q, r, s, etc. bestimmt, und
adurch der Quotient der Differenzen Δy, Δx,
nd dadurch für jedes $x + \Delta x$ die zugehörige Verän-
erung $y + \Delta y$ $y + \Delta y$. Folglich erhellt, wie die Fun-
tion p charakteristisch ist für die Function von x, oder sie
ollkommen, bis auf die Constante, welche allen Werthen
er Function gemein ist, bestimme.

Diese Function p ist es, welche durch das Symbol
ines Quotienten $\frac{\partial y}{\partial x}$ bezeichnet wird, so daß $\partial x : \partial y =$
1 : p ist. Die Größenzeichen x, y zeigen die zusammen-
gehörigen veränderlichen Größen an, von welchen y ir-
gend eine Function der andern x ist. Das vorge-

Buchstabenzeichen ∂ giebt bloß den Ursprung der Function $p = \frac{\partial y}{\partial x}$ zu erkennen, daß sie der wesentliche und charakteristische Theil des Quotienten $\frac{\Delta y}{\Delta x}$, der endlichen Veränderungen von x und y, ist.

Die Formel $p = \frac{\partial y}{\partial x}$ ist keine abgekürzte. Was aus der Formel für die endlichen Differenzen weggelassen wird, wird nicht als Null, oder als unendlich klein, oder als unvergleichbar klein betrachtet, sondern es wird weggelassen, weil es gar nicht zu demjenigen gehört, was man durch das Symbol $\frac{\partial y}{\partial x}$ bezeichnet. Es gehört zu der Bestimmung der Quantität der Veränderungen, von welcher in der Differentialrechnung so wenig die Frage ist, daß man vielmehr sorgfältig zu verhüten hat, sie als eine Rechnung über Quantität der Veränderungen oder Unterschiede betrachten zu lassen. Es ist hier ein ganz anderer Fall, als bey abgekürzten Formeln und Gleichungen. In solchen gehört das weggelassene wesentlich zu einer Größe, oder zu ihrer Relation gegen andere, allein es hat, unter gewissen Bedingungen keinen erheblichen Einfluß auf die Bestimmung ihrer Quantität, und wird bloß als minder wesentlich weggelassen. Um allen Mißverstand zu verhüten, sage man nicht, $\frac{\partial y}{\partial x}$ ist gleich einer gewissen Function von x und y, sondern, $\frac{\partial y}{\partial x}$ zeigt eine Function von x und y an. Jenes kann die Vorstellung von einer besondern Größe erwecken, die in der Form noch von der Function unterschieden, und auf irgend eine andere Art gegeben oder angenommen wäre.

Die Symbole ∂x: ∂y heißen die **Differentiale** von x und y; allein man muß sie durchaus nicht als Größen betrachten, so klein man diese sich auch vorstellen möch-

e. Denn dadurch ſetzt man eine Näherungsgleichung ſtatt der genauen und vollſtändigen, welche noch die Po-nzen von Δx enthält.

Darum ſollte man genauer Weiſe im Singulari nicht gen, das Differential, weil dieſes eine Quantität auf ver-eckte Art in ſich ſchließt. Ein Differential bezieht ſich mmer als Verhältnißglied auf ein anderes Differential. Inzwiſchen iſt es zur Bequemlichkeit des Ausdrucks wohl rgönnt, durch Differential im Singulari eines der Glie-r eines Differentialverhältniſſes zu bezeichnen, eben wie die Differentiale ihre einzelnen Symbole ha-en. Man kann nur nicht, wie bey endlichen be-immbaren Größen, die Differentiale auf zweyerley Art usdrücken, einmahl durch die ihnen beygelegte Quantität, as iſt, durch ihr Verhältniß zur Einheit oder einer andern egebenen Größe, und dann noch durch die ihnen proportio-alen Größen, die ihr Verhältniß angeben.

Die Differentiale kann man auch nicht als Null be-rachten, weil ſie dadurch aufhören, Differenzen zu ſeyn, nd weil es auch nicht begreiflich iſt, wie eine Null ſich it einer andern Null vergleichen laſſe. Ein Differen-ial iſt oft in Vergleichung mit einem andern Null, wie ben in den Beyſpielen von der Parabel und dem Kreiſe ngemerkt iſt. Das Differential einer Function, deren Berth ein Größtes oder Kleinſtes iſt, iſt für dieſen Werth enau Null in Vergleichung mit dem Differential der Fun-tionalgröße. Es gäbe alſo ein Null, das mehr Null äre, als ein anderes Null es iſt.

Um die Schwierigkeit, wie Differentiale weder etwas och Null ſeyn können, zu löſen, gehe man auf den Ur-prung derſelben zurück. Es ſoll $\frac{\partial y}{\partial x}$ den charakteriſti-chen Theils p des Quotienten $\frac{\Delta y}{\Delta x}$, der Veränderun-en von y und x, bedeuten. Sollen ∂y und ∂x nicht loße Buchſtabenzeichen zur Bezeichnung des Urſprungs

der Function p seyn, so sind es keine Veränderungen der Größen x und y, sondern zwey zusammengehörige Größen, die mit jenen in eine gewisse Verbindung gebracht werden, wie die Coordinaten der eine Curve berührenden geraden mit den Coordinaten der krummen Linie. Die Quantität dieser nebenher eingeführten Größen bleibt willkührlich; nur ihr Verhältniß ist durch die Function p bestimmt. Oder man setze, da p eine bloße Zahlgröße ist, $px = t$, so ist das Verhältniß $t : x$ gleich dem $\partial y : \partial x$, und man kann für die Differentiale die endlichen, ihnen proportionalen, t, x, nehmen. Neben den beiden entgegengesetzten Begriffen, Etwas und Nichts, giebt es noch einen Begriff, nämlich verhältnißmäßige Größen. Dieses wird durch die folgenden Betrachtungen noch deutlicher werden.

Aus der Formel für die endlichen Differenzen, . . $\frac{\Delta y}{\Delta x} = p + \frac{1}{2} q \Delta x + \frac{1}{6} r \Delta x^2 + \text{etc.}$ erhellt, daß p die Gränze ist, welcher sich der Quotient der Differenzen immer mehr nähert, je kleiner sie genommen werden. Daher kann man Differentiale für die Glieder eines Gränzverhältnisses erklären, welchem sich das Verhältniß endlicher Veränderungen ohne Ende nähert. Diese Vorstellung ist in den neuern Zeiten die gewöhnlichste geworden. Doch mag es Schwierigkeit verursachen, sich ein Verhältniß verschiedener Größen vorzustellen, die weder Null noch Etwas seyn sollen. Man könnte auch an der Realität des Begriffs selbst zweifeln, weil man das Verhältniß nie erreichen zu können glauben möchte. Allein unsere Formel zeigt uns den Differentialquotienten p als einen ganz bestimmten Begriff. Man muß sich denselben nicht als einen terminum ad quem, den man nie ergreifen kann, sondern vielmehr als einen terminum a quo vorstellen. In der That hängen alle nach p folgende Theile des Differenzquotienten von p ab, und sind dadurch, wenn nämlich Δx bestimmt ist, gegeben. Bricht die Reihe der Functionen q, r, s, t, etc. nicht ab, so ist es der Quotient der endlichen Differenzen, welcher nie vollständig zu er-

alten ſteht, dem man ſich nur nähern kann, dagegen der Differentialquotient durch p vollſtändig dargeſtellt wird.

Die Differentiale darf man ſich auch als unendlich kleine Unterſchiede vorſtellen, und muß es ſelbſt, wo man ſich eine ſtetige Folge veränderlicher Größen gedenkt. Zwiſchen zwey Werthen einer Größe ſind unendlich viele Mittelwerthe gedenkbar. In einer ununterbrochenen Folge veränderlicher Größen, die nach irgend einem Geſetze aus einer oder mehrern andern Größen beſtimmt werden, muß man ſich nicht bloß viele, ſondern unendlich viele Glieder vorſtellen. Denn zwiſchen noch ſo vielen Gliedern der Folge laſſen ſich immer mehrere einſchieben. Es iſt keine Gränze des Einſchaltens vorhanden; die Reihe iſt eine ſtetige oder continuirliche. Der Unterſchied zwiſchen zwey nächſten Gliedern der ſtetigen Reihe iſt keine endliche, mit einer Einheit vergleichbare Größe, weil dabey die Reihe nicht eine ſtetige wäre. Die Succeſſion in der ſtetigen Reihe führt aber doch auf einen Unterſchied der unmittelbar auf einander folgenden Glieder. Dieſer Unterſchied muß alſo unendlich klein genannt werden. Man nenne ihn aber, um Mißverſtand zu vermeiden, nicht eine Größe, ſondern nur etwas unendlich kleines, das bloß mit einem andern von derſelben Beſchaffenheit verglichen werden kann. Wir haben hier einen reinen Verſtandesbegriff, der ſich nicht ſinnlich darſtellen läßt, aber doch intellectuelle Realität hat. Die Differentiale ſind die, bloß unter ſich vergleichbaren Unterſchiede der unmittelbar aufeinander folgenden Glieder einer ſtetigen Reihe. Wie ſolche Unterſchiede gedacht und verglichen werden können, zeigt unſere Differenzenformel ſehr deutlich. Man kann in derſelben $\Delta x = o$ ſetzen, und es bleibt doch p für den Quotienten der Unterſchiede, die alſo die unendlich kleinen in der ſtetigen Folge ſind.

Die genaue und völlig einleuchtende Beſtimmung des Begriffs der Differentiale, was man in Frankreich la Métaphyſique du Calcul différentiel nennt, hat von Anfang an Schwierigkeit gemacht. Man rechtfertigte

die Weglaſſung der Potenzen der Differenciale dadurch, daß dieſe unendlich kleine Größen ſeyn, ohne doch zu zeigen, wie dieſes Mittelding zwiſchen Null und Etwas gedenkbar ſey, und wie man die Theilbarkeit und Vermehrbarkeit einer Größe, darauf anwenden könne. Darum verfaßte Maclaurin ein ausführliches, ſehr tiefſinniges Werk, (A treatiſe of Fluxions, 1742. 2 vol. in 4.) worin er die Vorſtellung von unendlich kleinen Größen ganz vermied, und nach der Methode der alten Geometer alle Sätze aus unbezweifelbaren Axiomen herleitete. Dieſes Verfahren wird aber durch Weitläufigkeit beſchwerlich. Die Berliner Akademie der Wiſſenſchaften fand es noch im J. 1784 nöthig, eine deutliche und genau beſtimmte Theorie des in der Mathematik ſo genannten Unendlichen zu einer Preisaufgabe zu machen. Sie verlangte, man ſollte zeigen, wie es möglich geweſen, aus einem Begriffe, den große Analyſten für unſtatthaft erklärt hätten, ſo viele richtige Lehrſätze herzuleiten; und wünſchte, daß man ein ſicheres, einleuchtendes Princip angeben möchte, das in die Stelle des Unendlichen geſetzt werden könnte, ohne die Unterſuchungen zu lang und beſchwerlich zu machen. L'Huilier in Genf erhielt den Preis. Die zweyte, vermehrte und verbeſſerte Ausgabe ſeiner Preisſchrift iſt unter dem Titel: Principiorum calculi differentialis et integralis expoſitio elementaris, 1795, (368 S. 4.) herausgekommen. Es liegt darin der Begriff vom Gränzverhältniſſe zum Grunde. Dieſe Schrift iſt durch die Anwendungen der Infiniteſimalrechnung ſehr lehrreich.

Leibnitz, ſo ſehr er Philoſoph war, ſcheint doch nicht mit dem Begriff von Differentialen ganz aufs Reine gekommen zu ſeyn, oder wenigſtens bedient er ſich ſolcher Ausdrücke, die Erklärungen oder Einſchränkungen bedürfen. In der Abhandlung, nova methodus pro maximis et minimis, etc. Acta Erud. Octobr. 1684, der erſten über die Differentialrechnung erſchienenen, ſagt er, man möge die Differentiale ∂x, ∂y den Differenzen oder augenblicklichen Zunahmen oder Abnahmen für proportional halten, erklärt aber nicht, was dieſe incrementa vel

crementa momentanea seyn. In dem Aufsatze de otnum coelestium causis, A. E. 1689 gebraucht ibnitz unendlich kleine Größen. Wenn man, sagt er, iendlich kleine Größen anzunehmen Bedenken trüge, so öchte man so kleine Größen, als man nur wolle, dafür zen, nur so klein, daß der daraus entspringende Fehler ibedeutend, ja kleiner als jeder angebbare sey Die Unrschiede unendlich kleiner Größen, setzt er hinzu, sind iendlichemahl unendlich klein, wie z. B. der Sinus vers s eines unendlich kleinen Winkels. Es gebe unendlich ele Grade, sowohl des unendlich Großen, als des unendh Kleinen. In der Observatio de vero sensu méiodi infinitesimalis, A. E. 1712 vergleicht er das ndliche, das unendlich Große, und das unendlichemahl nendliche mit dem Durchmesser eines Sandkörnchens, r Erde und des Sternhimmels, und umgekehrt eben so is Endliche, das unendlich Kleine und das unendlichemahl unendlich Kleine. Doch bemerkt er, daß wenn man letzt mit einem Sprunge das Unendliche selbst für solche rößen setze, man dadurch nur die Bequemlichkeit des usdrucks beabsichtige, ein breviloquium mentale; on nisi *toleranter vera* loquimur, quae explicatione rigidantur. In einer gegen Nieuwentyt gerichteten chrift (A. E. 1695) sagt Leibnitz, daß er auch diejenin Größen für gleich halte, deren Unterschied unendlich ein ist, und wenn ein solcher Unterschied zwar nicht ganz ull gesetzt werden könne, so sey er doch mit den Größen, ozu er gehört, nicht vergleichbar, wie wenn man einen unct zu einer Linie oder eine Linie zu einer Fläche addire as sind aber nicht homogene Dinge, wie Differentiale nd die zugehörigen endlichen Größen). Nicht bloß die nendlich kleinen Linien, wie ∂x, ∂y, nimmt er als ahre Größen an, sondern auch ihre Producte und Poenzen. In einem Briefe an Wallis vom J. 1698 sagt eibnitz, daß es besser seyn möchte, die Elemente oder auenblicklichen Differentiale für Größen als für Nichts zu alten. Denn sie hätten selbst wieder ihre Unterschiede, nd könnten durch angebbare, ihnen proportionale Linien

dargeſtellt werden. Es ſey unbegreiflich, oder verurſac
wenigſtens unnöthige Dunkelheit, wenn man das v
ihm ſogenannte charakteriſtiſche Dreyeck einem angebbar
Dreyeck als ähnlich annehme, wie Wallis es thue, u
es doch auch für Nichts erkläre, ſo daß man nur die Fo
eines Dreyecks ohne Quantität behalte. Ohne Quanti
laſſe ſich eine Figur nicht gedenken. Man könne ſich
das Dreyeck immer kleiner und kleiner vorſtellen, ſo
man zwey concentriſche Kreisbogen immer kleiner mach
kann, wobey ſie aber immer ungleich, und es ſelbſt
Verſchwinden bleiben. In einem Briefe an Tournem
vom J. 1714 ſagt Leibnitz, die Infiniteſimalgrößen
nicht Null, auch nicht in der Schärfe unendlich kle
ſondern unvergleichbar oder indéfiniment kleine Größ

Newton iſt hierin befriedigender und philoſophiſch
wenn er gleich die Gründe ſeiner Rechnung nur kurz
klärt. Was Leibnitz Differentiale nennt, nennt er M
mente. Dieſe druckt er durch Producte aus einer zue
als endlich betrachteten kleinen Größe in einen endlich
Factor aus. Jene kleine Größe bezeichnet er durch
den Factor nennt er die Fluxion der veränderlich
Größe, der Fluente. In der Differenzengleichung
dieſe *o* in allen Gliedern vorhanden. Wird die Gl
chung durch *o* dividirt, ſo bleibt *o* bloß in denen Gl
dern, die vorher das Quadrat und höhere Potenzen von
enthielten. Wird *o* unendlich klein geſetzt, ſo bleib
bloß die Glieder, die zuerſt die Momente in der erſten P
tenz enthielten, mit den Fluxionen allein. Die Fluxion
ſtellen Geſchwindigkeiten vor, wenn die veränderlich
Größen (fluentes) als Wege eines beweglichen Ding
gedacht werden. Sie ſind proportional den Differentiale
nach der von Leibnitz eingeführten Benennung. Metho
dus Fluxionum. Probl. I. in demonſtr. ſolutionis.

In den Principien der Naturwiſſenſchaft gebraucht
Newton die Fluxionen nicht, ſondern bringt alles auf d
letzten Verhältniſſe der verſchwindenden Veränd
rungen, weil er in dieſem Werke ganz den ſynthetiſche
Vortrag beobachtet. In dem zweyten Buche kommt nu

n Lemma über das Moment eines Products vor, zum ebrauch einiger folgenden Sätze. Das letzte Verhält- iß der Veränderungen erklärt er durch ratio quantita- um, non antequam evaneſcunt, non poſtea, ſed uacum evaneſcunt. (Phil. nat. princ. math. L. I. emma XI. ſchol.). Das letzte Verhältniß der Verän- rungen iſt einerley mit dem Verhältniß der Fluxionen.

Hiemit ſtimmt Eulers Erklärung der Differential- chnung in ſeinem Werke über dieſelbe überein. Sie t, ſagt er, die Methode, das Verhältniß der ver- hwindenden Incremente zu beſtimmen, welche Functio- en von irgend einer Art zukommen, indem die veränder- che Größe, wovon ſie Functionen ſind, ein verſchwinden- es Increment erhält. Er ſetzt hinzu, die Differential- echnung beſchäftige ſich nicht ſowohl mit den verſchwin- enden Veränderungen, als welche Null ſeyn, ſondern nit ihrem Verhältniſſe, welches durch endliche Größen usgedruckt werden könne, daher in der That dieſe Rech- ung es mit endlichen Größen zu thun habe. Auch dieſe Vorſtellung kommt mit dem von Newton gebrauchten Verfahren überein.

Inzwiſchen mag es Schwierigkeit verurſachen, ſich in Verhältniß vorzuſtellen, mit welchem zwey Größen erſchwinden, oder welches zwey Größen, die Null ſind, aben. Man muß aber die Veränderungen zweyer Größen , y durch Producte, $P\omega$, $Q\omega$, ausdrucken, wie es Newton gethan hat. Die Factoren P, Q ſind zum Theil on ω unabhängig. Setzt man nun die willkührliche $=0$, ſo verwandelt ſich das Verhältniß P:Q in ein an- eres, p:q, nämlich in das Verhältniß der verſchwinden- en Veränderungen. Newton hat auf den Unterſchied der Verhältniſſe P:Q und p:q nicht geachtet. Das letztere ezeichnet er durch $\dot{x}:\dot{y}$, und ſetzt ſchon für die endlichen Veränderungen die Producte $x\,o$; $y\,o$. Dadurch ſcheint was weggelaſſen zu werden, was zu der Beſtimmung on p:q gehören möchte, beſonders da Newton ſagt, aß in der durch o dividirten Differenzengleichung die in o

multiplicirten Glieder für Null gehalten werden k in Vergleichung mit den andern Gliedern, und daß deswegen bey Seite ſetze. Man muß aber ja nic verſchwindendes Verhältniß, das ein ſelbſtſtändig als ein genähertes oder ſubſtituirtes betrachten.

Durch d'Alembert ward es gewöhnlich, di ferential- und Integralrechnung auf den Begri Gränzverhältniß zu gründen. Er drang darauf ältern Encyclopädie, woraus die Artikel über Differ rechnung in die Encyclopédie méthodique überge ſind. Wenn man ein Differentialverhältniß a Gränzverhältniß der Veränderungen zweyer Größen ſo bleibt es immer ein Sprung, den man von dem chen zu dem unendlich Kleinen thut. In einer geo ſchen abnehmenden Progreſſion iſt der Abſtand von Millionentheilchen der Einheit bis zu Null für eben ſi zu halten als der von der Einheit bis zur Null. fortgeſetzte Verkleinerung der Veränderungen gelang nie zu den unendlich kleinen Veränderungen, derer hältniß das Grundverhältniß der endlichen iſt. Wi iſt dieſes das Grundverhältniß, von dem man aus muß, um die Verhältniſſe der endlichen Veränder zu beſtimmen, ſo wie man eine krumme Linie aus Hand am richtigſten zeichnet, wenn man in ei Puncten derſelben die berührenden gezogen hat.

Beide Vorſtellungen, die von dem Verhältniſſe ſchwindender Veränderungen, und die von einem G verhältniſſe, laſſen ſich durch die Annahme einer ſte Folge von Größen zwiſchen zwey gegebenen einer rechtfertigen. Die Stetigkeit der Folge kann man verwerfen. Allein die gleich Anfangs gegebene Erklä gebraucht keiner Rechtfertigung. Sie läßt die Stet einer Folge von Größen beſtehen, und iſt dabey ann bar, ohne ſie voraus zu ſetzen; zugleich aber zeigt ſie, das weſentliche in den endlichen Veränderungen zuſam geordneter Größen iſt. Durch ſie kommt man vo Differentialveränderungen auf die endlichen, dagegen

rch der gewöhnlichen Vorstellungsart von diesen zu jenen langt.

Pasquich nennt in seiner mathematischen Analysis erschwindungsquotient, was hier Differentialquotient nannt ist. In den mit Sorgfalt und Genauigkeit abfaßten Elementis Analyseos et Geometriae sublioris, Lipsiae 1799, bezeichnet er den Exponenten des ifferentialverhältnisses für eine Function durch εy, so ß εy mit $\frac{\partial y}{\partial x}$ einerley bedeutet.

La Grange hat in seiner Théorie des fonctions alytiques, die Vorstellungen von Differentialen, von endlich kleinen, oder verschwindenden Veränderungen, n Gränzverhältnissen, ganz vermieden, weil er sie nicht r deutlich genug hält, um in einer Wissenschaft, deren ewißheit völlig einleuchtend seyn soll, zur Grundlage anwandt zu werden. Er legt dagegen die oben angeführte ormel für endliche Differenzen zum Grunde. Die nction fx nennt er fonction primitive in Beziehung f die Functionen p, q, r, etc. welche er dérivées nut; die Function p oder $f'x$ heißt bey ihm fonction ime, die Function q oder $f''x$ fonction seconde, f. f.

Ich stimme diesem großen Analysten völlig bey, daß an zur einleuchtenden Überzeugung von dem Verfahren serer Infinitesimalrechnung von jener Entwickelungsfor- l ausgehen müsse. Schon lange habe ich bey dem nterrichte in dieser Rechnung den von mir in diesem Arel aufgestellten Begriff von Differentialen gebraucht, eil die Vorstellung von verschwindenden Gr..zen eine unkelheit, wenigstens für Anfänger, verursacht. Es r mir angenehm, mein Verfahren mit dem von einem Grange gebrauchten vereinigen zu können. Doch beilte ich die einmahl übliche Terminologie und Bezeichngsart bey, welches in diesem Werke ganz nothwendig . Hat man jene nur recht verstanden, so werden die echnungen mit eben so vieler Sicherheit und Kleinheit s Kürze und Leichtigkeit ausgeführt.

Differentiale von höhern Graden.

Es ſey y eine Function von x, und $\frac{\partial y}{\partial x} = p$, ſo

p eine neue Function von x, und nur in dem Falle unveränderliche Größe, wenn y und x beides Glie einer arithmetiſchen Progreſſion ſind. Man ſuche für so wie für y geſchehen iſt, den Differentialquotien und es ſey $\frac{\partial p}{\partial x} = q$, ſo iſt q wieder eine Function x (oder auch eine unveränderliche Größe), nach la Gr fonction ſeconde dérivée. Man bezeichnet ſie durch $\frac{\partial \partial y}{\partial x^2}$ oder $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$. Es iſt nämlich dieſer Quo der von den Veränderungen der Größen unabhängige des Quotienten $\frac{\Delta^2 y}{\Delta x^2}$, wo $\Delta^2 y$ das Anfangsglied zweyten Differenzreihe zu der Reihe der y bedeutet, w die zugehörigen x ſich gleichförmig um Δx verändern

Weiter ſey $\frac{\partial q}{\partial x} = r$, ſo iſt, wenn q keine Conſt iſt, r eine Function von x, (bey la Grange fonct tierce), die man auch durch $\frac{\partial^3 y}{\partial x^3}$ bezeichnet. Di iſt der von den Veränderungen der x und q unabhäng Theil des Differenzquotienten $\frac{\Delta^3 y}{\Delta x^3}$, wo $\Delta^3 y$ das fangsglied der dritten Differenzreihe iſt.

Auf dieſe Art laſſen ſich noch höhere Differentialq tienten finden. In einigen Fällen, z. B. wenn $y = x$ und m eine ganze Zahl iſt, kommt man zuletzt auf ei conſtanten Werth des Differentialquotienten.

Wenn y eine ungeſonderte Function von x iſt, iſt p eine Function von x und y zugleich, daher w

den es auch die folgenden Differentialquotienten. Z. B. Es sey $\frac{\partial y}{\partial x} = x^2 y$, so ist $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = 2xy + x^2 p = 2xy + x^4 y$. Daraus ist

$$\frac{\partial^3 y}{\partial x^3} = 2y + 2x.p + 4x^3 y + x^4.p$$
$$= 2y + 6x^3 y + x^6 y.$$

u. s. w.

Die Formel für die endliche Differenz Δy erhält nun folgende Gestalt:

$$\Delta y = \frac{\partial y}{\partial x} . \Delta x + \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \cdot \frac{\Delta x^2}{2} + \frac{\partial^3 y}{\partial x^3} \frac{\Delta x^4}{6} + \frac{\partial y^4}{\partial x^4} \frac{\Delta x^4}{24} + \text{etc.}$$

Die Anfangsglieder der folgenden Differenzreihen, $\Delta^2 y$, $\Delta^3 y$, etc, werden durch diese successiven Differentialquotienten bestimmt. Der Kürze wegen gebrauchen wir wiederum die Bezeichnungen p, q, r, s, t, u, etc. so daß

$$\Delta y = p\Delta x + \tfrac{1}{2} q \Delta x^2 + \tfrac{1}{6} r \Delta x^3 + \tfrac{1}{24} s \Delta x^4 + \tfrac{1}{120} t \Delta x^5 + \tfrac{1}{720} u \Delta x^6 + \text{etc.}$$

Aus dieser Function von x wird $\Delta^2 y$ eben so hergeleitet, wie Δy aus der Function fx. Jedes Glied ist eine Function von x, wovon der erste Differentialquotient gegeben ist, so daß dadurch alle übrigen auch gegeben werden. Denn von p ist dieser Quotient = q, von q ist er = r, von r ist er = s, u. s. f. Die Differenz Δx wird als unveränderlich betrachtet. Nimmt man nun die gleichartigen Glieder zusammen, so ist

$$\Delta^2 y = q\Delta x^2 + r\Delta x^3 + \tfrac{7}{12} s \Delta x^4 + \tfrac{1}{4} t \Delta x^5 + \tfrac{31}{360} u \Delta x^6 + \text{etc.}$$

Hieraus folgt auf gleiche Art

$\Delta^5 y = r\Delta x^3 + \frac{5}{2}s\Delta x^4 + \frac{5}{4}t\Delta x^5 + \frac{1}{4}u\Delta x^6 +$ etc.

u. ſ. f.

Man ſehe eben dieſe Formeln in einer etwas veränderten Geſtalt, auf andere Art hergeleitet, in dem Artikel, Differenzenrechnung (48).

Z. B. nehme man die Function $y = x^m$. Setzt man nun um abzukürzen, $x^m = A$; $(x+\Delta x)^m = B$; $(x+2\Delta x)^m = C$; $(x+3\Delta x)^m = D$, etc. ſo iſt $\Delta y = B - A$; $\Delta^2 y = C - 2B + A$; $\Delta^3 y = D - 3C + 3B - A$, u. ſ. f. (arithmet. Reihen höher. Ordn. 2.). Auch iſt $p = mx^{m-1}$; $q = m \cdot m-1 \cdot x^{m-2}$; $r = m \cdot m-1 \cdot m-2 \cdot x^{m-3}$; $s = m \cdot \cdot m-3 \cdot x^{m-4}$ etc. Sucht man die Differenzen ſowohl nach den gegebenen Formeln, als mittelſt der entwickelten Binomialpotenzen, ſo findet man dieſelben Werthe.

Man ſieht aus den hier berechneten Werthen von $\Delta^2 y$ und $\Delta^3 y$, wie die höhern Differentialquotienten der von den Veränderungen der Größen unabhängige Theil der Quotienten der endlichen Veränderungen ſind, daher man ſie auch als Gränzen derſelben anſehen mag. Wichtiger iſt, daß man daraus erkennt, wie die endlichen Differenzen ganz von den Differentialquotienten abhangen, ſo daß man eigentlich nicht von jenen zu dieſen, ſondern von den letztern zu den erſtern gelangt.

Das zweite Differential, als Größe betrachtet, iſt ein unendlich Kleines der zweyten Ordnung, oder gegen das erſte Differential unendlich klein. Dieſes beruht darauf, daß $\Delta^2 y = (q + r\Delta x +$ etc.$)\,\Delta x^2$ iſt. Dagegen $\Delta y = (p + \frac{1}{2}q\Delta x +$ etc.$)\,\Delta x$ iſt. Das Verhältniß $\Delta y : \Delta^2 y$ nähert ſich immer mehr dem $p : q\Delta x$, je kleiner Δx genommen wird. Setzt man für jene Differenzen die Differentiale, als unendlich kleine Größen, ſo wird, da $q\Delta x$ alsdann gegen p verſchwindet, das zweyte Differential $\partial^2 y$ gegen das erſte ∂y unendlich klein.

Aus einem gleichen Grunde iſt das dritte Differential $\partial^3 y$ gegen das erſte ein unendlich Kleines der zweyten

Ordnung, und in Abſicht endlicher Größen ein unendlich Kleines der dritten Ordnung. Denn es iſt $\Delta^3 y = (r + \frac{1}{2} s \Delta x + \text{etc.}) \Delta x^3$, alſo $\Delta y : \Delta^3 y = = = p + \frac{1}{2} q \Delta x + \text{etc} : (r + \frac{1}{2} s + \text{etc.}) \Delta x^2$.

Man muß dieſe Ausdrücke nur kennen, aber ſie nicht gebrauchen. Differentiale ſind keine Größen. Behandelt man ihre Zeichen wie Größen, ſo ſind jene Vergleichungen freylich richtig. Man kann aber dieſe Vergleichungen der Differentiale verſchiedener Ordnungen ſehr wohl entbehren. Wo $\partial^2 y$ vorkommt, wird es mit ∂x^2 oder $\partial x \partial y$ verglichen, und der Quotient jenes durch dieſes dividirt iſt im Allgemeinen eine endliche Größe. Eben ſo wird $\partial^3 y$ immer mit ∂x^3, oder $\partial y \partial x^2$, oder $\partial y^2 \partial x$, oder ∂y^3 verglichen, u. ſ. f. Bey Näherungsrechnungen iſt es nöthig, daß man einſehe, wie die Differenzen der verſchiedenen Ordnungen abnehmen. Man bemerke aber wohl, daß es bey der Vergleichung derſelben zugleich auf die Differentialquotienten p, q, r, etc. ankommt.

Differentialrechnung iſt derjenige Theil der Analyſis, worin aus der Relation der veränderlichen Größen, die auf irgend eine Art mit einander verbunden ſind, die Relation ihrer Veränderungen oder zuſammengehörigen Differenzen geſucht wird, ſo fern dabey die Quantität der Veränderungen ſelbſt nicht in Betrachtung kommt. Sie macht einen Theil der Analyſis des Unendlichen aus, die man ſo nennt, weil die Differenzen, deren Relation geſucht wird, gleichſam als unendlich kleine Beſtandtheile des Endlichen betrachtet werden. Man ſucht das verſchwindende zu faſſen, indem es verſchwindet. Eigentlich iſt es, wie in dem Artikel, Differentiale, gezeigt iſt, eine Abſonderung des charakteriſtiſchen oder weſentlichen in der Relation der Differenzen von dem willkührlichen, was ihre Quantität zu ihrer Relation beyfügt.

Die Wichtigkeit dieſer höhern Rechnungsart mag man ſchon aus der Erklärung abnehmen. Da ſie für alle Arten von Functionen das charakteriſtiſche in der Relation der Veränderungen der zuſammengehörigen Größen findet,

so giebt sie zugleich das Mittel, von der charakteristischen Relation der Differenzen auf die Function zu kommen, wenn nur jene Relation unter den mittelst der Differentialrechnung gefundenen vorhanden ist, oder sich durch Verwandlungen auf solche bringen läßt. Die schwersten Fragen der Analysis und analytischen Mechanik erfordern zur Auflösung diesen Weg. Sie waren in der ältern Mathematik unauflöslich, weil man die Verknüpfung zwischen einer Relation veränderlicher Größen und der Relation ihrer Differenzen nicht aufgesucht hatte. Man konnte auf manche solche Fragen nicht einmahl gerathen.

Zweytens ist oft eine veränderliche Größe durch ein Gränzverhältniß zu einer andern gegeben. Z. B. das Verhältniß der Subtangente zur Ordinate ist dasjenige, welchem sich die Differenz der Abscissen und die der Ordinaten ohne Ende nähert. Nun ist das Differentialverhältniß zugleich die Gränze des Verhältnisses der endlichen Differenzen; also ist jenes durch dieses gegeben, (s. berührende Linie). Der Halbmesser der Krümmung ist die Gränze, welche sich zwey Normalen an einer Curve, bis zu ihrem Durchschnitte genommen, desto mehr nähern, je näher sie bey einander liegen. Er wird also durch Differentialverhältnisse bestimmt. So werden auch Puncte der Caustica und der Diacaustica durch solche Verhältnisse gefunden. Die größten und kleinsten Werthe der Ordinaten einer Curve, nebst ihren Stellen, die Wendungspuncte, die Rückkehrpuncte, werden durch gewisse Beschaffenheiten der Gränzverhältnisse leicht angegeben. In der allgemeinen Analysis leistet die Differentialrechnung wichtige Dienste zur Summirung der Reihen und zur Auflösung der Gleichungen.

Daher nahm auch gleich mit der Erfindung der Analysis des Unendlichen die Geometrie einen höhern Flug, weit über die Gränzen, wo Archimedes und Apollonius stehen geblieben waren. Die abstracte Mathematik bekam einen neuen Theil an der höhern Mechanik, worin gleich sehr schwere Fragen aufgelöset wurden. Die einzelnen Methoden der vorigen Mathematiker wurden allgemei-

ner gemacht und zu einem Syſtem mit einander verbunden, oder ſie wurden durch die neuere bequemere Rechnung unnöthig.

Der Gebrauch eines Differentialverhältniſſes wird zuerſt in der Neperiſchen Theorie der Logarithmen vorkommen. Nepers Definition der Logarithmen iſt folgende: **Logarithmus cujusque ſinus eſt numerus quam proxime definiens lineam, quae aequaliter crevit, interea dum ſinus totius linea proportionaliter in ſinum illum decrevit, exiſtente utroque motu ſynchrono atque initio aequiveloce.** Das proportionirlich abnehmen heißt nach Verhältniß der noch übrigen Länge abnehmen. Nepers Definition ſagt eben daſſelbe, was die Differentialgleichung zwiſchen der Zahl z und ihrem natürlichen Logarithmen x, welche iſt $\partial x = \frac{\partial z}{z}$, nur daß er die Logarithmen der abnehmenden Sinus zunehmen läßt. Nehmen wir dieſe Logarithmen für poſitiv, ſo haben wir $\partial x = -\frac{\partial z}{z}$, und für $z = 1$ iſt $\partial x = -\partial z$, das iſt, die Veränderungen, ohne Ende vermindert, ſind gleich groß, und geometriſch dargeſtellt, gleich geſchwinde Bewegungen. In einem andern Syſtem ſind ſie nicht gleich geſchwind, weil darin $\partial x = -\frac{c\partial z}{z}$, und für $z = 1$ in demſelben $\partial x = -c\partial z$ iſt. Neper nimmt nicht endliche Differenzen, da er die Logarithmen mit Null, und die Sinus mit der Einheit anfangen läßt. Wie er ſich, ohne zu integriren, hilft, die Logarithmen bis auf einen gewiſſen Bruchtheil richtig anzugeben, wird in dem Artikel, Logarithmen, erzählt.

Fermat gebrauchte eine Rechnung, worin die Diferenz zweyer Größen, und dadurch mittelbar auch die Differenz zweyer zugehörigen Größen, verſchwindend geſetzt wird, zur Beſtimmung des größten oder kleinſten Werthes einer Function, und der berührenden an einer

Hieraus folgt auf gleiche Art

$\Delta^5 y = r\Delta x^3 + \frac{3}{2}s\Delta x^4 + \frac{3}{4}t\Delta x^5 + \frac{3}{4}u\Delta x^6 + \text{etc.}$

u. s. f.

Man sehe eben diese Formeln in einer etwas veränderten Gestalt, auf andere Art hergeleitet, in dem Artikel, Differenzenrechnung (48.).

Z. B. nehme man die Function $y = x^m$. Setzt man nun um abzukürzen, $x^m = A$; $(x + \Delta x)^m = B$; $(x + 2\Delta x)^m = C$; $(x + 3\Delta x)^m = D$, etc. so ist $\Delta y = B - A$; $\Delta^2 y = C - 2B + A$; $\Delta^3 y = D - 3C + 3B - A$, u. s. f. (arithmet. Reihen höher. Ordn. 2.). Auch ist $p = mx^{m-1}$; $q = m \cdot m-1 \cdot x^{m-2}$; $r = m \cdot m-1 \cdot m-2 \cdot x^{m-3}$; $s = m \cdot m-1 \cdot m-3 \cdot x^{m-4}$ etc. Sucht man die Differenzen sowohl nach den gegebenen Formeln, als mittelst der entwickelten Binomialpotenz, so findet man dieselben Werthe.

Man sieht aus den hier berechneten Werthen von $\Delta^2 y$ und $\Delta^3 y$, wie die höhern Differentialquotienten der von den Veränderungen der Größen unabhängige Theil der Quotienten der endlichen Veränderungen sind, daher man sie auch als Gränzen derselben ansehen mag. Wichtiger ist, daß man daraus erkennt, wie die endlichen Differenzen ganz von den Differentialquotienten abhangen, so daß man eigentlich nicht von jenen zu diesen, sondern von den letztern zu den erstern gelangt.

Das zweite Differential, als Größe betrachtet, ist ein unendlich Kleines der zweyten Ordnung, oder gegen das erste Differential unendlich klein. Dieses beruht darauf, daß $\Delta^2 y = (q + r\Delta x + \text{etc.})\,\Delta x^2$ ist. Dagegen $\Delta y = (p + \frac{1}{2}q\Delta x + \text{etc.})\,\Delta x$ ist. Das Verhältniß $\Delta y : \Delta^2 y$ nähert sich immer mehr dem $p : q\Delta x$, je kleiner Δx genommen wird. Setzt man für jene Differenzen die Differentiale, als unendlich kleine Größen, so wird, da $q\Delta x$ alsdann gegen p verschwindet, das zweyte Differential $\partial^2 y$ gegen das erste ∂y unendlich klein.

Aus einem gleichen Grunde ist das dritte Differential $\partial^3 y$ gegen das erste ein unendlich Kleines der zweyten

Beyſpiele an der Parabel, Ellipſe, Ciſſoide, Conchoide, Cycloide und der Quadratrix gegeben, auch iſt der Schwerpunct eines paraboliſchen Konoids dadurch von ihm beſtimmt. Bey den vier letztern jener Linien kürzt Fermat ein Verfahren etwas ab. Er ſagt, man ſolle die ſpecifiſche Eigenſchaft der Curve auf die berührende tragen, das iſt, eine Ordinate an derſelben für eine Ordinate an der Curve neben dem Berührungspuncte nehmen, darauf dasjenige weglaſſen, was nach der Lehre vom Größten und Kleinſten weggelaſſen werden muß, ſo werde man den Durchſchnitt der berührenden mit dem Durchmeſſer der Axe der Abſciſſen) beſtimmen können. Es ſey (Fig. 38. Tab. III.) an der krummen Linie AMB die berührende TMR in M; wo ſie mit der Curve die gemeinſchaftliche Ordinate PM hat. Eine andere Ordinate der Curve, QN, ſchneide ſie in R. Nun iſt QR die vierte Proportionallinie zu TP, PM, TQ. Dieſer Werth, nämlich $\frac{PM.TQ}{TP}$, werde in die Gleichung zwiſchen den Coordinaten AP, PM für PM, und zugleich AP+PQ für AP geſetzt. In der Annäherungsgleichung hebt ſich erſtlich alles auf, was nicht PQ, die Differenz der beiden Abſciſſen, enthält; und durch die Diviſion mit PQ wird eine von PQ unabhängige Gleichung erhalten, wodurch die Subtangente PT beſtimmt wird. Z. B. Die Curve ſey die Ciſſoide, deren Gleichung iſt $x^3 = y^2 (a-x)$; Die Subtangente ſey $= t$, und $PQ = e$, ſo iſt eine Annäherung zur Gleichheit zwiſchen

$$(x+e)^3 \text{ und } \frac{y^2 (t+e)^2}{t^2} (a-x-e).$$

In beiden Größen hebt ſich, was e nicht enthält, gegen einander. Läßt man ferner die Glieder weg, welche e^2 und e^3 enthalten, ſo bleibt, nach der Diviſion durch e, die Gleichung, $(3a-2x)t = 2x(a-x)$, zur Beſtimmung von t. Fermat bezeichnet x durch N, $a-x$ durch Z; t durch A, und findet übereinſtimmig mit dieſ

so giebt sie zugleich das Mittel, von der charakteristischen Relation der Differenzen auf die Function zu kommen, wenn nur jene Relation unter den mittelst der Differentialrechnung gefundenen vorhanden ist, oder sich durch Verwandlungen auf solche bringen läßt. Die schwersten Fragen der Analysis und analytischen Mechanik erfordern zur Auflösung diesen Weg. Sie waren in der ältern Mathematik unauflöslich, weil man die Verknüpfung zwischen einer Relation veränderlicher Größen und der Relation ihrer Differenzen nicht aufgesucht hatte. Man konnte auf manche solche Fragen nicht einmahl gerathen.

Zweytens ist oft eine veränderliche Größe durch ein Gränzverhältniß zu einer andern gegeben. Z. B. das Verhältniß der Subtangente zur Ordinate ist dasjenige, welchem sich die Differenz der Abscissen und die der Ordinaten ohne Ende nähert. Nun ist das Differentialverhältniß zugleich die Gränze des Verhältnisses der endlichen Differenzen; also ist jenes durch dieses gegeben, (s. berührende Linie). Der Halbmesser der Krümmung ist die Gränze, welche sich zwey Normalen an einer Curve, bis zu ihrem Durchschnitte genommen, desto mehr nähern, je näher sie bey einander liegen. Er wird also durch Differentialverhältnisse bestimmt. So werden auch Puncte der Caustica und der Diacaustica durch solche Verhältnisse gefunden. Die größten und kleinsten Werthe der Ordinaten einer Curve, nebst ihren Stellen, die Wendungspuncte, die Rückkehrpuncte, werden durch gewisse Beschaffenheiten der Gränzverhältnisse leicht angegeben. In der allgemeinen Analysis leistet die Differentialrechnung wichtige Dienste zur Summirung der Reihen und zur Auflösung der Gleichungen.

Daher nahm auch gleich mit der Erfindung der Analysis des Unendlichen die Geometrie einen höhern Flug weit über die Gränzen, wo Archimedes und Apollonius stehen geblieben waren. Die abstracte Mathematik bekam einen neuen Theil an der höhern Mechanik, worin gleich sehr schwere Fragen aufgelöset wurden. Die einzelnen Methoden der vorigen Mathematiker wurden allgemei-

ſelbſt zu gelangen, woran man bis dahin noch gar nicht gedacht hatte. Newton verband mit ſeiner Fluxionenrechnung die Theorie der Reihen, insbeſondere die Entwickelung irrationaler mehrtheiliger Größen in eine Reihe, wodurch ſeine Analyſis freylich der Leibnitziſchen überlegen iſt, weil er dadurch im Stande war, unmittelbar aus den Gleichungen für die Fluxionen die Gleichungen für die Fluenten zu erhalten, welches Leibnitz nur durch beſondere Kunſtgriffe und Umwandlungen (Transmutationen) in beſondern Fällen bewirken konnte.

Wir haben von Newton drey Schriften über die Rechnung des Unendlichen. Die erſte führt den Titel: Analyſis per aequationes numero terminorum infinitas, welche zuerſt durch Beſorgung von Jones 1711 zu London erſchienen iſt. Barrow erhielt ſie ſchon im J. 1669 von dem Verfaſſer mitgetheilt. Es iſt diejenige, deren Newton in einem für Leibnitz beſtimmten, an Oldenburg gerichteten Briefe vom 24ſten Octobr. 1676 erwähnt, daß Collins ſie durch Barrow erhalten habe.

Newton beſchäftigt ſich darin faſt ganz mit der Quadratur der krummen Linien, bemerkt aber, daß die Aufgaben von der Rectification, Cubirung, Complanation, und dem Schwerpuncte ſich auf die von der Quadratur bringen laſſen, weswegen er weiter nichts als ein Beyſpiel von der Rectification eines Kreisbogens giebt. Er geht von der Quadratur derer Linien aus, an welchen die Ordinaten einer Potenz der Abſciſſe (mit ganzem oder gebrochnem Exponenten) proportional iſt. Die Abſciſſe an einer Curve ſey $= x$; die Ordinate $= y$; die Area $= z$, und $ax^m = z$. Wird $x = o$ für x geſetzt, und bezeichnet ov das Wachsthum der Area, ſo iſt $a(x+o)^m = z + ov$, alſo $max^{m-1}.o + \text{etc.} = ov$, welche Gleichung durch o theilbar iſt. Wird o als verſchwindend betrachtet, ſo wird $v = y$, und es bleibt $max^{m-1} = y$. Umgekehrt, wenn $y = max^{m-1}$ iſt, ſo iſt die Area $z = \frac{a}{m}x^m$. oder, wie Newton die Formel giebt, wenn $ax^n = y$, ſo iſt

$\frac{n}{m+n} ax^{\frac{m+n}{n}} = z$: Iſt y eine gebrochne, oder irrationale Function von x, ſo wird ſie, wie Newton zeigt, durch Diviſion oder Ausziehung der Wurzel auf eine Reihe von Potenzen der x gebracht. Iſt y eine ungeſonderte Function von x, (Newton nennt es aequatio affecta), ſo wird y nach Newtons Anleitung daraus zu einer Reihe von Potenzen der x entwickelt, mit ſteigenden oder fallenden Exponenten. Bey der Abfaſſung dieſer Schrift ſcheint Newton den binomiſchen Lehrſatz noch nicht gekannt zu haben. Denn die Quadratwurzel aus einem Binomium zieht er ganz auf die Art aus, wie es bey Zahlen gewöhnlich iſt. Auch verwandelt er den Bruch $\frac{1}{\sqrt{(1-xx)}}$ erſt in dieſen, $\frac{\sqrt{(x-xx)}}{x-xx}$, zieht aus dem Zähler die Wurzel, und dividirt dann dieſe durch den Nenner. Bey der Verwandlung des Bruches $\frac{\sqrt{(1+ax^2)}}{\sqrt{(1-bx^2)}}$ in eine Reihe nimmt er eine ſolche Verwandlung zuerſt mit Zähler und Nenner vor, und dann die Diviſion, oder verfährt auch auf eine ähnliche Art, wie bey jenem Bruche.

Der Ausdruck, Fluxion, kommt in dieſer Schrift noch nicht vor. Den Ausdruck, Moment, nimmt er hier (pag. 19.) in einer andern Bedeutung als in der folgenden Schrift, und verſteht darunter die Größe, welche die augenblickliche Veränderung erzeugt.

Die zweyte Schrift von Newton iſt betitelt: Methodus Fluxionum et ſerierum infinitarum, cum ejusdem applicatione ad Curvarum Geometriam. Sie iſt nicht eher als 1736 von Colſon in einer engliſchen Überſetzung aus dem lateiniſchen Original bekannt gemacht. Aus dieſer hat Caſtillion ſie wieder ins Lateiniſche überſetzt, und ihr die zweyte Stelle in ſeiner Sammlung gegeben. Das Original iſt in der prächtigen Ausgabe von Newtons Werken durch Horsley eingerückt, unter dem Titel: Artis analyticae ſpecimina, vel Geome-

ria analytica. Dieſe Schrift iſt diejenige, von wel-
her Newton in dem vorher angeführten Briefe ſagt, daß
r ſie mit einer Schrift über die Optik habe herausgeben
ollen, welches aber unterblieben ſey, weil ihm gegen ſeine
ptiſche Theorie manche Einwürfe gemacht worden, und
r ſeine Ruhe nicht aufopfern wollte. Es trifft bey dieſer
Schrift zu, was er von jener ſagt, daß die Reihen nur
inen kleinen Theil darin einnehmen, und daß die Aufga-
en, welche nicht auf Quadraturen gebracht werden kön-
en, darin fehlen, obgleich etwas von den Gründen die-
r Unterſuchung darin beygebracht ſey. Stellen aus die-
r Schrift ſind in dem Briefe angeführt, als die Formeln
S. 158, und die Berechnung eines Logarithmen S. 148
i dem Briefe, S. 341 und 344, nach Caſtillions Aus-
abe. In einem an den Abbé Conti gerichteten Briefe
S. 410, a. a. O.), die Streitigkeit mit Leibnitz betref-
nd, erzählt Newton, daß er im J. 1671 eine ausführ-
here Schrift aufgeſetzt habe, die in ſeinem Briefe vom
ſten Oct. 1676 erwähnte, welche mit der Reduction
dlicher Größen auf unendliche Reihen, und mit der Auf-
ſung folgender beiden Aufgaben anfange: 1) aus der
elation der Fluenten die Relation der Fluxionen zu fin-
n; 2) aus einer Gleichung für Fluxionen die Relation
r Fluenten herzuleiten. Dieſe finden ſich wörtlich in der
lethodo Fluxionum mit ihren Auflöſungen.

Den Anfang dieſer Schrift macht die Verwandlung
r Quotienten und Wurzelgrößen in Reihen, und die
leduction der aequationum affectarum auf dieſe Ge-
alt, wobey das unter dem Namen des Newtoniſchen
arallelogramms bekannte geometriſche Hülfsmittel vor-
mmt. Hierauf erklärt Newton die Fluxionenrechnung.
r ſtellt ſich alle Größen als geometriſche vor, die durch
Bewegung erzeugt werden, Linien durch die Bewegung eines
unctes, Flächen durch Bewegung einer Linie; Körper
urch Bewegung einer Fläche. Aus der Länge des be-
hriebenen Raums muß die Geſchwindigkeit für jeden
eitpunct, und aus der Geſchwindigkeit die Länge des in ei-
er gegebenen Zeit beſchriebenen Raums gefunden werden.

Newton erinnert, daß Zeit hier nicht im eigentlichen oder metaphyſiſchen Verſtande (formaliter, wie er es ausdruckt) zu nehmen ſey, ſondern daß es eine von der eigentlichen Zeit verſchiedene Größe bedeute, die gleichförmig zunimmt, und auf welche die andern Größen, mit welchen ſie gleichartig iſt, gleichſam wie auf eine Zeit bezogen werden. Dieſe Erinnerung iſt von Wichtigkeit, weil dadurch die Einmiſchung eines der Geometrie ſowohl als noch mehr der Analyſis fremden Begriffs abgewendet wird. Die Größen, welche als allmählig und unbeſtimmbar (indefinite) wachſend gedacht werden, nennt Newton Fluentes, und bezeichnet ſie mit den letzten Buchſtaben des Alphabets. Die Geſchwindigkeiten, mit welchen die Fluenten durch die ſie erzeugende Bewegung zunehmen, nennt er Fluxiones, und bezeichnet ſie durch die Buchſtaben für die Fluenten, mit Puncten darüber. Die unbeſtimmbar kleinen Theile der Fluenten, um welche ſie in unbeſtimmbar kleinen Zeittheilen ſtetiger Weiſe zunehmen, oder die Momente der Fluenten verhalten ſich wie die Geſchwindigkeiten, womit dieſe fließen oder zunehmen. Sind die veränderlichen Größen x und y, ſo ſind ihre Fluxionen $\dot{x}$ und $\dot{y}$, und ihre Momente $\dot{x}o$ und $\dot{y}o$. In der Gleichung zwiſchen x und y werden $x+\dot{x}o$ und $y+\dot{y}o$ für x und y geſetzt, jene Gleichung von der neuen abgezogen, der Reſt durch o dividirt, darauf o unendlich klein geſetzt, ſo wird die Gleichung für die Fluxionen erhalten. Man ſieht hieraus, daß Newtons Fluxionen endliche, den unendlich kleinen Veränderungen der Größen proportionale Glieder eines Verhältniſſes ſind.

Newton ward durch die geometriſche Unterſuchung der Bewegung auf ſeine Analyſis des Unendlichen geleitet. In dem angeführten Briefe an den Abbé Conti erzählt er, daß er unter ſeinen Papieren eines mit dem Datum vom 13. Nov. 1665 gefunden habe, worin die directe Methode der Fluxionen in folgenden Ausdrücken enthalten war: wenn eine Gleichung gegeben iſt, welche die Relation

yer oder mehrerer Linien, x, y, z, etc. enthält, die gleicher Zeit von zwey oder mehrern Beweglichen, A, C, etc. beschrieben werden, die Relation ihrer Geschwindigkeiten p, q, r, etc. zu finden. Die Auflösung gerade die, welche die Fluxionen- oder Differentialrechnung giebt. Nach jener sind p, q, r. etc. die Fluxionen, nach dieser die Differentiale. Newton fügt zu, daß die Auflösung auf die Aufgaben von berühren- und der Krümmung angewandt war; ferner, daß ein erer Aufsatz, datirt vom 16. May 1666, in sieben ätzen eine allgemeine Methode zur Auflösung der Aufga-, welche die Bewegung betreffen, enthielt, von welen der jetzt angeführte der letzte ist. In einem Aufsatze n November 1666 fand er diese sieben Sätze wieder, letzten mit der Erweiterung, daß Brüche, irrationale ößen, und sogar solche, welche man nachher transscente genannt hat, keine Schwierigkeit machten. In ei- hinzugekommenen Satze war auch die umgekehrte ethode der Fluxionen, so wie er sie damals hatte, vorragen. In diesem Aufsatze waren zuweilen Buchsta- mit einem Puncte für die ersten Fluxionen, und mit y Puncten für die zweyten gebraucht. Aus dieser klei- Schrift ist hernach eine größere Abhandlung erwachsen, Methodus Fluxionum, deren Titel Newton aber ht angiebt.

Solchergestalt kam Newton auf die Vorstellung, ränderungen der Größen durch Bewegung entstehen zu en, desto leichter, da Bewegung häufig zur Erzeugung metrischer Größen gebraucht wird. Um die unendlich nen Größen aus den Gränzgleichungen für die Veränungen zu verbannen, druckte er diese durch das Product einer für alle veränderlichen Größen gemeinschaftlin Größe o in die Geschwindigkeit oder die Fluxionen . Bey ungleichförmigen Geschwindigkeiten ist dieses oduct desto näher die Veränderung, je kleiner diese ist. arum setzt er, nach der Division der Gleichung für die ränderung durch o, dieses o gleich Null. Geschwinkeiten bey ungleichförmigen Bewegungen verhalten sich

wie die gleichzeitigen Wege nur, wenn diese ohne Ende vermindert sind, oder das letzte Verhältniß der Wege ist das Verhältniß der Geschwindigkeiten.

Eine weitere Ausführung der Lehre von den Quadraturen (d. i. Integrationen) ist die Schrift, Tractatus de Quadratura Curvarum, welche 1704 mit des Verfassers Hauptwerke über die Optik als Anhang herausgekommen ist. Sie liefert allgemeinere Formeln als die zweyte Schrift giebt, welche ebenfalls diese Untersuchungen enthält. Horsley setzt sie vor der Methodus Fluxionum, ohne seinen Grund anzugeben. Um das Literarische der Newtonischen Schriften bekümmert er sich nicht.

In der Einleitung zu dem Tractat von der Quadratur der krummen Linien, die später als die Abhandlung selbst geschrieben ist, sagt Newton, er betrachte die Größen nicht als aus höchst kleinen Theilchen zusammen gesetzt, sondern als durch eine stetige Bewegung beschrieben. Da nun Größen nach dem Verhältnisse der Geschwindigkeiten, womit sie gleichzeitig wachsen und erzeugt werden, größer oder kleiner ausfallen, so habe er eine Methode gesucht, aus den Geschwindigkeiten der Bewegungen und Zunahmen, womit die Größen erzeugt werden, die Größen selbst zu bestimmen, und so sey er in den Jahren 1665 und 1666 allmählig auf die Methode der Fluxionen gekommen.

Er setzt hinzu: die Fluxionen verhalten sich höchst nahe wie die Zunahmen der Fluenten, die in höchst kleinen Zeittheilen erzeugt werden, oder, um genau zu reden, sie stehen in dem Anfangsverhältnisse der werdenden Zunahmen (sunt in prima ratione augmentorum nascentium), und können durch irgend welche ihnen proportionale Linien dargestellt werden. Statt des Anfangs-Verhältnisses der werdenden Zunahmen könne man auch, fügt Newton hinzu, das letzte Verhältniß der verschwindenden Theile nehmen. Bey dem Anfangs-Verhältnisse geht man von der Größe in einem Zustande zu der in einem folgenden Zustande über; bey dem letzten Verhältnisse der Veränderungen läßt man

zwey Größen in verschiedenen Zuständen sich einander immer mehr nähern.

Die Methode der Fluxionen, heißt es ferner, sey der Geometrie der Alten gemäß, da die Analysis dadurch bey endlichen Größen bleibe; es sey nach derselben nicht nöthig, unendlich kleine Figuren in die Geometrie einzuführen. Inzwischen möge man die Analysis auch an irgend welchen Figuren, endlichen oder unendlich kleinen anwenden, wenn man nur vorsichtig verfahre. Alle diese Bemerkungen scheinen sich auf Leibnitzens Vorstellungsarten in der Differentialrechnung zu beziehen.

In der Schrift von der Quadratur der krummen Linien werden auch die Fluxionen höherer Ordnungen eingeführt. Die Fluxionen der Fluxionen bezeichnet er durch zwey Puncte über dem Symbol der Fluente, wie $\ddot{x}$; die Fluxion dieser durch $\dddot{x}$; die Fluxion dieser durch $\ddddot{x}$, u. s. f. Da Fluxionen endliche Größen sind, so hat diese Fortschreitung keine Schwierigkeit. Man kann auch x als eine Fluxion einer veränderlichen Größe betrachten. Diese bezeichnet Newton durch x'. Diese mag wiederum die Fluxion einer Größe seyn, die durch x'' bezeichnet werde. Die Glieder einer Reihe kann man nämlich als Unterschiede der Glieder einer andern Reihe betrachten, und diese eben so als die Unterschiede der Glieder einer vorhergehenden Reihe, u. s. f. In den Werthen der zweyten und folgenden Fluxionen begieng Newton einen Fehler dadurch, daß er die Glieder einer entwickelten Differenz nach ihrer Folge für die Differenzen der verschiedenen Ordnungen nahm.

Anstatt daß Newton durch Geometrie und allgemeine Bewegungslehre auf seine Fluxionenrechnung geführt ist, ward Leibnitz durch die Betrachtung der Unterschiede und Summen in den Reihen der Zahlgrößen auf seine Differentialrechnung geleitet. Dieses erzählt er in einem Schreiben an Wallis, im J. 1697,

nommen. Dieses bezieht sich vermuthlich auf
mensetzung der Größen irgend einer Reihe au
fangsgliedern der Differenzreihen, und dieser
(S. arithmet. Reihen höherer Ordn. 2; 7.). D
Leibnitz fort, sey es ihm eingefallen, daß man
bisher gewöhnlichen Formen der Größen, y,
$y^{\frac{1}{2}}$, $y^{\frac{1}{3}}$, etc. neue Formen (affectiones), d
$d^{-}y$ $d^{\overline{2}}y$; oder $d^{-}d^{-}y$; $d^{\overline{3}}y$ oder d^{-}
bezeichnet, einführen könne. In einem Schre
Gräfinn von Kielmannsegg, worin Leibnitz ihr
von seiner Streitsache mit Newton ertheilt,
daß er sich frühzeitig mit den Eigenschaften der
schäftigt, auch einiges neue über die Unterschie
hen bemerkt habe. (Er gab 1666 in einem Al
oder 20 Jahren seine Schrift über die Con
heraus, und zeigte 1673 in der Londoner Sc
Rechenmaschine vor, die er schon in seiner Ju
den hatte). Im J. 1673 hätte die Bekann
Huygens Neigung zu geometrischen Untersuchun
erweckt, er habe in kurzer Zeit gute Fortschrit
macht, und eine Reihe gefunden, die für den

In dem zweyten Briefe an den Abbé Conti, wegen gedachten Streitsache, versichert Leibnitz auch, daß er seine Differentialrechnung nicht durch die Fluxionen Linien, sondern durch die Differenzen der Zahlen genommen sey, indem er bemerkt habe, daß die Differenzen stetig wachsenden Grösen in Vergleichung mit den hlen verschwinden, da sie bey Zahlen endlich bleiben, Differenzenrechnung. X.

Leibnitz fand, wie die Glieder einer Reihe aus den fangsgliedern der Differenzreihen zusammengesetzt wer-. Darin war ihm ein französischer Astronom, Mou-n, der um diese Zeit lebte, zuvorgekommen. Doch er-rt Leibnitz in einem Briefe an Oldenburg vom J. 1673, ß ihm dieses ganz unbekannt gewesen sey, ehe es ihm) seiner Anwesenheit zu London gesagt worden. Mou-müsse das Gesetz, nach welchem die Multiplicatoren den Anfangsgliedern der Differenzreihen fortgehen, ht gewußt haben. (Pascal hat es doch gewußt). Die-legt er dar, und setzt hinzu, daß es die ihm wohl be-nten, in der Combinationslehre von ihm angewandten hlen seyn. Zudem habe Mouton die Differenzen zum terpoliren gesucht, er aber habe die Glieder einer Reihe rgend einer Stelle ins Unendliche hin durch die Diffe-zen finden wollen.

Ferner sagt Leibnitz in diesem Briefe an Oldenburg, ß er zufolge der von ihm gemachten Bemerkungen man-Aufgaben über die Reihen auflösen könne; insbesondere nne er die Summe einer Reihe von Brüchen angeben, ren Zähler 1, die Nenner die Triangular- Pyramidal-d andere Zahlen dieser Art sind. In einem andern riefe an Oldenburg im J. 1676 giebt er die Summen gender Reihen an:

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\frac{1}{12}+\frac{1}{20}+\frac{1}{30}+\text{etc.}=\frac{1}{4}$$
$$\frac{1}{3}+\frac{1}{15}+\frac{1}{35}+\frac{1}{63}+\text{etc.}=\frac{1}{4}$$
$$\frac{1}{4}+\frac{1}{24}+\frac{1}{60}+\frac{1}{120}+\text{etc.}=\frac{1}{4}$$

von ihm durch eine unendliche Reihe gefunde
des Sectors eines Kreises, einer Ellipse und
dem Mittelpuncte aus genommen, mit. Di
einer Verwandlung einer Curve in eine an
die Quadratur dieser letztern die der erstern
Ordinate der zweyten Curve ist eine rationale
Abscisse, und läßt sich, wenn sie eine gebrochn
Reihe entwickeln, daher die Curve nach
Mercator bey der Hyperbel angewandten
quadriren läßt. Leibnitz schätzt die allgem
der Transformationen sehr hoch. Sie mö
nur in besondern Fällen angewandt werden
giebt für die Kegelschnitte mit einem Mitt
Arten der Transformation an. Die erste ist
folgende. Die Gleichung für diese Linie
$2rx - xx = yy$. Nun setzt er

$$x = \frac{2r^3}{r^2 + z^2}, \text{ so ist } y = \frac{2r^2 z}{r^2 + z^2}.$$

Leibnitz durch eine geometrische Construc
Nun sey z die Abscisse einer Curve, deren

nsformation giebt er nur eine so leichte Andeutung
ch ein paar berührende, daß es schon einigen Scharfs
i erfordert, seine Idee zu errathen. Der Abbé Catelan
) Ozanam haben die Art der Umwandlung irgendwo
erhalten, und bekannt gemacht. Montucla hat sie in
er Geschichte der Mathematik, Tom. II. p. 378. be-
ieben, wo aber noch ein vorläufiger Satz zu erweisen

Aus dem Mittelpuncee der Kegelschnitte ziehe man
e gerade Linie an den Scheitelpunct, und eine an irgend
en Punct der Curve. Durch beide Puncte werden be-
rende gezogen. Das Stück auf der berührenden durch
Scheitelpunct bis an den Durchschnitt mit der andern
ührenden sey = t, und das Rechteck von der halben
erchare (halben großen Are in der Ellipse) mit dem
lben Parameter sey die Flächen-Einheit, so ist der el-
tische oder circulare Sector dividirt durch die halbe
erchare $= t - \frac{1}{3}t^3 + \frac{1}{5}t^5 - \frac{1}{7}t^7 + \frac{1}{9}t^9 -$ etc. Für
i hyperbolischen Sector werden die subtractiven Glieder
ditiv genommen. Am Kreise ist t die Tangente des
lben Bogens des Sectors. Daher ist, wenn das um
en Kreis beschriebene Quadrat zur Einheit genommen

rd, die Kreisfläche $= \frac{1}{1} - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} +$ etc.

iesen Ausdruck, sagt Leibnitz, habe er um 1673 seinen
eunden mitgetheilt, und er halte ihn für den möglichst
fachsten, der dem Verstande sehr gefallen müsse. Doch
t Jakob Gregory in Schottland die von Leibnitz für den
eis gefundene Reihe früher schon gehabt, aber nicht öf-
ntlich, sondern nur in einem Briefe an Collins im An-
ge des Jahrs 1671 mitgetheilt.

Leibnitz scheint auf diese Quadraturen nicht durch seine
ifferentialrechnung gekommen zu seyn, sondern durch die
klärte Transformation mit Zuziehung der von Mercator
gewandten Methode bey rationalen Functionen. In
m gedachten Briefe gebraucht er auch bey dem Incre-
ent der Area nicht das Symbol der Differentiation, son-
rn den Buchstab β, den er eine unendlich kleine Größe

bezeichnen läßt. Erſt in einem Briefe vom 21. Jun. 1677 an Oldenburg für Newton theilte Leibnitz eine Probe ſeiner neuen Rechnung mit, und macht eine Anwendung auf die Methode der berührenden, auch in dem Falle, da die Gleichung irrationale Größen enthält. Man kann nicht umhin zu bemerken, daß er in dem vorhergehenden Jahre zwey Briefe von Newton erhalten hatte, worin dieſer ihm von ſeinen analytiſchen Entdeckungen ausführlich Nachricht ertheilt, doch aber ohne ihm nur einen Wink von der Methode zu geben.

Als im J. 1682 die Acta Eruditorum ihren Anfang nahmen, war Leibnitzens erſter Beytrag dazu ein Aufſatz über die Quadratur des Kreiſes nach der vorher angeführten Formel durch die Tangente von 45 Grad. Es wird hier aber noch nichts von einer neuen Art Rechnung erwähnt. Dieſes geſchah zuerſt in den Act Erud. Oct. 1684 in der Abhandlung: Nova methodus pro Maximis et Minimis, itemque tangentibus, quae nec fractas nec irrationales quantitates moratur, et ſingulare pro illis calculi genus. Hierin trägt er ſie in der Form vor, die ſeitdem auf dem feſten Lande üblich iſt. Er zeigt, wie die Differentiale eines Products, eines Quotienten und einer Potenz von irgend einer Beſchaffenheit ausgedruckt werden; erklärt auch, wie die Vorzeichen $\pm$ hierbey zu verſtehen ſind; daß $\partial v = o$ einen größten oder kleinſten Werth der Ordinate anzeigt; daß ein mit ∂v gleichnamiges $\partial\partial v$ eine Concavität der Curve gegen die Axe, ein ungleichnamiges eine Convexität anzeige, (dieſes iſt umgekehrt zu nehmen, wie Leibnitz es ſelbſt gelegentlich verbeſſert hat), und daß bey dem Übergange der Incremente vom Abnehmen zum Zunehmen, oder von dieſem zu jenem, ein Wendungspunct vorhanden iſt, wofern die Ordinaten hier nicht einen Übergang vom Wachſen zum Abnehmen, oder umgekehrt machen, das iſt, wenn $\partial\partial v = o$ iſt, und weder v noch dv Null ſind. (Dieſes kann doch bey einem Wendungspuncte Statt finden, nämlich, wenn die Abſciſſenlinie durch den Wendungspunct geht, und hier zu-

gleich berührende ist). Leibnitz zeigt die Differentiation einer Gleichung zwischen zwey veränderlichen Größen an einem verwickelten Falle, und giebt für die Erfindung des Kleinsten ein Beyspiel aus der Optik, das Gesetz der Brechung nach einer gewissen teleologischen Annahme zu finden.

Im J. 1686 erschien in den A. E. von Leibnitz ein Aufsatz: de Geometria recondita et Analysi indivisibilium atque infinitorum. Hier gebraucht er das Zeichen $\int$ um eine aequatio summatrix auszudrücken, wie $\frac{1}{2}x^2 = \int x\partial x$; $a = \int \frac{\partial x}{\sqrt{(2x - x^2)}}$, wo x der Sinusversus des Kreisbogens a ist; desgleichen $y = \sqrt{(2x - xx)} + \int \frac{\partial x}{\sqrt{(2x - xx)}}$, wo x und y Coordinaten an der Cykloide sind. Solchergestalt könne man, bemerkt er, Gleichungen für Linien angeben, die man sonst der Berechnung nicht fähig gehalten hatte.

In diesem Aufsatze erzählt Leibnitz, wie ein Beweis des Satzes von der Größe der Oberfläche einer Kugel ihn auf das charakteristische Dreyeck an den Curven geleitet, und wie er allmählig die wahre Ergänzung der Algebra für transscendente Größen gefunden habe, seinen Calculum indefinite parvorum, den er auch Differential- oder summatorische, oder tetragonistische Rechnung nenne.

In demselben Aufsatze erwähnt Leibnitz noch seiner Methode undeterminirter Coefficienten. Newton hat sie auch gekannt. Er zeigt sie am Ende des zweyten Briefes an Oldenburg an, aber mit versetzten Buchstaben, die hernach Wallis in dem zweyten Theile seiner Werke, p. 393, verständlich gemacht hat. Newton bedient sich aber ihrer in seinen analytischen Werken nicht. Leibnitz giebt einige sehr gute und brauchbare Beyspiele in dem

Supplementum Geometriae practicae ſaepe ad problemata transſcendentia extendens, A E. 1693.

Bey dieſer Gelegenheit mag auch bemerkt werden, daß Leibnitz die Methode erfunden hat, Differentialformeln zu integriren, worin der Factor des Differentials ein rationaler Bruch iſt, nämlich durch Zerlegung in Brüche mit einfachen Nennern, wie $x + a$, wofern die Algebra dieſes leiſten mag, wodurch die Integration auf die Quadratur der Hyperbel (oder wie man jetzt auf dem feſten Lande ſagt, auf Logarithmen) gebracht wird. Er wendet dieſe Methode auch auf die Summirung von Brüchen mit endlichen Differenzen an, z. B. auf Brüche von der Form $\frac{1}{xx-1}$, wodurch er die Summe der Reihe $\frac{1}{3} + \frac{1}{8} + \frac{1}{15} + \frac{1}{24} + \text{etc.} = \frac{3}{4}$ findet.

Der Aufſatz iſt überſchrieben: Specimen novum Analyſeos pro ſcientia Infiniti, circa ſummas et Quadraturas. A. E. 1702.

Leibnitz machte von ſeiner Analyſis des Unendlichen viele ſchöne Anwendungen auf ſchwere geometriſche und mechaniſche Aufgaben, beſonders ſolche, welche die Geometer ſeiner Zeit beſchäftigten. Seine mathematiſchen Aufſätze ſind in periodiſchen Schriften zerſtreut; die meiſten ſind in den Actis Eruditorum befindlich. In dem dritten Bande ſeiner von Dütens geſammelten Schriften findet man ſie bey einander, auch ſeinen mathematiſchen Briefwechſel, den mit Joh. Bernoulli geführten ausgenommen, der in zwey Quartbänden 1745 geſammelt iſt. Leibnitz war ein allgemeiner Kopf, Rechtsgelehrter, Geſchichtskundiger, Philoſoph, Theolog, Sprachforſcher, Mathematiker, Phyſiker und mehreres; ein ausgebreiteter Briefwechſel, öffentliche Geſchäfte und Umgang mit der großen Welt nahmen einen beträchtlichen Theil ſeiner Zeit hin. Daher haben ſeine mathematiſchen Aufſätze nur die erſte noch rohe Form der Entſtehung; aber man ſieht

gleich berührende ist). Leibnitz zeigt die Differentiation einer Gleichung zwischen zwey veränderlichen Größen an einem verwickelten Falle, und giebt für die Erfindung des Kleinsten ein Beyspiel aus der Optik, das Gesetz der Brechung nach einer gewissen teleologischen Annahme zu finden.

Im J. 1686 erschien in den A. E. von Leibnitz ein Aufsatz: de Geometria recondita et Analysi indivisibilium atque infinitorum. Hier gebraucht er das Zeichen $\int$ um eine aequatio summatrix auszudrücken, wie $\frac{1}{2}x^2 = \int x \partial x$; $a = \int \frac{\partial x}{\sqrt{(2x - x^2)}}$, wo x der Sinusversus des Kreisbogens a ist; desgleichen $y = \sqrt{(2x - xx)} + \int \frac{\partial x}{\sqrt{(2x - xx)}}$, wo x und y Coordinaten an der Cykloide sind. Solchergestalt könne man, bemerkt er, Gleichungen für Linien angeben, die man sonst der Berechnung nicht fähig gehalten hatte.

In diesem Aufsatze erzählt Leibnitz, wie ein Beweis des Satzes von der Größe der Oberfläche einer Kugel ihn auf das charakteristische Dreyeck an den Curven geleitet, und wie er allmählig die wahre Ergänzung der Algebra für transscendente Größen gefunden habe, seinen Calculum indefinite parvorum, den er auch Differential- oder summatorische, oder tetragonistische Rechnung nenne.

In demselben Aufsatze erwähnt Leibnitz noch seiner Methode undeterminirter Coefficienten. Newton hat sie auch gekannt. Er zeigt sie am Ende des zweyten Briefes an Oldenburg an, aber mit versetzten Buchstaben, die hernach Wallis in dem zweyten Theile seiner Werke, p. 393, verständlich gemacht hat. Newton bedient sich aber ihrer in seinen analytischen Werken nicht. Leibnitz giebt einige sehr gute und brauchbare Beyspiele in dem

seine Differentialrechnung, so ward dieser doch fast durchgehends als Erfinder der neuen Rechnung des Unendlichen angesehen, sogar daß sie nach ihm die Leibnitzische Rechnung genannt wurde. England selbst lernte sie früher in der Form, welche Leibnitz ihr gegeben hatte, kennen, als in der Newtonischen. Craig, ein Schottländer, gebrauchte in seiner Schtift: Methodus figurarum lineis rectis et curvis comprehensarum quadraturas determinandi, Lond. 1685, bey der Auflösung einer Aufgabe die Leibnitzische Differentialrechnung. In einer spätern Schrift: de Figurarum curvilinearum quadraturis et locis geometricis, Londini 1693, rühmt er Leibnitzens Differentialrechnung als eine herrliche Erweiterung der höhern Geometrie, und gesteht, daß ohne dieselbe seine Untersuchungen ihm sehr schwer geworden seyn würden. Er gebraucht auch die Leibnitzische Bezeichnungsart. Bis dahin war also Newtons Fluxionen-Methode in England selbst nicht bekannt. Es war auch erst im J. 1693, daß Wallis in dem zweyten Theile seiner Werke, worin die Algebra enthalten ist, einiges davon öffentlich mittheilte.

Dies veranlaßte Wallis, daß er Newton ermahnte, die beiden Briefe an Oldenburg, welche Leibnitz mitgetheilt erhalten hatte, bekannt zu machen, weil seine Methode der Fluxionen unter dem Namen der Leibnitzischen Differentialrechnung mit großem Beyfall aufgenommen würde. Er bemerkte deshalb in der Vorrede zu dem ersten Theile seiner Werke, der 1695, später als der zweyte, erschien, ausdrücklich, daß die von Leibnitz sogenannte Differentialrechnung mit der Newtonischen Fluxionenrechnung, wovon er in der Algebra, in dem zweyten Theile seiner Werke, einen Abriß gegeben habe, überein komme. Leibnitz habe die Methode im J. 1676 in zwey Briefen von Newton mitgetheilt erhalten. Die beiden Briefe ließ Wallis in dem dritten Bande seiner Werke, 1699, abdrucken. Der Abriß, den er von der Fluxionen-Rechnung aus jenen Briefen in der Algebra giebt, möchte doch für sich unverständlich seyn.

Allein einige Jahre nachher behauptete Nicol. Fatio
: Duillier aus Genf, der in England lebte, nicht
lein, daß Newton lange Zeit vor Leibnitz die Rechnung
s Unendlichen erfunden hätte, sondern fügte noch hinzu,
ß er es denen, die Newtons Briefe und handschriftliche
bhandlungen gesehen hätten, überlassen wolle zu beur-
eilen, was Leibnitz als zweyter Erfinder der Rechnung
n Newton erborgt haben möchte. Dieses geschah in
ner Schrift über die Linie des schnellsten Falles und das
olidum des geringsten Widerstandes, London 1699.
ibnitz antwortete auf diese für ihn sehr nachtheilige Äuße-
ng ziemlich lebhaft, und gab zu verstehen, Duillier
öchte es übel genommen haben, daß er ihn nicht unter
enjenigen genannt hätte, von welchen die Aufgabe über
ie Linie des schnellsten Falles aufgelöset war, oder wahr-
heinlich hätte aufgelöset werden können, wenn sie sich
rum bemüht hätten. Er bezeugt die größte Hochach-
ng für Newton, und beruft sich darauf, daß dieser
lbst in den Principien der Naturwissenschaft (Schol.
emmatis 2. prop. 7. L. II.) im J. 1687 anführe,
n ihm vor zehn Jahren eine Methode mitgetheilt erhal-
n zu haben, die von der seinigen kaum anders als in den
usdrücken und Bezeichnungen, und noch in der Vorstel-
ngsart von der Entstehung der Größen verschieden sey.
r habe im J. 1684, als er seine Rechnung bekannt
achte, von Newtons Erfindung nichts weiter gewußt,
ls was dieser ihm von dem Gegenstande derselben angezeigt
ätte.

Vermuthlich wäre durch diesen Angriff auf Leib-
itzens Ehre, der von Privatabsichten herzurühren scheinen
ußte, das gute Vernehmen zwischen Newton und Leib-
itz nicht gestört worden, wenn nicht in Deutschland selbst
ald darauf die Veranlassung zu einem heftigen gelehrten
rozesse, der fast national ward, gegeben worden wäre.
lls Newtons Tractat von der Quadratur der krummen
inien mit seinem Werk über die Optik 1704 erschienen
ar, druckte sich der Recensent dieser Schriften in den
ct. Erud. 1705 über Newtons Erfindungsrecht an die

Infinitesimalrechnung etwas zweydeutig aus. Anstatt der Leibnitzischen Differentiale, sagte er, werden von Newton Fluxionen gebraucht, und sind immer gebraucht worden, wovon er sowohl in seinen Principien als in andern Schriften eine schöne Anwendung macht, so wie auch Honoratus Fabri in seiner Synopsis geometrica die Cavalerische Methode mit der fortschreitenden Bewegung vertauscht hat (substituit). Die Verehrer Newtons legten diese Stelle dahin aus, daß so wie Fabri seine Methode von Cavaleri entlehnt habe, so hätte auch Newton seine Fluxionen-Rechnung von Leibnitz genommen. Leibnitz erklärte zwar, daß dieses nicht der Sinn sey. Allein Keill, Professor der Astronomie zu Oxford, behauptete nun sogar in den Philosophical Transactions, 1708. Newton sey nicht bloß der Erfinder der Fluxionen-Methode, sondern Leibnitz habe nach dieser die seinige gebildet, mit Veränderung der Ausdrücke und der Bezeichnung.

Leibnitz beschwerte sich wegen dieser Beschuldigung bey der Societät zu London. Keill suchte seine Behauptung ausführlich zu rechtfertigen. Als Leibnitz seine Beschwerde bey der Societät wiederholte, setzte diese einen Ausschuß nieder, um die in ihrem Archiv befindlichen Briefe und Schriften, welche über die Streitfrage Licht geben könnten, durchzusehen, und der Societät davon Bericht zu erstatten. Der Bericht der Commissarien fiel dahin aus, daß die Differential- und Fluxionen-Methode wesentlich nicht verschieden seyn, und daß die eigentliche Frage hier sey, nicht, wer diese oder jene Methode erfunden habe, sondern wer der erste Erfinder der Methode sey. Sie glaubten, daß diejenigen, welche Leibnitz für den ersten Erfinder hielten, wenig oder nichts von seinem frühen Briefwechsel mit Collins und Oldenburg erfahren haben, und nicht wissen möchten, daß Newton die Methode schon seit länger als funfzehn Jahre erfunden gehabt hätte, wie Leibnitz sie in den Actis Eruditorum bekannt zu machen anfieng. Daher habe Keill durch seine Behauptung, daß Newton der erste Erfinder sey, gar nichts beleidigendes gegen Leibnitz gesagt. Ob Leibnitz auf seine

Methode durch sich selbst gekommen sey, lassen sie ganz unberührt; inzwischen geben sie doch in den drey ersten Artikeln des Berichts zu verstehen, daß er bey seiner zweymahligen Anwesenheit in England, und durch den Briefwechsel, den er mit Newton und Collins mittelbar durch Oldenburg unterhalten, hinlängliche Winke von Newtons Methode bekommen haben möchte. Die Societät ließ alle auf die Streitfrage sich beziehenden Briefe, zum Theil Stellenweise, mit der Newtonischen Schrift: Analysis per aequationes numero terminorum infinitas, die Collins im J. 1669 durch Barrow mitgetheilt erhalten hatte, nebst dem Berichte der Commission abdrucken, und an die vorzüglichsten Mathematiker in Europa versenden. Der Titel ist: Commercium epistolicum D. Joh. Collins et aliorum de Analysi promota, jussu Societatis regiae in lucem editum. Londini 1712. 4. Diese Ausgabe ist gar nicht in den Buchhandel gekommen; auch sind nur wenige Abdrücke gemacht, daher sie sehr selten ist. Es ist 1725 eine zweyte Ausgabe erschienen, welche eine sehr ausführliche, gegen Leibnitz bittere Recension der Sammlung aus den Transactionen im J. 1715 enthält. Der Titel dieser Ausgabe ist: Commercium epistolicum de varia re mathematica inter celeberrimos praesentis saeculi Mathematicos, ... Londini, 1725. 8. Diese ist in dem vierten Bande der Horsleyischen Ausgabe von Newtons Werken eingerückt. In derselben sind viele gegen Leibnitz gerichtete Anmerkungen enthalten. Herr Professor Pfleiderer hat die Güte gehabt, auf meine Bitte die Original-Ausgabe mit dem Abdrucke in der Horsleyischen Ausgabe zu vergleichen. Es sind hier einige kleine Zusätze mit wenigen Worten gemacht, die aber unbedeutend sind, außer einem einzigen, worin gesagt wird, daß Leibnitz irrationale Exponenten der veränderlichen Größen, die Newton in einem Beyspiele gebraucht, in Fluenten umgewandelt, und daraus die Exponentialrechnung gebildet habe, eine sehr ungegründete und unbillige Vermuthung. In der Recension wird gerade zu behauptet, Leibnitz habe seine Differen-

Auch Engländer treten diesem Urtheile bey, als Waring in seinen meditationibus analyticis, Cantabr. 1785, (s. Käſtners Anal. des Unendl. S. 49. und Götting. gel. Anz. 1786. S. 700.). Hutton in seinem mathem. u. phyſik. Wörterbuche äußert zwar, man habe vielen Grund zu vermuthen, daß Leibnitz einige ihm mitgetheilte Papiere und Aufſätze benutzt haben möge, erinnert aber hernach, daß auch nach einiger Urtheil ſtarke Gründe vorhanden ſeyn, zu glauben, daß Leibnitz ſeine Methode ſelbſt erfunden habe. Denn in ſeiner Theoria motus abſtracti vom J. 1671, ehe er etwas von Newtons Sachen geſehen haben konnte, nehme er ſchon unendlich kleine Größen an, die unter ſich ungleich ſeyn, welches einer der vornehmſten Grundſätze ſeiner Methode ſey.

Leibnitz iſt vielleicht durch den zweyten Brief an Newton, den vom 24. Octob. 1676, worin viele wichtige Mittheilungen, aber ohne Beweis und Nachricht von ihren Gründen, gemacht waren, gereizt worden, der Sache anhaltend nachzudenken, und ſeine Ungeduld, deren er ſich irgendwo ſelbſt anklagt, zu bezwingen. Den Zeitpunct von 1676 giebt er ſelbſt, in dem oben angeführten Briefe an die Gräfinn von Kielmannsegg, an, ſo viel er ſich damahls noch erinnern konnte. Was er übrigens daſelbſt von der Art, wie er zu ſeiner Differentialrechnung gekommen, erzählt, ſtimmt ſehr wohl zu dieſer Vorſtellung. Darum hat er aber nicht ſeine Rechnungsmethode nach der Newtoniſchen gebildet, da er von dieſer nichts erfahren hatte, und vielmehr, wie aus ſeinem Briefe vom 27. Auguſt 1676 erhellt, ſchon die Differenzenrechnung zu Quadrirungen, bey rationalen Ordinaten, nach Mercators Verfahren bey der Hyperbel, gebrauchte. Man braucht daſelbſt in dem Werthe des Rectangels nur dx für β zu ſetzen, ſo hat man das Differential einer Area. Eben daſelbſt kommt die Integration der Formel $\partial a . \cos a$ als Summirung vor, nachdem für $\cos a$ eine Reihe geſetzt iſt, nur daß hier noch nichts von Differentialen und deren Bezeichnung ſich findet.

Das Zeugniß, welches Newton in dem Scholium des
mma II. Princip. L. II. Leibnitzen giebt, ist von Wichtig-
, wenn gleich Newton in der Folge, als er mit Leib-
zerfallen war, es nur als ein Verwahrungsmittel für
Eigenthum angesehen haben will. Denn es zeigt,
er Leibnitzen nichts mitgetheilt hatte, was auf seine
thode hätte leiten können, und daß er auch voraussetz-
es sey demselben von andern nichts eröffnet worden.
ist ein Zug von Newtons feiner und edler Denkungs-
, daß er einem andern, ja einem Ausländer, das Mit-
t an eine Erfindung öffentlich versichern will. Die
e Ausgabe der Principien ist vom J. 1687. In der
yten vom J. 1713 zu Cambridge, wovon die zu Am-
dam 1714 ein Nachdruck ist, ist jenes Zeugniß noch
en geblieben; aber in der von 1726 ist es durch den
ausgeber, Pemberton, weggelassen, gleichsam, als
n Newtons Freunde ein für ihn nachtheiliges Acten-
hätten vernichten wollen.

Die beiden Briefe Newtons vom J. 1676 an Ol-
burg für Leibnitz enthalten nur Resultate seiner Me-
e, nichts von ihr selbst. Ein kurzer Brief von New-
an Collins, der Leibnitzen im J. 1676 mitgetheilt ist,
hält nur die Formel für die Subtangente an einer
ve, bloß in einem leichten Falle, woraus sich noch
ts von dem Verfahren selbst ergab. Die Form seiner
initesimal-Rechnung mußte er offenbar selbst erfinden;
Methode aber auch, welches ihm freylich dadurch er-
tert ward, daß er manche Sätze, die dadurch schon
England gefunden waren, mitgetheilt bekommen hatte.

Man hat gesagt, Leibnitz möchte wohl, als er in Lon-
war, die erste Schrift von Newton, Analysis per
uationes, etc. bey Collins gesehen haben. Eine
muthung ist kein Beweis. In dieser Schrift wird
keine Vergleichung der verschwindenden Differenzen
acht, daher auch noch nichts von Fluxionen darin er-
nt wird. Die darin am Ende vorgetragene Methode,
umlinichte Figuren zu quadriren, ist der von Fermat
berührende an einer Curve gebrauchten ganz ähnlich,

wie die oben gegebene Nachricht von dieſer Schrift es zeigt. Eine Abſchrift von derſelben hat Leibnitz nicht erhalten. Denn in einem Briefe vom 27. Aug. 1676 fragt er an, wie Newtons Reverſions-Methode beſchaffen ſey, als in dem Falle, wenn die Zahl aus dem Logarithmen gefunden werden ſoll. Dieſes iſt in der Abhandlung deutlich gewieſen, da von der Reihe für die Zahl die erſten fünf Glieder darin berechnet ſind.

Man kann dagegen fragen, wo die Aufſätze, welche Leibnitz bey ſeiner zweyten kurzen Anweſenheit in London Collins für Newton zugeſtellt hat, geblieben ſeyn. Jener erwähnt ſie in einem Briefe an Newton. Vielleicht hätten dieſe noch einige Aufſchlüſſe gegeben.

So wie man ohne Bedenken Newtons Nachrichten von ſeinen Erfindungen Glauben beymißt, ſo muß billig daſſelbe auch für Leibnitz geſchehen. Ein Mann von dem großen, viel umfaſſenden, wirkſamen Geiſte, wie Leibnitz, brauchte nicht fremde Erfindungen ſich zuzueignen, und ſeine Denkungsart war zu edel, oder wenigſtens zu ſtolz, um ſich dazu herabzulaſſen Die Leichtigkeit, womit Leibnitz verſchiedene ſchwere Aufgaben aus der Geometrie und Mechanik durch die Analyſis des Unendlichen auflöſete, zeigt, daß er nicht eine erborgte Methode befolgte, von welcher damahls noch wenig, oder eigentlich gar nichts bekannt gemacht worden war.

Ungeachtet mancherley fremdartiger Beſchäftigungen ſuchte Leibnitz ſeine neue Analyſis weiter zu treiben, und ihre Wichtigkeit durch Anwendungen auf ſchwere Aufgaben zu zeigen. Hiezu vereinten ſich bald mit ihm zwey vortreffliche Männer, die beiden Brüder, Jakob und Johannes Bernoulli. Jener war zuerſt der Lehrer ſeines Bruders, der bald mit ihm zu wetteifern im Stande war, und bey einem etwas eigenſüchtigen Charakter ſich ſogar auf eine beleidigende Art über ihn zu erheben ſuchte. Der ältere Bernoulli beſaß mehr Erfindungskraft, die er durch manche ihm eigenthümliche Unterſuchungen bewieſen hat; dagegen der jüngere größere Gewandtheit in der Be-

handlung schwerer Fragen hatte. Dieser hat mehr geliefert als jener, ist aber auch 30 Jahre älter geworden als sein Bruder, der in einem Alter von 50 Jahren starb. (Bossüt in der Vorrede zu seiner Differential- und Integral-Rechnung).

Diesen beiden großen Analysten ist man eine meisterhafte, von Leibnitzen selbst anerkannte und öffentlich gerühmte Bearbeitung der neuen Rechnung, und ihre Verbreitung besonders auf dem festen Lande schuldig. Es wurde, nach Leibnitzens Vorgang, nun gewöhnlich, daß die Mathematiker sich gegenseitig schwere Aufgaben vorlegten. Dieses vermehrte die Theilnahme an der Wissenschaft, indem es zugleich ein vortreffliches Übungsmittel war. Unter diesen Aufgaben zeichnen sich aus die über die Isochrona, und Isochrona paracentrica von Leibnitz, über die Kettenlinie von Jakob Bernoulli, über die Linie des schnellsten Falles (Brachystochrona) von Joh. Bernoulli; das problema isoperimetricum von dem ältern Bernoulli, wodurch dieser die Zudringlichkeiten seines Bruders zurückzuhalten suchte. Auch ein braver Veteran in der alten Geometrie, Viviani, legte den neuen Analysten zur Prüfung ihrer Methode, die unter dem Namen Aenigma Florentinum bekannte Aufgabe vor. Leibnitz und Jakob Bernoulli löseten sie noch an demselben Tage auf, an welchem sie das Programm von Viviani erhielten. Der Marquis de l'Hopital, ein Zögling des Johannes Bernoulli, trug zur Bekanntmachung der neuen Analysis viel bey, durch seine Analyse des infiniment petits pour l'intelligence des lignes courbes, à Paris 1696, 181 pag. in 4. zweyte ungeänderte Auflage 1715, ohne den Namen des Verfassers. Sie enthält nur die Differentialrechnung mit ihrer Anwendung auf geometrische Fragen. Stone übersetzte sie ins Englische, und fügte die Integralrechnung hinzu. The method of fluxions both direct and inverse. London 1730. Die Integralrechnung aus diesem Werke ist ins Französische übersetzt. Analyse des infiniment petits, comprenant le Calcul intégral, par Rondet, à Paris 1735.

tialrechnung ganz von Newtons Fluxionen-Methode hergenommen.

Ein Gutachten über das Commercium epistolicum, worin die Vermuthung geäußert wird, daß Newton seine Fluxionenrechnung gar wohl nach der Differentialrechnung gebildet haben möchte, und ein Fehler, den Newton wirklich in Absicht auf die Werthe der höhern Differentiale begangen hatte, mit zum Grunde dienen soll, ward ohne Benennung des Verfassers und Ortes gedruckt, auch ohne des Verfassers, Joh. Bernouilli's, Wissen, der Leibnitzen ausdrücklich ersucht hatte, ihn nicht in den Handel zu ziehen. (Das Original ist in dem Commercio philos. et mathem. Leibnitzii et Jo. Bernoulli, T. II. p. 305 befindlich). Keill antwortete darauf, wie leicht zu erachten ist, heftig. Chamberlayne in England suchte Newton und Leibnitz auszusöhnen, allein ohne Erfolg. Leibnitz scheint vielmehr das Mißverständniß auf neue rege und größer gemacht zu haben, durch einen Brief an den Abbé Conti, der sich damahls in England aufhielt, und der gemeinschaftliche Freund seyn wollte. Er beschwerte sich darin, daß man durch gezwungene Auslegungen seine Wahrheitsliebe zweifelhaft zu machen suchte, und die Streitfrage veränderte, indem man die Reihen herbeyzöge, worin er Newton den Vorgang nicht streitig mache; ja er gab zu verstehen, daß Newton die Charakteristik und den Algorithmus für unendlich kleine Größen vor ihm nicht möchte gehabt haben, wie Bernouilli ganz richtig geurtheilt hätte. Hier entdeckte er den Verfasser des vorher angeführten Gutachtens. Zugleich breitete er sich umständlich über Newtons physikalische Grundsätze aus, die er für befremdend und unhaltbar erklärte. Der Brief ward Newton mitgetheilt, da Leibnitz es Conti erlaubt hatte. Newton antwortete hierauf in einem an Conti gerichteten Schreiben, welches Leibnitz erwiederte, worauf Newton die Vertheidigung wieder ausführlich beantwortete. Tantaene animis coelestibus iae! mag man zwar bey diesem Briefwechsel sagen; doch ward der Streit auf eine sehr gemäßigte Art geführt in Vergle-

chung mit den schriftstellerischen Balgereyen zu unsern Zeiten. Leibnitzens Tod, der am 14. Novemb. 1716 erfolgte, machte dem Streit ein Ende. Die Acten dieses gelehrten Prozesses findet man in dem vorher angeführten Commercium epistolicum, in dem dritten Theile von Leibnitzens Werken, in dem Recueil de diverses pieces sur la philosophie, etc. par Des Maizeaux, T. II. und in dem Journal litéraire, das damahls im Haag heraus kam. Eine ausführliche Relation daraus ist in Leibnitzens Lebensbeschreibung von Jaucourt anzutreffen, und dem gedachten Theile von seinen Werken beygefügt. Die Lebensbeschreibung selbst ist der von Neufville besorgten Ausgabe der Theodicee, Amsterdam 1734, ohne Benennung ihres Verfassers vorgesetzt. Wer der Verfasser der Recension in den Actis Erud. die zu dem Streite den nächsten Anlaß gegeben, gewesen sey, ist nicht bekannt geworden. Leibnitz läßt in den Briefen, wo er den wahren Sinn der zweydeutigen Stelle erklärt, sich gar nicht darüber aus, ob er selbst oder ein anderer Verfasser sey. In dem Exemplar der Actorum, das auf der Göttingischen Bibliothek befindlich ist, und die Namen der Recensenten beygeschrieben enthält, wird G. G. Leibnitzius als Verfasser angegeben, nach Kästners Bericht in der Anal. des Unendl. 3te Ausg. S. 44.

Gegenwärtig möchte fast allgemein über diese durch den Gegenstand und durch die Hauptpersonen merkwürdige Streitfrage das Urtheil dahin ausfallen, daß Newton ohne allen Zweifel seine Fluxionen- und Fluentenrechnung lange vorher, als Leibnitz seine Differentialrechnung bekannt machte, erfunden habe; daß aber auch Leibnitz von dem Verdachte, die Fluxionenrechnung sich zugeeignet, und nur in der Form verändert zu haben, gänzlich frey zu sprechen sey. So urtheilen Montücla in der ersten und zweyten Ausgabe der Geschichte der Mathematik; d'Alembert in der Encyclopédie méthodique; la Croix und Bossut in den Vorreden zu ihren Traités de calcul différentiel et intégral. Bossut ist in der Vertheidigung der Ansprüche von Leibnitz umständlich.

wie die oben gegebene Nachricht von dieſer Schrift es zeigt. Eine Abſchrift von derſelben hat Leibnitz nicht erhalten. Denn in einem Briefe vom 27. Aug. 1676 fragt er an, wie Newtons Reverſions-Methode beſchaffen ſey, als in dem Falle, wenn die Zahl aus dem Logarithmen gefunden werden ſoll. Dieſes iſt in der Abhandlung deutlich gewieſen, da von der Reihe für die Zahl die erſten fünf Glieder darin berechnet ſind.

Man kann dagegen fragen, wo die Aufſätze, welche Leibnitz bey ſeiner zweyten kurzen Anweſenheit in London Collins für Newton zugeſtellt hat, geblieben ſeyn. Jener erwähnt ſie in einem Briefe an Newton. Vielleicht hätten dieſe noch einige Aufſchlüſſe gegeben.

So wie man ohne Bedenken Newtons Nachrichten von ſeinen Erfindungen Glauben beymißt, ſo muß man daſſelbe auch für Leibnitz geſchehen. Ein Mann von ſo großen, viel umfaſſenden, wirkſamen Geiſte, wie Leibnitz, brauchte nicht fremde Erfindungen ſich zuzueignen, und ſeine Denkungsart war zu edel, oder wenigſtens zu ſtolz, um ſich dazu herabzulaſſen. Die Leichtigkeit, womit Leibnitz verſchiedene ſchwere Aufgaben aus der Geometrie und Mechanik durch die Analyſis des Unendlichen auflöſete, zeigt, daß er nicht eine erborgte Methode befolgte, von welcher damahls noch wenig, oder eigentlich gar nichts bekannt gemacht worden war.

Ungeachtet mancherley frembartiger Beſchäftigungen ſuchte Leibnitz ſeine neue Analyſis weiter zu treiben, und ihre Wichtigkeit durch Anwendungen auf ſchwere Aufgaben zu zeigen. Hiezu vereinten ſich bald mit ihm zwey vortreffliche Männer, die beiden Brüder, Jakob und Johannes Bernoulli. Jener war zuerſt der Lehrer ſeines Bruders, der bald mit ihm zu wetteifern im Stande war, und bey einem etwas eigenſüchtigen Charakter ſich ſogar auf eine beleidigende Art über ihn zu erheben ſuchte. Der ältere Bernoulli beſaß mehr Erfindungskraft, die er durch manche ihm eigenthümliche Unterſuchungen bewieſen hat; dagegen der jüngere größere Gewandtheit in der Be-

andlung schwerer Fragen hatte. Dieser hat mehr geliefert als jener, ist aber auch 30 Jahre älter geworden als sein Bruder, der in einem Alter von 50 Jahren starb. Bossüt in der Vorrede zu seiner Differential- und Integralrechnung).

Diesen beiden großen Analysten ist man eine meisterhafte, von Leibnitzen selbst anerkannte und öffentlich gerühmte Bearbeitung der neuen Rechnung, und ihre Verbreitung besonders auf dem festen Lande schuldig. Es wurde, nach Leibnitzens Vorgang, nun gewöhnlich, daß die Mathematiker sich gegenseitig schwere Aufgaben vorlegten. Dieses vermehrte die Theilnahme an der Wissenschaft, indem es zugleich ein vortreffliches Übungsmittel war. Unter diesen Aufgaben zeichnen sich aus die über die Isochrona, und Isochrona paracentrica von Leibnitz, über die Kettenlinie von Jakob Bernoulli, über die Linie des schnellsten Falles (Brachystochrona) von Joh. Bernoulli; das problema isoperimetricum von dem ältern Bernoulli, wodurch dieser die Zudringlichkeiten seines Bruders zurückzuhalten suchte. Auch ein braver Veteran in der alten Geometrie, Viviani, legte den neuen Analysten zur Prüfung ihrer Methode, die unter dem Namen Aenigma Florentinum bekannte Aufgabe vor. Leibnitz und Jakob Bernoulli löseten sie noch an demselben Tage auf, an welchem sie das Programm von Viviani erhielten. Der Marquis de l'Hopital, ein Zögling des Johannes Bernoulli, trug zur Bekanntmachung der neuen Analysis viel bey, durch seine Analyse des infiniment petits pour l'intelligence des lignes courbes, à Paris 1696, 181 pag. in 4. zweyte ungeänderte Auflage 1715, ohne den Namen des Verfassers. Sie enthält nur die Differentialrechnung mit ihrer Anwendung auf geometrische Fragen. Stone übersetzte sie ins Englische, und fügte die Integralrechnung hinzu. The method of fluxions both direct and inverse. London 1730. Die Integralrechnung aus diesem Werke ist ins Französische übersetzt. Analyse des infiniment petits, compreant le Calcul intégral, par Rondet, à Paris 1735.

162 pag. in 4. Joh. Bernoulli hat an diesem Werke viele Fehler gerügt. Opp. T. IV. pag. 169—192. Zur Fortsetzung jenes Werkes ist auch bestimmt Traité du Calcul intégral par M. de Bougainville, 2 vols, à Paris 1754. 56. 326. und 246 pag. in 4. Die ältern Methoden sind darin deutlich und ordentlich vorgetragen. Als eine Fortsetzung des von l'Hopital gelieferten Werks können auch die Lectiones mathematicae von Joh. Bernoulli, welche dieser bey seinem Aufenthalte in Paris 1691 und 1692 für den Marquis ausgearbeitet hat, angesehen werden. Sie sind aber erst in der Sammlung der Bernoullischen Werke, im dritten Bande, 1742 im Druck erschienen. Vielleicht hatte Bernoulli auch Antheil an l'Hopitals Werke; er hätte nur nicht nach dessen Tode seine Ansprüche daran geltend zu machen suchen sollen.

Die Leibnitzische Differentialrechnung erregte anfangs einige Bedenklichkeit wegen der unendlich kleinen Größen, die darin angenommen werden. Nieuwentiit, der Verfasser eines großen physiko-theologischen Werkes, schrieb Considerationes circa Analyseos ad quantitates infinite parvas applicatae principia, et calculi differentialis usum in resolvendis problematibus geometricis. Amstel. 1694, und considerationes secundas. 1696. Es war ein Mißverstand, daß er die Differentiale höherer Ordnungen nicht zugeben wollte. Leibnitz zeigte ihm den Grund davon leicht. Nieuwentiit macht in der erstern Schrift, S. 8, gegen Barrows Methode der berührenden den Einwurf, daß das Verhältniß der unendlich kleinen Differenzen der Coordinaten entweder gar keines oder das der Gleichheit seyn müsse. Doch hat dieser Mann eine Analysis Infinitorum, Amstel. 1695, geschrieben. Die Bescheidenheit, womit er seine Bedenklichkeiten vorträgt, erwirbt ihm Recht auf Nachsicht, wenn sie nicht, nach den neuesten Principien, für Bewußtseyn von Schwäche zu halten ist.

In der französischen Akademie der Wissenschaften entstand ein lebhafter und langwieriger Streit über die

neue Infinitesimalrechnung. Der vornehmste Gegner war Rolle, ein sehr geschickter Algebraist, der aber für seine Meynungen ganz besonders eingenommen, sehr übereilt und mißgünstig gegen andere wegen ihren Erfindungen war. Er wollte zeigen, daß die Differentialrechnung bey den berührenden in vielfachen Puncten, und in einigen Fällen des Größten und Kleinsten kein Genüge thue, oder gar irriges angebe. (Remarques de M. Rolle touchant le problème général des tangentes, à Paris 1703. 47 pag. 4.). Varignon und Saurin brachten ihn endlich von seinen Vorurtheilen zurück. Er beichtete sogar, daß er auf einiger anderer Antrieb die Differentialrechnung angegriffen hätte.

Späterhin (1734) stand Berkley, Bischof von Cloyne, der warme Anpreiser des Theerwassers und Gegner der Wirklichkeit der Materie, gegen die Mathematik überhaupt und die Infinitesimalrechnung insbesondere auf. In einer Schrift betitelt, the Analyst, behauptete er, die Geometer seyn gegen die Lehren der Religion ungläubig, und glaubten doch an die Geheimnisse der Fluxionenrechnung, die auf dunkle und irrige Grundsätze gebauet sey, und nur in so fern richtige Resultate gebe, als ein Irrthum den andern aufhöbe. Hierauf antworteten Middleton und Smith, beide Professoren zu Cambridge, in einer Schrift: Geometry no friend to infidelity, by Philalethes Cantabrigiensis, London 1734; hernach Wilson, Professor der Mathematik zu Dublin, und Benjamin Robins, der Verfasser einer wichtigen Schrift über die Geschützkunst. Der letztere gerieth mit den beiden zuerst genannten in einen lebhaften Streit über die Erklärung von Newtons Infinitesimalrechnung. Die Schrift von Robins (Discourse concerning the nature and certainty of Sir Isaac Newton's method of fluxions, and of prime and ultimate ratios) nebst seinen Vertheidigungsschriften ist in dem zweyten Bande der Sammlung seiner Abhandlungen, London 1761, 2 Bde. enthalten. In diesem findet sich auch vieles über den Streit zwischen Newton und

Leibnitz, nebst ungünstigen Äußerungen über die Differentialrechnung und die Analysten auf dem festen Lande.

Durch diesen neuen Angriff auf die Rechnung des Unendlichen scheint Maclaurin veranlaßt worden zu seyn, sein berühmtes Werk über die Flurionen zu verfassen. (A treatise of fluxions, Edinburgh, 1742. 2 vols. 4. zusammen 754 S.). Sein Zweck war, die Methode der Fluxionen auf eine eben so augenscheinliche und unwidersprechliche Art zu begründen, als die alten Geometer bey ihren Beweisen verfahren, und dabey von leichtern Begriffen und Sätzen auszugehen, als der Erfinder der Fluxionen nöthig gefunden hatte. Dieses Verfahren macht die Beweise weitläuftig und sehr anstrengend. Allein, wenn man sich schon eine zuverlässige Kenntniß der Infinitesimalrechnung sonst erworben hat, wird man das scharfsinnige Werk, besonders wegen der Anwendungen in der mathematischen Physik mit großem Nutzen lesen, und dabey das bloß zur Methode gehörige übergehen können.

Die Exponentialrechnung ward sehr bald nach der Differentialrechnung erfunden, sowohl von Joh. Bernoulli als Leibnitz, unabhängig von einander, zufolge des Commerc. epist. T. I. p. 8. 10. u. m. Bernoulli hatte krumme Linien erdacht, in deren Gleichungen die eine der Coordinaten der Exponens einer Potenz ist. Diese nannte er curvas percurrentes, weil darin diese Potenz alle mögliche Dimensionen durchläuft, und daher auch die Rechnung, welche sich damit beschäftigt, calculum percurrentem, wofür hernach die schicklichere Benennung, calculus exponentialis eingeführt ist. Die erste Abhandlung darüber von Bernoulli erschien in den Act. Er. 1697. Mart. In den Opp. T. I. p. 179.

Leibnitz erweiterte die Differentialgleichung noch dahin, daß er in einer Differentialgleichung für eine Function von x eine der beständigen Größen als veränderlich betrachtete, und daraus das Differential der Function für ein gegebenes x, zufolge der Veränderung der zuerst als unveränderlich betrachteten Größe, herleitete. Z. B. das Differential des Bogens einer Curve ist ge-

ben; man sucht das Differential des Bogens, der zu selben Abscisse mit jenem gehört, in Beziehung auf eben selben, bey einer unendlich kleinen Veränderung einer Constanten in der Gleichung für die Curve. Hier- s leitete Leibnitz eine Methode her, eine krumme Linie ziehen, die auf einer stetigen Folge von krummen Linien erley Art, mit gemeinschaftlicher Axe, und einem ge- inschaftlichen Puncte für alle auf derselben, gleiche Bo- n von jenem Puncte an abschneidet. Die Veranlassung dieser Untersuchung hatte Joh. Bernoulli gegeben in em Briefe an Leibnitz, worin er eine allgemeine Me- ode wünscht, berührende an eine Curve zu ziehen, deren uncte durch Quadraturen stetig neben einander geordne- Curven bestimmt werden. (Quadraturen sind Functio- n, wie Längen, Flächenräume, Fallzeiten, die nicht mittelbar in endlichen Größen, sondern durch Integra- n einer Differentialfunction gegeben werden). Leibnitz nnte diese Methode differentiatio de curva in cur- m. (Commerc. epist. LIX. LX. im J. 1697). r bemerkt, daß dieses Verfahren von größerer Wichtig- t sey, als man zuerst vermuthen möchte; daher es wohl than seyn würde, andern die Frage nicht vorzulegen, ch bekannt zu machen, daß er und Bernoulli sie aufzu- en wüßten, sondern zu warten, bis daß sie selbst die ntersuchung hinlänglich ausgeführt hätten. Bernoulli zeugte große Freude über diese neue analytische Aussicht, d zugleich ein freundschaftliches Mißvergnügen, daß ibnitz das Geheimniß ganz entdeckt hätte, dem er selbst ch auf die Spur gekommen sey. Dies war bey der ntersuchung über die Synchrona geschehen. Nach Leib- tzens Tode maaßte Bernoulli sich die Ehre der Miterfin- ng der Methode an, wovon er freylich viele schöne An- endungen gemacht hat. Sein Bruder war aber auch f diese Methode gekommen, wie zwey Aufsätze in den ct. Erud. May 1698, und ein anderer, im Journ. s Sc. Aug. 1698. (Opp. T. II. p. 785. 796. 829.) igen. In dem letztern ist die Auflösung der Aufgabe, e berührenden an eine Linie zu ziehen, welche an unendlich

vielen Curven von einerley Art gleiche Bogen abschneidet, in einem Anagramm versteckt, dessen Erklärung a. a. O. p. 1021 sich findet. S. Differentialgleichung und Trajectoria.

Die Entwickelung der Functionen einer veränderlichen Größe mittelst der successiven Differentiale, welche Taylor lehrte, ward das Band zwischen der Analysis des Unendlichen und des Endlichen, indem sein Lehrsatz zeigt, wie man durch die unendlich kleinen Differenzen zu der endlichen Differenz einer Function in Beziehung auf die endliche Differenz der Functionalgröße gelangen könne, welches bey transscendenten Functionen wichtig ist.

Da zwar zu jeder Gleichung zwischen endlichen Größen die Differentialgleichung gefunden werden kann, aber nicht umgekehrt jede Differentialgleichung aus einer Gleichung zwischen endlichen Größen entstanden seyn muß, so ist es wichtig, bey einer vorgegebenen Differentialgleichung mit Gewißheit bestimmen zu können, ob sich zu ihr eine Integralgleichung finden lasse, oder ob es nothwendig sey, ihr eine andere Form zu geben, wie durch Zufügung eines Factors, damit sie nun aus einer Gleichung zwischen endlichen Größen entstanden seyn könne. Man hatte fast funfzig Jahre hindurch mancherley künstliche Integrationen ausgeführt, ohne darauf bedacht zu seyn, die vorläufige Bedingung der Integrabilität fest zu setzen. Man hatte in den Fällen, wo eine Differentialgleichung widerspänstig war, ihre Form geändert, und sie auf solche Art oft aufgelöset. Erst gegen das J. 1740 entdeckte man die Bedingungen der Integrabilität der Differentialgleichungen. Dieses geschah fast zu gleicher Zeit von Euler, Fontaine und Clairaut. Euler ist in der That der erste gewesen, der diese Bedingungen gefunden hat, wie Bossut in der Einleitung zu seinem Werke über die Differential- und Integralrechnung einräumt. Die beiden andern Geometer haben aber von dem, was Euler in seiner Mechanik schon beygebracht hatte, nichts gewußt.

Die Differentialrechnung und ihre Anwendungen ausführlich zu studiren, dienen

Euleri Inſtitutiones Calculi differentialis. Berol. 755. 4. welche immer noch für ein Hauptwerk erkannt rden.

Segneri elementa Analyſeos Infinitorum. P. I. Halae 1761. 63. 8.

Tempelhoff Analyſis des Unendlichen. Erſter heil. Berlin 1770. 8. Die Integralrechnung iſt nicht rausgekommen.

Traité du Calcul différentiel et du Calcul integral par *Lacroix*, à Paris, T. I. an V. (1797). 4.

Differentialformeln ſind analytiſche Ausdrücke, e eine Function einer veränderlichen Größe (x) mit ihm Differential multiplicirt enthalten. Z. B.

$$x^3 \partial x; \quad (a + bx)^2 \partial x; \quad (a^2 + x^2)^{-\frac{1}{2}} \partial x.$$

ine ſolche Formel iſt wegen des Factors ∂x, der einzeln nommen keine Größe bedeuten kann, ebenfalls keine röße, die ſich auf irgend eine Art angeben läßt; ſie bezieht ſich aber auf ein anderes Differential (∂y), ſo daß r Factor von ∂x der Differentialquotient $\frac{\partial y}{\partial x}$ iſt, oder it la Grange zu reden, die abgeleitete erſte Function einer urſprünglichen von x. Der Zweck bey dieſem Artikel t, ſolche Differentialquotienten analytiſcher Functionen i finden, die als Grundformeln für zuſammengeſetztere enen, um die Integration der letztern auf die von jenen. t bringen.

Differentiale algebraiſcher Functionen.

1. Es ſey $y = x^m$, ſo iſt $\partial y = m x^{m-1} \partial x$.

Denn es verändern ſich y um Δy, wenn x ſich um x verändert, ſo iſt $y + \Delta y = (x + \Delta x)^m$, und

$$\Delta y = m x^{m-1} \Delta x + \frac{m.m-1.}{1.2} x^{m-2} \Delta x^2$$

$$+ \frac{m.m-1.m-2.}{1.2.3} x^{m-3} \Delta x^3 + \text{etc.}$$ (Differenzenrechnung); also

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = m x^{m-1} + \frac{m.m-1.}{1.2} x^{m-2} \Delta x + \text{etc.}$$

Der von Δx unabhängige Theil dieses Quotienten ist $m x^{m-1}$; dieser wird durch $\frac{\partial y}{\partial x}$ bezeichnet, (s. Differentiale), und so ist $\frac{\partial y}{\partial x} = m x^{m-1}$. Der Bequemlichkeit im Schreiben und Aussprechen willen setzt man dafür $\partial y = m x^{m-1} \partial x$, wobey aber ∂y und ∂x nicht für absolute Größen zu nehmen sind.

$y = x^3$	$\partial y = 3 x^2 \partial x$
$y = x^2$	$\partial y = 2 x \partial x$
$y = x$	$\partial y = \partial x$
$y = x^{-1}$	$\partial y = - x^{-2} \partial x$
$y = x^{-2}$	$\partial y = - 2 x^{-3} \partial x$
$y = x^{\frac{1}{2}}$	$\partial y = \frac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}} \partial x$
$y = x^{\frac{1}{3}}$	$\partial y = - \frac{1}{3} x^{-\frac{2}{3}} \partial x.$

Ein negativer Werth eines Differentials bedeutet, daß die dazu gehörige Größe abnimmt, wenn die dazu gehörige zunimmt. Das Differential $x^{-1} \partial x$ oder $\frac{\partial x}{x}$ entsteht aus keiner algebraischen Function, sondern aus der transcendenten, log. nat. x.

2. Es sey

$$y = a + bx + cx^2 + ex^3 + fx^4 + \text{etc.}$

ist

$$y = b\partial x + 2cx\partial x + 3ex^2\partial x + 4fx^3\partial x + \text{etc.}$$

Denn man suche zuerst Δy, lasse in dem Quotienten $\frac{y}{x}$ alles von den Veränderungen abhängige weg, und multiplicire darauf den Quotienten $\frac{\partial y}{\partial x}$ und dessen Werth durch ∂x.

3. Es seyn t und u irgend zwey Functionen von x, und $y = tu$, so ist

$$\frac{\partial y}{\partial x} = u\frac{\partial t}{\partial x} + t\frac{\partial u}{\partial x},$$

oder auch $\partial y = u\partial t + t\partial u$.

Denn es verändere sich y um Δy, wenn t um Δt, und u um Δu sich verändert. Es ist demnach $y + \Delta y = (t + \Delta t)(u + \Delta u)$, und $\Delta y = u\Delta t + t\Delta u + \Delta t.\Delta u$. Dividirt man mit der für x gehörigen Veränderung Δx, so ist

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = u\frac{\Delta t}{\Delta x} + t\frac{\Delta u}{\Delta x} + \frac{\Delta t.\Delta u}{\Delta x}.$$

Der von den Veränderungen unabhängige Differentialquotient ist $\frac{\partial y}{\partial x} = u\frac{\partial t}{\partial x} + t\frac{\partial u}{\partial x}$, da das letzte Glied $\frac{\Delta t.\Delta u}{\Delta x}$ immer von der einen oder der andern Veränderung Δt oder Δu abhängig bleibt, man mag darin den Differentialquotienten $\frac{\partial u}{\partial x}$ oder $\frac{\partial t}{\partial x}$, jenen für $\frac{\Delta u}{\Delta x}$, oder diesen für $\frac{\Delta t}{\Delta x}$ setzen. Behandelt man die Diffe-

werden können. In der Formel $\frac{\partial y}{\partial x} = mnbz^{m-1}x^{n-1}$ setze man für z seinen Werth, und multiplicire durch ∂x, so erhält man den Werth für ∂y.

9. Es sey $y = x^p(a+bx^n)^m$, so ist

$$\partial y = px^{p-1}(a+bx^n)^m\partial x + mnbx^{n+p-1}(a+bx^n)^{m-1}\partial x,$$

oder auch

$$\partial y = x^{p-1}(pa+(p+mn)bx^n)(a+bx^n)^{m-1}dx.$$

Denn man setze $x^p = t$; $(a+bx^n)^m = u$, so ist $y = tu$. Nun ergiebt sich zufolge (2.) das hier aufgestellte Differential.

10. Exempel. I. Es sey $y = (a+bx^2)^{\frac{1}{2}}$, so ist

$$\partial y = bx(a+bx^2)^{-\frac{1}{2}}\partial x = \frac{bx\partial x}{\sqrt{(a+bx^2)}}.$$

Exempel. II. Es sey $y = x(a+bx^2)^{-\frac{1}{2}}$, so ist

$$\partial y = \frac{a\partial x}{(a+bx^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Exempel. III. Es sey $y = \frac{\sqrt{(a+bx^2)}}{x}$, so ist

$$\partial y = -\frac{a\partial x}{x^2\sqrt{(a+bx^2)}}.$$

11. Es sey $y = x^p(ax+bx^2)^m$, so ist

$$\partial y = px^{p-1}(ax+bx^2)^m\partial x + mx^p(a+2bx)(ax+bx^2)^{m-1}\partial x.$$

12. Die Differentiale dreytheiliger und mehrtheiliger Potentialgrößen, mit Potenzen der Functionalgröße, oder andern Potentialgrößen multiplicirt, werden auf ähnliche Art gefunden. Auch ist es nun leicht, jede auf irgend eine Art zusammengesetzte Function einer veränderlichen Größe zu finden.

13. Das Verfahren hiebey im Allgemeinen ist fol-
des. Jeder Theil, Factor oder Divisor der ganzen
inderlichen Function, wird für sich differentiirt, als
in derselbe allein veränderlich wäre. Das Aggregat
r solchen partiellen Differentiale ist das Differential
ganzen Function. Die constanten Factoren einer
ction bleiben auch in dem Differential.

II. Differentiale transscendenter Functionen.

1. Logarithmische.

14. Es sey z eine Zahl, und x ihr Logarithme in
i System, dessen Basis $=B$, so ist $z=B^x$, s. Loga-
men. Es wachse x um Δx, wenn z sich um Δz
indert, so ist $z+\Delta z=B^{x+\Delta x}$. Diese Gleichung
ch jene dividirt, giebt $\frac{z+\Delta z}{z}=B^{\Delta x}$, und . . .
$=B^{\Delta x}-1$. Man zerfälle B in die Theile 1 und
so daß $B=1+b$, und es ist nach dem binomischen
tsatze, $(1+b)^{\Delta x}=1+\Delta x.b+\frac{\Delta x(\Delta x-1)}{1.2}b^2$
$\frac{\Delta x(\Delta x-1)(\Delta x-2)}{1.2.3}b^3+$ etc. also ist
$=\Delta x.b+\frac{\Delta x(\Delta x-1)}{1.2}b^2+\frac{\Delta x(\Delta x-1)(\Delta x-2)}{1.2.3}b^3$
$+\frac{\Delta x(\Delta x-1)(\Delta x-2)(\Delta x-3)}{1.2.3.4}b^4+$ etc.
e Theile dieser Reihe, welche die erste Potenz von Δx
halten, sind $b.\Delta x-\frac{1}{2}b^2\Delta x$
$\frac{1.2}{2.3}b^3.\Delta x-\frac{1.2.3}{2.3.4}b^4.\Delta x+\frac{1.2.3.4}{2.3.4.5}b^5.\Delta x-$ etc.

$$\Delta y = m x^{m-1} \Delta x + \frac{m.m-1.}{1.2} x^{m-2} \Delta x^2$$

$$+ \frac{m.m-1.m-2.}{1..2..3} x^{m-3} \Delta x^3 + \text{etc.}$$ (Differenzenrechnung); also

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = m x^{m-1} + \frac{m.m-1.}{1.2} x^{m-2} \Delta x + \text{etc.}$$

Der von Δx unabhängige Theil dieses Quotienten ist $= m x^{m-1}$; dieser wird durch $\frac{\partial y}{\partial x}$ bezeichnet, (s. Differentiale), und so ist $\frac{\partial y}{\partial x} = m x^{m-1}$. Der Bequemlichkeit im Schreiben und Aussprechen willen setzt man dafür $\partial y = m x^{m-1} \partial x$, wobey aber ∂y und ∂x nicht für absolute Größen zu nehmen sind.

$y = x^3$	$\partial y = 3x^2 \partial x$
$y = x^2$	$\partial y = 2x \partial x$
$y = x$	$\partial y = \partial x$
$y = x^{-1}$	$\partial y = -x^{-2} \partial x$
$y = x^{-2}$	$\partial y = -2x^{-3} \partial x$
$y = x^{\frac{1}{2}}$	$\partial y = \frac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}} \partial x$
$y = x^{-\frac{1}{3}}$	$\partial y = -\frac{1}{3} x^{-\frac{4}{3}} \partial x.$

Ein negativer Werth eines Differentials bedeutet, daß die dazu gehörige Größe abnimmt, wenn die dazu gehörige zunimmt. Das Differential $x^{-1} \partial x$ oder $\frac{\partial x}{x}$ entsteht aus keiner algebraischen Function, sondern aus der transscendenten, log. nat. x.

2. Es sey

$$y = a + bx + cx^2 + ex^3 + fx^4 + \text{etc.}$

27. Es sey $y = z^m lz$, so ist
$y = (m lz + 1) z^{m-1} \partial z$, (aus 3 u. 14).
Also ist
$z^{m-1} lz . \partial z$ das Differential von $\frac{1}{m} z^m lz - \frac{1}{m^2} z^m$.

28. Es sey $y = llz$ (der Logarithme des Logarithmen von z), so ist $\partial y = \frac{\partial z}{z lz}$.

Man setze $lz = u$, so ist $y = lu$, also
$y = \frac{\partial u}{u} = \frac{\partial z}{uz} = \frac{\partial z}{z lz}$.

8. Differentiale circularer Functionen.

29. Es sey s ein Bogen eines Kreises, dessen Halbmesser $= a$; der linearische Sinus des Bogens sey $= y$; der Cosinus $= x$, so ist $\partial s = \frac{a \partial y}{x} = \frac{a \partial y}{\sqrt{(a^2 - y^2)}}$.

Denn es ist überhaupt $\partial s = \partial y \sqrt{(1 + \frac{\partial x^2}{\partial y^2})}$ (Rectification). Für den Kreis ist $a^2 = x^2 + y^2$. Setzt man $x + \Delta x$ für x, und $y + \Delta y$ für y, so ist $a^2 = (x + \Delta x)^2 + (y + \Delta y)^2$, also $0 = 2x\Delta x + \Delta x^2 + 2y\Delta y + \Delta y^2$, wo Δx und Δy von entgegengesetzter Beschaffenheit in Absicht des Wachsthums und Abnehmens sind. Es folgt hieraus $\frac{\partial x}{\partial y} = -\frac{y}{x}$, und $\frac{\partial x^2}{\partial y^2} = \frac{y^2}{x^2}$; folglich $1 + \frac{\partial x^2}{\partial y^2} = 1 + \frac{y^2}{x^2} = \frac{a^2}{x^2}$; also ist
$s = \frac{a \partial y}{x} = \frac{a \partial y}{\sqrt{(a^2 - y^2)}}$.

30. Ferner ist $\partial s = -\frac{a\partial x}{y} = -\frac{a\partial x}{\sqrt{(a^2-x^2)}}$. Hier wird ∂y durch ∂x ausgedruckt.

31. Es sey t die linearische Tangente des Bogens s, so ist $\partial s = \frac{a^2\partial t}{a^2+t^2}$. Denn es ist $y = \frac{at}{\sqrt{(a^2+t^2)}}$; und $x = \frac{a^2}{\sqrt{(a^2+t^2)}}$, (Goniometrie, 14). Aus dem Werthe von y folgt $\partial y = \frac{a^3\partial t}{(a^2+t^2)^{\frac{3}{2}}}$ (10. II.); also ist $\frac{a\partial y}{x} = \frac{a^4\partial t}{(a^2+t^2)^{\frac{3}{2}}} \cdot \frac{(a^2+t^2)^{\frac{1}{2}}}{a^2} = \frac{a^2\partial t}{a^2+t^2}$, und ist $\partial s = \frac{a^2\partial t}{a^2+t^2}$.

32. Ist t die linearische Cotangente des Bogens s, so ist $\partial s = -\frac{a^2\partial t}{a^2+t^2}$, weil die Tangente $= \frac{a^2}{t}$ ist, wenn t die Cotangente bedeutet. Oder, es ist hier t die Tangente von $\frac{1}{2}\pi - s$.

33. Es sey z die linearische Secante des Bogens s, so ist $\partial s = \frac{a^2\partial z}{z\sqrt{(z^2-a^2)}}$.

Denn es ist der Cosinus $x = \frac{a^2}{z}$, also $\partial x = -\frac{a^2\partial z}{z^2}$. Da $a^2 - x^2 = \frac{a^2(z^2-a^2)}{z^2}$, so ist

$$\partial s = -\frac{a\partial x}{\sqrt{(a^2-x^2)}} = \frac{a^2\partial z}{z\sqrt{(z^2-a^2)}}.$$

34. Es ſey z die linearische Coſecante des Bogens s, iſt $\partial s = -\frac{a^2 \partial z}{z\sqrt{(z^2-a^2)}}$.

35. Es ſey v der linearische Sinus verſus eines Bo:ns, ſo iſt $\partial s = \frac{a\partial v}{\sqrt{(2av-vv)}}$.

Denn es iſt $x = a - v$, alſo $\partial x = -\partial v$. Durch e Subſtitution dieſer Werthe in (30.) wird der angege:ne Werth des Differentials ∂s erhalten.

36. Es ſey der Sinus $y = \frac{bu-c^2}{u}$, ſo iſt

$^2 - y^2 = \frac{(a^2-b^2)u^2 + 2bc^2u - c^4}{u^2}$, u. $\partial y = \frac{c^2\partial u}{u^2}$;

lſo iſt

$$\partial s = \frac{ac^2\partial u}{u\sqrt{((a^2-b^2)u^2 + 2bc^2u - c^4)}}.$$

;nſtatt $-c^2$ kann auch $+c^2$ geſetzt werden.

37. Es ſey die Tangente $t = b + v$, ſo iſt

$'s = \frac{a^2\partial v}{a^2 + b^2 + 2bv + v^2}$.

Zu vergleichen ſind die logarithmiſchen Differentiale in 24. 25).

38. Wird der Halbmeſſer $= 1$ geſetzt, ſo ſey der Bogen $= \varphi$, und es iſt

$$\partial\varphi = \frac{\partial \sin\varphi}{\cos\varphi} = -\frac{\partial\cos\varphi}{\sin\varphi}.$$

$$\partial\varphi = \frac{\partial \tang\varphi}{1+\tang\varphi^2} = \cos\varphi^2.\partial\tang\varphi$$

$$\partial\varphi = -\frac{\partial\cot\varphi}{1+\cot\varphi^2} = -\sin\varphi^2.\partial\cot\varphi$$

$$\partial\varphi = \frac{\partial\sec\varphi}{\sec\varphi.\tang\varphi} = -\frac{\partial\cosec\varphi}{\cosec\varphi.\cot\varphi}.$$

Aus dieſen Formeln werden unmittelbar die Differ
tiale des Sinus, der Tangente, ꝛc. durch das Differ
tial des Bogens mit einer goniometriſchen Function
bunden ausgedruckt.

39. Es iſt $\partial \log. nat. \sin\varphi = \cot.\varphi . \partial\varphi$

Denn $\frac{\partial \sin\varphi}{\sin\varphi} = \frac{\cos\varphi}{\sin\varphi}\partial\varphi = \cot\varphi . \partial\varphi.$

40. Es iſt $\partial \log. nat. \cos\varphi = -$ tang $\varphi . \partial$

Dieſe Formel entſteht aus jenen, wenn $90° - \varphi$
φ geſetzt wird.

41. Es iſt $\partial \log. nat. tang\ \varphi = \frac{2\partial\varphi}{\sin 2\varphi}$. D

$\frac{\partial tang\varphi}{tang\varphi} = \frac{\partial\varphi}{\cos\varphi^2 . tang\varphi} = \frac{\partial\varphi}{\cos\varphi . \sin\varphi} = \frac{2\partial\varphi}{\sin 2}$

42. Es iſt $\partial \log. nat. tang\ (45° + \varphi) = \frac{2\partial\varphi}{\cos 2}$

und $\partial . \log. nat. tang\ (45° - \varphi) = -\frac{2\partial\varphi}{\cos 2\varphi}$.

Dieſe Formeln entſtehen aus (41), wenn $45° \pm \varphi$ für
daſelbſt geſetzt wird.

43. Es ſey $\sin\varphi = \frac{1}{2}y$, oder $y = e^{\sin\varphi}$, wo
die Baſis der natürlichen Logarithmen iſt. Daraus
$\partial y = e^{\sin\varphi}\cos\varphi\partial\varphi$.

44. In dieſen Formeln ſind die natürlichen Logarith
men zu verſtehen. Dieſe werden durch die Multiplicatio
mit dem Modulus des briggiſchen Syſtems,
0,43429448 ... in briggiſche verwandelt. Die Win
kel ſind Bogen für den Halbkreis $= 3,14159 2...$ Alſo
$1° = 0,01745329 2..$; $1' = 0,00029088...$
$1'' = 0,00000484 8...$ (Cyklometrie, S. 643).

45. Der Logarithme eines Sinus, als eines Brachsfür en Halbmesser als Einheit, ist negativ, und nimmt der Quantität nach ab, wenn der Winkel und der Sinus zu ehmen. Die absolute Verminderung einer negativen Größe wird als eine Vergrößerung betrachtet. (Entgeengesetzte Größen) Daher ist das Differential des log. sin φ gleichnamig mit ∂φ. Ben dem log. cos φ erhält es sich umgekehrt. Mit dem ∂ log. tang φ hat s dieselbe Beschaffenheit wie mit dem ∂ log. sin φ. Ist ier φ größer als 45° und kleiner als 90°, so ist log. ang φ positiv, und dessen Veränderung mit ∂φ gleichamig.

46. Um die Formeln, besonders der Differentiale logarithmischer und circularer Größen sich geläufig und anhaulich zu machen, berechne man kleine Veränderungen on Functionen aus der angenommenen Veränderung er Functionalgröße. Dann setze man diese letztere für r Differential, und berechne nach der Differentialformel as Differential der Function. Dieses stimmt mit der efundenen endlichen Veränderung desto genauer, je klei er die Veränderungen sind.

Exempel.

Es sey $\varphi = 1°$; $\Delta\varphi = 10'' = 0{,}000048481$. Es soll Δ log. Br. sin φ, oder der Unterschied der Brigischen Logarithmen von sin 1° und sin 1°10″ gefunden werden. Es ist Δ log. Br. sin 1° = cot. 1°. Δφ. 0,434... Mittelst der Logarithmen ist die Rechnung folgende:

log. cot. 1°	= 1,7580785	
l Δφ	= 5,6855748	— 10
l 0,434..	= 9,6377843	— 10
	7,0814376	— 10

Also Δ log. Br. sin 1° = 0,0012062. Nach den Tafeln ist dieser Unterschied = 0,0012046. Die Differentialformel giebt nur das erste Glied einer Reihe, wenn die Differentiale als endliche Größen behandelt werden. In dem Exempel verändern sich die Logarithmen stark.

III. Analogie zwiſchen den logarithmiſchen und circularen Differentialen.

47. Die logarithmiſchen und circularen Differentiale kommen mit einander überein bis auf die Vorzeichen der quadratiſchen Größen. Es iſt in (19), $\partial x = \frac{a\partial y}{\sqrt{(a^2+y^2)}}$, wenn daſelbſt noch der Factor a zugeſetzt wird, und in (23.), $\partial s = \frac{a\partial y}{\sqrt{(a^2-y^2)}}$. Setzt man in der einen Formel $y\sqrt{-1}$ für y, ſo entſteht daraus die andere, nur mit dem Factor $\sqrt{-1}$. So iſt $\partial x = \frac{a\partial y.\sqrt{-1}}{\sqrt{(a^2-y^2)}}$, folglich $\partial x = \partial s.\sqrt{-1}$. Daher $x = s.\sqrt{-1}$, ſo daß ein Logarithme als ein unmöglicher Kreisbogen anzuſehen iſt. Die Logarithmen werden hier als Linien betrachtet.

48. Man ſetze $a = 1$; $s = \varphi$, damit der Bogen φ, ſo wie der Logarithme x, eine bloße Zahl ſey.

So iſt $y = \sin\varphi$; $\sqrt{(1-y^2)} = \cos\varphi$; und $\varphi = \text{Arc. sin } y$; $\partial\varphi = \frac{\partial y}{\sqrt{(1-y^2)}}$. Die logarithmiſchen Formeln (19.) ſind $z = e^x$, wo e die Baſis der natürlichen Logarithmen bedeutet; $z = y + \sqrt{(1+y^2)}$, und $\partial x = -\frac{\partial y}{\sqrt{(1+y^2)}}$. In dieſen ſetze man $y\sqrt{-1}$ ſtatt y, ſo wird $z = y\sqrt{-1} + \sqrt{(1-y^2)}$, und $\partial x = \frac{\partial y\sqrt{-1}}{\sqrt{(1-y^2)}}$. Die Vergleichung mit dem circularen Differential giebt $\partial x = \partial\varphi.\sqrt{-1}$, alſo $x = \varphi\sqrt{-1}$, und daher $z = e^{\varphi\sqrt{-1}}$, das iſt,

$$e^{\varphi\sqrt{-1}} = y\sqrt{-1} + \sqrt{(1-y^2)}.$$

ſt $\frac{1}{e^{\varphi\sqrt{-1}}} = e^{-\varphi\sqrt{-1}}$, und

$$\frac{1}{-1+\sqrt{(1-y^2)}} = \frac{\sqrt{(1-y^2)}-y\sqrt{-1}}{1}, \text{ alſo}$$

$$e^{-\varphi\sqrt{-1}} = \sqrt{(1-y^2)} - y\sqrt{-1}.$$

be Exponentialgrößen addirt, geben

$$e^{\varphi\sqrt{-1}} + e^{-\varphi\sqrt{-1}} = 2\sqrt{(1-y^2)} = 2\cos\varphi.$$

; Unmögliche in beiden Exponentialgrößen hebt ſich, das Mögliche giebt $2\cos\varphi$.

Hingegen iſt

$$e^{-1} - e^{-\varphi\sqrt{-1}} = 2y\sqrt{-1} = 2\sin\varphi.\sqrt{-1},$$

die möglichen Theile ſich einander aufheben.

49. Eine ähnliche Relation der Exponentialgrößen t in Abſicht der Tangenten der Kreisbogen Statt. Es

$= e^x$, oder $x = \log.\text{nat}.z$, und $z = \frac{1+t}{1-t}$,

(aus 18.), $\partial x = \frac{2\partial t}{1-t^2}$. Hier ſetze man $t\sqrt{-1}$

t, ſo iſt $\partial x = \frac{2\partial t.\sqrt{-1}}{1+t^2}$, und $z = \frac{1+t\sqrt{-1}}{1-t\sqrt{-1}}$.

$t = \text{tang}\,\varphi$, ſo iſt $\partial\varphi = \frac{\partial t}{1+t^2}$ (aus 31. 38).

ier iſt $\partial x = 2\partial\varphi.\sqrt{-1}$, und $x = 2\varphi.\sqrt{-1}$.

lich iſt

$$e^{2\varphi\sqrt{-1}} = \frac{1+t\sqrt{-1}}{1-t\sqrt{-1}} = \frac{(1+t\sqrt{-1})^2}{1+t^2},$$

$$e^{-2\varphi\sqrt{-1}} = \frac{1-t\sqrt{-1}}{1+t\sqrt{-1}} = \frac{(1-t\sqrt{-1})^2}{1+t^2}.$$

ch Addition wird erhalten

$$e^{2\varphi\sqrt{-1}} + e^{-2\varphi\sqrt{-1}} = \frac{2(1-t^2)}{1+t^2};$$

Durch Subtraction

$$e^{2\varphi V-1} - e^{-2\varphi V-1} = \frac{4tV-1}{1+t^2}.$$

50. In der ersten dieser Formeln addire man auf beiden Seiten die Zahl 2, so ist

$$e^{2\varphi V-1} + 2 + e^{-2\varphi V-1} = \frac{4}{1+t^2},$$

und die Quadratwurzel aus beiden Theilen gezogen

$$e^{\varphi V-1} + e^{-\varphi V-1} = \frac{2}{V(1+t^2)}.$$

Da $\frac{1}{V(1+t^2)} = \text{col}\,\varphi$ ist, so ist dieses dieselbe Formel mit der erstern in (48.).

Der erste Theil der zweyten Formel ist das Product von $e^{\varphi V-1} + e^{-\varphi V-1}$ in $e^{\varphi V-1} - e^{-\varphi V-1}$; der zweyte Theil ist das Product von $\frac{2}{V(1+t^2)}$ in $\frac{2tV-1}{V(1+t^2)}$, das ist von $2\,\text{col}\,\varphi$ in $2\sin\varphi V-1$. Diesem Producte ist jenes gleich, aus (48).

51. Die Analogie der logarithmischen und circularen Differentiale ist der Grund, daß eine Aufgabe, deren Auflösung auf die eine Gattung führt, mit einer andern vergesellschaftet zu seyn pflegt, zu deren Auflösung die andere Gattung gehört, z. B. die Quadratur eines Kreisabschnittes, und eines hyperbolischen Abschnittes; die Berechnung einer Zone auf der Oberfläche eines gedruckten und eines gestreckten Spharoids. Hiemit ist zu vergleichen der VIII. Abschnitt in dem Artikel, Goniometrie, von der Analogie der Theilung eines Kreissectors und eines hyperbolischen Sectors in gleich große Theile.

27. Es sey $y = z^m \, lz$, so ist
$\partial y = (m lz + 1) z^{m-1} \partial z$, (aus 3 u. 14).
Also ist
$z^{m-1} lz . \partial z$ das Differential von $\frac{1}{m} z^m lz - \frac{1}{m^2} z^m$.

28. Es sey $y = llz$ (der Logarithme des Logarithmen von z), so ist $\partial y = \frac{\partial z}{z lz}$.

Man setze $lz = u$, so ist $y = lu$, also
$\partial y = \frac{\partial u}{u} = \frac{\partial z}{uz} = \frac{\partial z}{z lz}$.

8. Differentiale circularer Funktionen.

29. Es sey s ein Bogen eines Kreises, dessen Halbmesser $= a$; der linearische Sinus des Bogens sey $= y$; der Cosinus $= x$, so ist $\partial s = \frac{a \partial y}{x} = \frac{a \partial y}{\sqrt{(a^2 - y^2)}}$.

Denn es ist überhaupt $\partial s = \partial y \sqrt{(1 + \frac{\partial x^2}{\partial y^2})}$ (Rectification). Für den Kreis ist $a^2 = x^2 + y^2$. Setzt man $x + \Delta x$ für x, und $y + \Delta y$ für y, so ist $a^2 = (x + \Delta x)^2 + (y + \Delta y)^2$, also $0 = 2x\Delta x + \Delta x^2 + 2y\Delta y + \Delta y^2$, wo Δx und Δy von entgegengesetzter Beschaffenheit in Absicht des Wachsthums und Abnehmens sind. Es folgt hieraus $\frac{\partial x}{\partial y} = -\frac{y}{x}$, und $\frac{\partial x^2}{\partial y^2} = \frac{y^2}{x^2}$; folglich $1 + \frac{\partial x^2}{\partial y^2} = 1 + \frac{y^2}{x^2} = \frac{a^2}{x^2}$; also ist
$\partial s = \frac{a \partial y}{x} = \frac{a \partial y}{\sqrt{(a^2 - y^2)}}$.

30. Ferner ist $\partial s = -\frac{a\partial x}{y} = -\frac{a\partial x}{\sqrt{(a^2-x}}$

Hier wird ∂y durch ∂x ausgedrückt.

31. Es sey t die linearische Tangente des Bogens s, so ist $\partial s = \frac{a^2\partial t}{a^2+t^2}$. Denn es ist $y = \frac{at}{\sqrt{(a^2+t}}$ und $x = \frac{a^2}{\sqrt{(a^2+t^2)}}$, (Goniometrie, 14). Aus diesen Werthe von y folgt $\partial y = \frac{a^3\partial t}{(a^2+t^2)^{\frac{3}{2}}}$ (10. II. also ist $\frac{a\partial y}{x} = \frac{a^4\partial t}{(a^2+t^2)^{\frac{3}{2}}} \cdot \frac{(a^2+t^2)^{\frac{1}{2}}}{a^3} = \frac{a^2\partial t}{a^2+t^2}$, ist $\partial s = \frac{a^2\partial t}{a^2+t^2}$.

32. Ist t die linearische Cotangente des Bogens s, so ist $\partial s = -\frac{a^2\partial t}{a^2+t^2}$, weil die Tangente $= \frac{a^2}{t}$ ist, wenn t die Cotangente bedeutet. Oder, es ist hier t die Tangente von $\frac{1}{2}\pi - s$.

33. Es sey z die linearische Secante des Bogens s, so ist $\partial s = \frac{a^2\partial z}{z\sqrt{(z^2-a^2)}}$.

Denn es ist der Cosinus $x = \frac{a^2}{z}$, also $\partial x = -\frac{a^2\partial z}{z^2}$. Da $a^2 - x^2 = \frac{a^2(z^2-a^2)}{z^2}$, so ist

$$\partial s = -\frac{a\partial x}{\sqrt{(a^2-x^2)}} = \frac{a^2\partial z}{z\sqrt{(z^2-a^2)}}.$$

IV. Exponentialrechnung.

52. Exponentialrechnung ist diejenige, worin Po-
nzen mit einem veränderlichen Exponenten vorkommen,
e Wurzel mag unveränderlich oder selbst veränderlich seyn.
Der Fall, da die Wurzel eine unveränderliche Größe
, ist bey den logarithmischen Differentialen vorgekom-
en. Es sey $z = a^x$, so ist $lz = x\,la$. Versteht
an die natürlichen Logarithmen, so ist $\frac{\partial z}{z} = \partial x \,.\, la$,
so $\partial z = a^x \partial x \,.\, la$, wie in (15).

53. Es sey $z = u^x$, so ist $lz = x\,lu$. Daraus
$\frac{z}{} = \partial x \,.\, lu + \frac{x\,\partial u}{u}$, und

$$\partial z = u^{x-1}(u\,\partial x \,.\, lu + x\,\partial u),$$

54. Es sey $z = e^x$, wo der Exponens selbst wieder
ne Exponentialgröße ist. Die Wurzel e ist die Basis
r natürlichen Logarithmen. Man setze $e^x = u$, so ist
$= e^u$, und $\partial z = e^u \partial u = e^u e^x \partial x$, also

$$\partial z = e^{e^x} e^x \partial x.$$

Differentialgleichung des ersten Grades zwischen
ey veränderlichen Größen ist eine solche, in welcher der
ifferential-Quotient $\frac{\partial y}{\partial x}$ eine Function von x und y
leich ist, im Gegensatze gegen eine Differentialformel,
rin dieser Quotient eine Function von x allein ist. Eu-
macht in dem ersten Bande seiner Integralrechnung
en Unterschied zwischen Differentialformel und Diffe-
ialgleichung. Überhaupt ist Differentialgleichung eine
e Gleichung zwischen zwey oder mehrern veränderlichen
ößen, welche Differentiale derselben von irgend einem

Grade enthält. In dem gegenwärtigen Artikel we
nur die Gleichungen von der Anfangs bestimmten
schaffenheit betrachtet.

1. Die Differentiirung der vielfachen Functi
führt auf solche Differentialgleichungen. Es giebt
viele dieser Gattung, welche nicht auf solche Art entst
so daß sich die Integral-Functionen nicht vollständi
geben lassen. Es verhält sich hier, nur auf eine h
Art, wie mit den Potenzen und Wurzeln. Zu
Wurzel läßt sich irgend eine Potenz mit einem g
Exponenten vollständig angeben, aber nicht umgeke
jeder Potenz die Wurzel. Auch können Differentia
chungen so beschaffen seyn, doß ihnen gar keine Inte
gleichung entspricht.

2. Die Gleichungen, die hier betrachtet werden,
ben die Form, $P\partial x + Q\partial y = o$, wo P und Q Fun
nen von x und y zugleich sind. Wären P und Q Fun
nen von x allein, so gehörte die Gleichung unter die
ferentialformeln, die in dem vorhergehenden Artikel a
handelt sind. Wäre P eine Function von x allein,
Q von y allein, so wäre die Gleichung aus zwey D
rentialformeln zusammengesetzt. Sie heißt alsdann
eine solche, in welcher die veränderlichen Größen von
ander gesondert sind.

3. Die Gleichung zwischen x und y sey

$$ay^2 + bxy + cx^2 + dy + ex + f = o.$$

Man setze $x + \Delta x$ für x, und $y + \Delta y$ für y, und
jene Gleichung von der hiedurch entstandenen ab, so ist

$$2ay\Delta y + bx\Delta y + by\Delta x + 2cx\Delta x + d\Delta y + e$$
$$+ a\Delta y^2 + b\Delta y\Delta x + c\Delta x^2 = o.$$

Hieraus folgt der Differentialquotient,

$$\frac{\partial y}{\partial x} = -\frac{by + 2cx + e}{2ay + bx + d},$$

oder die Differentialgleichung,

$$(2cx + by + e)\partial x + (2ay + bx + d)\partial y =$$

45. Der Logarithme eines Sinus, als eines Bruchs für n Halbmesser als Einheit, ist negativ, und nimmt der uantität nach ab, wenn der Winkel und der Sinus zu hmen. Die absolute Verminderung einer negativen röße wird als eine Vergrößerung betrachtet. (Entge ngesetzte Größen) Daher ist das Differential des g. sin φ gleichnamig mit ∂φ. Bey dem log. cos φ rhält es sich umgekehrt. Mit dem ∂ log. tang φ hat dieselbe Beschaffenheit wie mit dem ∂ log. sin φ. Ist er φ größer als 45° und kleiner als 90°, so ist log. ng φ positiv, und dessen Veränderung mit ∂φ gleich umig.

46. Um die Formeln, besonders der Differentiale lo rithmischer und circularer Größen sich geläufig und an haulich zu machen, berechne man kleine Veränderungen n Functionen aus der angenommenen Veränderung r Functionalgröße. Dann setze man diese letztere für r Differential, und berechne nach der Differentialformel s Differential der Function. Dieses stimmt mit der fundenen endlichen Veränderung desto genauer, je klei r die Veränderungen sind.

Exempel.

s sey $\varphi = 1°$; $\Delta\varphi = 10'' = 0{,}0000484\,81$.
s soll Δ log. Br. sin φ, oder der Unterschied der Brig schen Logarithmen von sin 1° und sin 1°10″ gefunden wer n. Es ist Δ log. Br. sin 1° = cot. 1°. $\Delta\varphi$. 0,434...
Mittelst der Logarithmen ist die Rechnung folgende:

log. cot. 1°	=	1,7580785
l $\Delta\varphi$	=	5,6855748 — 10
l 0,434..	=	9,6377843 — 10
		7,0814376 — 10

lso Δ log. Br. sin 1° = 0,0012062. Nach den Ta ln ist dieser Unterschied = 0,0012046. Die Diffe ntialformel giebt nur das erste Glied einer Reihe, wenn ie Differentiale als endliche Größen behandelt werden. n dem Exempel verändern sich die Logarithmen stark.

sich nun der Quotient $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ mittelst der quadratischen Gleichung, $a.\frac{\Delta y^2}{\Delta x^2} + b.\frac{\Delta y}{\Delta x} + c = o$, woraus ein gedoppelter Werth des Quotienten folgt, einer für die eine gerade Linie, ein zweyter für die andere. Nimmt man die Coordinaten in einer stetigen Folge, so ist $a\frac{\partial y^2}{\partial x^2} + b\frac{\partial y}{\partial x} + c = o$, oder $a\partial y^2 + b\partial y\partial x + c\partial x^2 = o$. Eben diese Gleichung wird erhalten, wenn der Zähler und Nenner des Werthes von $\frac{\partial y}{\partial x}$ differentiirt werden, und der hieraus entstehende Bruch zum Werthe von $\frac{\partial y}{\partial x}$ genommen wird.

6. In der allgemeinen Gleichung vom dritten Grade zwischen zwey veränderlichen Größen,

$$ay^3 + bxy^2 + cx^2y + dx^3 + ey^2 + fxy + gx^2 + hy + ix + k = o,$$

setzt man $x + \Delta x$ für x, und $y + \Delta y$ für y, und zieht von der dadurch entstandenen Gleichung jene ab, so ist

$$\begin{aligned}&(3ay^2 + 2bxy + cx^2 + 2ey + fx + h)\Delta y\\ &+ (3dx^2 + 2cxy + by^2 + 2gx + fy + i)\Delta x\\ &+ (3ay + bx + e)\Delta y^2\\ &+ (2by + 2cx + f)\Delta y.\Delta x\\ &+ (3dx + cy + g)\Delta x^2\\ &+ a\Delta y^3 + b\Delta y^2.\Delta x + c\Delta x^2.\Delta y + d\Delta x^3 = o.\end{aligned}$$

Wie die Factoren der Producte von den Differenzen entstehen, ist in (Differenzenrechnung, 18.) bemerkt.

Aus der endlichen Differenzengleichung entsteht die Differentialgleichung

$$(3ay^2+2bxy+cx^2+2ey+fx+h)\partial y$$
$$+(3dx^2+2cxy+by^2+2gx+fy+i)\partial x=0.$$

7. Allgemein ſind hier drey Fortſchreitungen der y zu
r ſtetigen Fortſchreitung der x geordnet, und umgekehrt.
m deutlichſten wird dies, wenn man die y als Ordinaten
ner Linie des dritten Grades betrachtet, an welcher zu
rſelben Abſciſſe drey Ordinaten möglich ſind. Es kann
ber, nach Beſchaffenheit der Coefficienten, eine Fort-
ſchreitung der Ordinaten wegfallen, ſelbſt nur eine einzige
eiben. Wenn zwey Fortſchreitungen der y ſich mit ei-
em gemeinſchaftlichen Gliede an einander ſchließen, ſo
at die Gleichung für y, als eine beſtimmte mit einer ge-
ebenen x betrachtet, zwey gleiche Wurzeln, und es iſt
$ay^2+2bxy+cx^2+2ey+fx+h=0$, (Glei-
ung, IX.). Auf gleiche Art iſt, wo zwey Fortſchrei-
ungen der x, als Ordinaten betrachtet, zuſammenkom-
en $3dx^2+2cxy+by^2+2gx+fy+i=0$. In
nem Falle iſt $\frac{\partial x}{\partial y}=0$, oder $\frac{\partial y}{\partial x}$ unendlich groß, und die
erührende fällt in die Ordinate; in dem andern iſt
$\frac{y}{x}=0$, und die berührende fällt in die Ordinate x, oder
t parallel mit der Axe der Abſciſſen x. Treten beide Fälle
ugleich ein, ſo ſchneiden ſich zwey Zweige der krummen
inie in einem Puncte. Alsdann haben nämlich zwey
erſchiedene Fortſchreitungen der y ein gemeinſchaftliches
Glied, und zwey Fortſchreitungen der x eben ein ſolches
u jenem coordinirtes. Die Differentialgleichung wird nun
$\frac{\partial y}{\partial x}=\frac{0}{0}$, welches überhaupt etwas unbeſtimmtes bedeutet.

Man ſuche nun aus der Differenzengleichung denjeni-
en Theil des Quotienten $\frac{\Delta y}{\Delta x}$, der von der Quantität

der Differenzen unabhängig ist, und durch $\frac{\partial y^2}{\partial x^2}$ bezeic
wird. Die beiden ersten Glieder, welche Δy und
einfach enthalten, fallen weg, weil die Factoren dieser
ferenzen $= 0$ sind. Die übrigen dividire man durch
und lasse diejenigen Glieder weg, welche von den D
renzen Δy und Δx abhängig bleiben, so ist, nach
hierauf sich beziehenden Bezeichnung,

$$(2ay + bx + e)\frac{\partial y^2}{\partial x^2} + (2by + 2cx + f)\frac{\partial}{\partial}$$
$$+ 3dx + cy + g = 0.$$

Die beiden Werthe von $\frac{\partial y}{\partial x}$ sind die Tangenten der W
der beiden berührenden in dem Durchschnittspuncte der
den Zweige der Curve mit der Axe der Abscissen.

Eben diese Gleichung wird erhalten, wenn in
Werthe von $\frac{\partial y}{\partial x}$ Zähler und Nenner differentiirt,
durch ∂x dividirt werden.

8. Ist die Gleichung vom dritten Grade ein P
duct aus einer vom zweyten Grade, nicht zerlegba
$ay^2 + bxy + cx^2 + dy + ex + f = 0$, und der
ersten Grade, $\alpha x + \beta y + \gamma = 0$, so wird der Quot
$\frac{\partial y}{\partial x} = 0$, was auch für Werthe x und y haben mö
Man bezeichne die erstere Gleichung durch V, die zw
durch U, so ist

$$\partial . VU = (2ay + bx + d)\, U\partial y + \beta V$$
$$+ (by + 2cx + e)\, U\partial x + \alpha V\partial x$$

Hier ist, da $V = 0$, und $U = 0$ ist, der Factor von
sowohl als der von ∂x, wie man ihn aus der endlich
Gleichung unmittelbar erhält, jeder $' = 0$. Zerlegt man
die Differentialgleichung in zwey Gleichungen, so w

$ay + bx + d)\partial y + (by + 2cx + e)\partial x = 0$, und
$y + \alpha\partial x = 0$. Die erste ist die Differentialgleichung
einen Kegelschnitt, die zweyte für eine gerade Linie.
e endliche Gleichung gehört für das System eines Ke-
schnitts und einer geraden Linie.

9. Wären nicht allein die Factoren von Δy und Δx,
dern auch von Δy^2, $\Delta y . \Delta x$ und Δx^2 Null, so bliebe
der endlichen Differenzengleichung nur der Theil

$$a\Delta y^3 + b\Delta y^2 . \Delta x + c\Delta x^2 . \Delta y + d\Delta x^3 = 0$$

ig. Diese Gleichung zeigt ein System von drey gera-
Linien an, die sich in drey verschiedenen Puncten, in
eyen, und in einem einzigen schneiden können, so wie die
eichung für $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ drey verschiedene, oder zwey gleiche
st einer von ihnen verschiedenen, oder drey gleich große
urzeln haben kann.

Dieselbe Gleichung wird erhalten, wenn der Zähler
Nenner des Werthes von $\frac{\partial y}{\partial x}$ zweymahl nach einan-
differentiirt werden, in Absicht auf x und y allein,
e höhere Differentiale aufzunehmen.

genschaften der Differentialgleichungen in Beziehung auf ihre Realität.

10. Es sey V eine gleichartige Function von x und
(eine solche, worin die Summe der Exponenten von
und y in allen Theilen dieselbe ist); die Anzahl ihrer
imensionen = m; ihr Differential $\partial V = P\partial x + Q\partial y$;
ist $Px + Qy = mV$.

Beweis. Es sey λ die Summe der Exponenten in
em Theile des Zählers der Function, μ die Summe in
em Theile des Nenners, (bey einer ganzen Function ist
= 0); also $\lambda - \mu = m$. Man setze $y = ux$, so ent-
lt jeder Theil des Zählers die Potenz x^λ in eine Potenz

von u multiplicirt, ſo wie jeder Theil des Nenners die Potenz x^μ in eine Potenz von u, und V iſt ein Product aus x^m in eine Function von u. Dieſe Function ſey U, alſo $V = Ux^m$, und $\partial V = mUx^{m-1}\partial x + x^m \partial U$. Da $y = ux$, ſo iſt $\partial y = u\partial x + x\partial u$, alſo iſt $\partial V (= P\partial x + Q\partial y) = P\partial x + Qu\partial x + Qx\partial u$. Die Vergleichung beider Werthe von ∂V giebt $mUx^{m-1}\partial x = P\partial x + Qu\partial x$, indem dieſes die Theile ſind, welche von ∂x abhangen, dagegen $x^m\partial U$ und $Qx\partial u$ von ∂u abhängig ſind. Da $Ux^m = V$ iſt, ſo iſt $\frac{mV}{x} = P + Qu$, und daher $mV = Px + Qy$.

Der Satz wird von Euler erfunden ſeyn, welcher ihn ſchon in ſeiner ältern Mechanik (1736) Gebrauch macht. T. II. §§. 106. 497. 498.

11. Exempel. I. Es ſey $V = \frac{y^5 + x^5}{y - x}$, ſo iſt $m = 2$, und $P = \frac{3x^2y - 2x^5 + y^5}{(y-x)^2}$; $Q = \frac{2y^5 - 3x^2y - x^5}{(y-x)^2}$. Daraus iſt $Px + Qy = \frac{2y^5 + 2x^5}{y-x} = 2V$.

Exempel. II. Es ſey $V = \frac{1}{\sqrt{(x^2+y^2)}}$, ſo iſt $m = -1$, und $P = \frac{-x}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}$; $Q = \frac{-y}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}$. Daraus iſt $Px + Qy = \frac{-1}{(x^2+y^2)^{\frac{1}{2}}} = -V$.

Man bemerke noch, daß P und Q von $m - 1$ Dimenſionen ſind, wenn V eine Function von m Dimenſionen iſt.

12. Es ſey V irgend eine Function von x und y, und $\partial V = P\partial x + Q\partial y$; ferner ſey $\partial P = p\partial x + q\partial y$,

nd $\partial Q = r\partial x + s\partial y$, wo P, Q, p, q, r, s, jede ine Function von x und y, oder einer derſelben allein ſind, uch conſtante Größen ſeyn können: in allen Fällen iſt $= r$.

Bew. Man ſetze in der Function V für x und y die eränderten $x + \Delta x$ und $y + \Delta y$, wodurch für V komme $V + \Delta V$. Zieht man jene Function von dieſer ab, ſo iſt ie endliche Differenz $\Delta V = P\Delta x + Q\Delta y + R\Delta x\Delta y$, o der erſte Theil die Differenz durch Δx allein, der veyte die durch Δy allein, der dritte die durch beide gemein- haftlich entſtehende bezeichnet. Die Function P mag och Δx und Potenzen dieſer Veränderung, Q noch Δy nd Potenzen derſelben, R beides enthalten. Die par- elle Differenz von P durch Δy ſey $R'\Delta y$, und die par- elle Differenz von Q durch Δx ſey $R''\Delta x$. In der ifferenzenrechnung (42.) iſt gezeigt, daß $R' = R''$ iſt, as dortige p und q iſt hier R' und R''); oder jedes die er zuerſt durch R bezeichnete Function.

Setzt man Differentiale ſtatt der endlichen Differen- n, ſo fallen die Potenzen und Producte der endlichen ifferenzen weg; P und Q werden die Differentialfacto- n; $R'\Delta y$ verwandelt ſich in das Differential von P ch y, oder R' wird die hier durch q bezeichnete Function; $R''\Delta x$ verwandelt ſich in das Differential von Q nach x, er R'' wird die hier durch r bezeichnete Function. Da $R' = R''$, was auch die Quantität von Δx und Δy ſeyn ag, ſo iſt $q = r$.

13. Exempel. I. Es ſey $V = ay^3 + bxy^2 + cx^2y + dx^3 + ey^2 + fxy + gx^2 + hy + ix + k = o$, ſo $P = by^2 + 2cxy + 3dx^2 + fy + 2gx + i$; und $= 3ay^2 + 2bxy + cx^2 + 2ey + fx + h$. Das rtielle Differential von P nach y durch ∂y dividirt iſt $= 2by + 2cx + f$; und das von Q nach x durch ∂x vidirt iſt $r = 2by + 2cx + f$, ſo daß $q = r$.

14. Der Satz (12.) wird folgendergeſtalt ausgedruckt. Es zeigt $\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)$ den partiellen tialquotienten für V in Rückſicht auf x allein a $\left(\frac{\partial V}{\partial y}\right)$ den partiellen Differentialquotienten Rückſicht auf y allein. Demnach iſt $\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)$: $\left(\frac{\partial V}{\partial y}\right) = Q$; $\left(\frac{\partial P}{\partial y}\right) = q$; $\left(\frac{\partial Q}{\partial x}\right) =$ obige Satz wird nun folgendergeſtalt ausgedruck $\partial V = P\partial x + Q\partial y$, ſo iſt $\left(\frac{\partial P}{\partial y}\right) = \left(\frac{\partial}{\partial}\right.$

Auch iſt $\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)\partial x = P\partial x$, und $\left(\frac{\partial V}{\partial y}\right)$ $= Q\partial y$.

16. Iſt V eine Function dreyer veränderlichen, gegenſeitig unabhängigen Größen, x, y, z, und es iſt ∂V = P∂x + Q∂y + R∂z, ſo iſt $\left(\frac{\partial P}{\partial y}\right) = \left(\frac{\partial Q}{\partial x}\right)$; $\left(\frac{\partial P}{\partial z}\right) = \left(\frac{\partial R}{\partial x}\right)$; $\left(\frac{\partial Q}{\partial z}\right) = \left(\frac{\partial R}{\partial y}\right)$. Denn angenommen iſt, daß die Größen x, y, z von einander unabhängig ſind, ſo kann jede von ihnen als unveränderlich angeſehen werden. So entſtehen drey Bedingungsgleichungen für die drey Paare von Functionen, P, Q; P, R; Q, R. Dieſe ſind Functionen von den drey Größen x, y, z, von welchen aber auch eine oder zwey andere in jenen fehlen kann. Einen andern, aber weitläuftigern Beweis dieſer drey Bedingungsgleichungen giebt Clairaut in den Mem. de l'Acad. des Sciences, 1740. p. 305. ed. in 4.

17. Finden dieſe drey Bedingungen nicht Statt, ſo ſetze man, daß die Formel P∂x + Q∂y + R∂z durch die Multiplication mit einer Function M die drey Bedingungen erfülle, ſo daß

$$MP\partial x + MQ\partial y + MR\partial z$$

das Differential einer Function V der drey Größen x, y, z ſey. Nun iſt

$$\left(\frac{\partial . MP}{\partial y}\right) = \left(\frac{\partial . MQ}{\partial x}\right); \left(\frac{\partial . MP}{\partial z}\right) = \left(\frac{\partial . MR}{\partial x}\right);$$

$$\left(\frac{\partial . MQ}{\partial z}\right) = \left(\frac{\partial . MR}{\partial y}\right).$$

Die Entwickelung der Differentiale von den Producten MP, MQ, MR, giebt folgende drey Gleichungen:

durch die Größe a, (den Modulus oder den
der Curve), verschieden sind, z. B. Ellipsen
gemeinschaftlichen Axe mit verschiedenen Parame

Wenn P∂x sich integriren läßt, so hat die
Schwierigkeit, da man in dem Integral nur
lich zu setzen braucht, um das Differential der
in der stetigen Folge ihrer Werthe für irgend ein
meines x zu erhalten.

Ist aber P∂x nicht algebraisch integrabel,
Frage Schwierigkeit machen.

20. Es sey nun, wenn a veränderlich genom
$\partial z = P\partial x + Q\partial a$. Der erste Terminus, P
das Differential von z an, so fern bloß x sich ä
zweyte aber die Variation von z, oder die di
Veränderung zufolge der von a, wobey x denselb
behält.

Es sey $\partial P = p\partial x + q\partial a$, und $\partial Q = r\partial$
so ist, wenn z eine reale Function ist, $q = s$
und $Q = \int r\partial x = \int q\partial x$, wenn $s = o$ gesetzt n
ses muß geschehen, damit Q ganz von P, ob
Beschaffenheit der Function z abhange, ohne wi
Bestimmungen. (Euler betrachtet in der A
über unendlich viele Curven einerley Art, C
Petrop vet. T. VII. p. 178, für das Differe
Q den Modulus a als constant, daher $\partial a = o$
achtet a in dem Differential ∂P als veränderli
delt wird. Auch das Verfahren von Nic. Be
Joh. Bernoulli Opp. T. II. p. 443. ist in
sicht nicht befriedigend).

Nach der Bezeichnung (14.) ist $Q = \int\left(\frac{\partial}{\partial}\right.$

und das variirte Differential

$$\partial z = P\partial x + \partial a \int\left(\frac{\partial P}{\partial a}\right)\partial x .$$

21. Das erste Beyspiel dieser Aufgabe giel
in dem Commerc. epist. T. I. ep. 59. wo die

ber auf andere Ansichten gegründet ist. Man gedenke ich eine stetige Folge logarithmischer Linien durch einen Punct, bey einer gemeinschaftlichen Abscisse, gezogen; es oll die Curve gefunden werden, welche auf ihnen allen Bogen von einer gegebenen Länge, von jenem Puncte an bschneidet. Die Gleichung für die logarithmische Linie ist

$y = \frac{a\partial x}{x}$. Das Differential des Bogens z ist $\partial z =$

$x\sqrt{\left(1+\frac{\partial y^2}{\partial x^2}\right)} = \frac{\partial x\sqrt{(aa+xx)}}{x}$. Hier ist

$= \frac{\sqrt{(aa+xx)}}{x}$, und $\left(\frac{\partial P}{\partial a}\right) = \frac{a}{x\sqrt{(aa+xx)}}$; also

t die variirte Differentialgleichung,

$$\partial z = \frac{\partial x\sqrt{(aa+xx)}}{x} + a\partial a\int\frac{\partial x}{x\sqrt{(aa+xx)}}.$$

Der erste Terminus ist das Differential des Bogens af derselben krummen Linie, der zweyte ist die verschwinnde Variation des Bogens durch die Variation des Modulus, bey unveränderter Abscisse. Die Integralgröße, $\frac{\partial x}{x\sqrt{(aa+xx)}}$, zeigt an, wie die Variation von der Beaffenheit der Curve abhängt, daher a in derselben nicht änderlich ist; aber die Verbindung mit der Variation a zeigt, wie jene ferner durch die Variation des Modus bestimmt wird.

Die Frage wegen der gleiche Bogen abschneidenden Curehört in den Artikel, Trajectoria.

22. Ein anderes Beyspiel gebe die Area einer Parabel. re Gleichung ist $yy = ax$. Die Area sey z, so ist $= y\partial x = \partial x\sqrt{ax}$. Mit der Variation ist $\partial z = P\partial x$ ∂a, wo $P = \sqrt{ax}$. Nun ist $\left(\frac{\partial P}{\partial a}\right) = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{x}{a}}$,

$\int\left(\frac{\partial P}{\partial a}\right)\partial x = \frac{1}{3}x\sqrt{\frac{x}{a}}$, also

$$\partial z = \partial x\sqrt{ax} + \tfrac{1}{3}x\partial a\sqrt{\frac{x}{a}}.$$

Eben dieſes findet man aus der endlichen Gleichung $yy = ax$, wenn ſowohl a als x veränderlich geſetzt werden.

23. Es ſey $\partial y = P\partial x$, und P eine Function von x, y, a, nebſt andern Conſtanten, die außer a vorhanden ſeyn mögen. Man ſetze, daß die variirte Gleichung ſey $\partial y = P\partial x + R\partial a$, ſo daß $P\partial x - \partial y + R\partial a = 0$ ſey. Damit dieſe Gleichung real ſey, muß zufolge (17.) ſeyn,

$$-\left(\frac{\partial R}{\partial x}\right) + R\left(\frac{\partial P}{\partial y}\right) = P\left(\frac{\partial R}{\partial y}\right) - \left(\frac{\partial P}{\partial a}\right),$$

oder

$$\left(\frac{\partial R}{\partial x}\right) + P\left(\frac{\partial R}{\partial y}\right) = R\left(\frac{\partial P}{\partial y}\right) + \left(\frac{\partial P}{\partial a}\right),$$

indem das dortige Q hier $= -1$, alſo $\partial Q = 0$ iſt. Für z daſelbſt ſteht hier a.

Nikol. Bernoulli (Bruderſohn von Jakob und Johann Bernoulli) hat dieſe Aufgabe ſchon aufgelöſet, aber auf einem andern Wege. Sein Verfahren ſteht in Joh. Bernoulli Opp. T. II. p. 443. Für das hieſige

$$y,\ x,\ P;\ R,\ \frac{\partial P}{\partial y},\ \frac{\partial P}{\partial a},$$

ſteht bey ihm

$$x,\ y,\ p,\ q,\ T,\ R$$

Er findet die Gleichung, $Tq\partial y + R\partial y = \partial q$. Es fehlt alſo der Terminus $P\left(\frac{\partial R}{\partial y}\right)$.

Euler hat ſich früh ſehr viel mit dieſer ganzen Unterſuchung beſchäftigt, wie ſeine Abhandlungen in den Comm. Petrop. vet. T. VII. VIII. IX. zeigen.

24. Das $\int P\partial x$, wo P eine Function von x und y iſt, in Abſicht auf y differentiiren, nennt man, unter dem Integralzeichen differentiiren. Dieſes

Differential ist $= \partial y \int \left(\frac{\partial P}{\partial y}\right) \partial x$, nach (21.), wo a
t, was hier durch y bezeichnet wird.

Differentio-Differentialrechnung ist die Entwickelung der Differentiale des zweyten Grades, und höherer, nach ihren Verhältnissen gegen einander, und zu den Potenzen derer vom ersten Grade. Ihr Gebrauch ist wichtig in der höhern Geometrie, und in der reinen Mechanik, deren erste Grundformeln Differentiale vom zweyten Grade enthalten. Sie werden in dem Taylorschen Lehrsatze zur Berechnung der endlichen Differenzen einer Function aus den Potenzen der Differenz der Functionalgröße angewandt.

1. In dem Artikel, Differentiale, (S. 822.), sind schon die Begriffe von den höhern Differentialen erklärt worden. Sie sind so wenig als die des ersten Grades als Größen absolut zu betrachten, sondern bezeichnen, ohne Rücksicht auf bestimmte Quantität, Glieder eines Verhältnisses, welches im Allgemeinen endlich ist, in einzelnen Fällen das von 1:0, oder das von 0:1 seyn kann, und, wenn es 0:0 wird, mehrdeutig ist.

2. Es sey zuerst eine Relation zwischen zwey veränderlichen Größen, x und y, angenommen. Man setze

$$\frac{y}{x} = p; \quad \frac{\partial p}{\partial x} = q; \quad \frac{\partial q}{\partial x} = r; \quad \frac{\partial r}{\partial s} = s, \text{ u. s. f.};$$

so ist eine Differentialgleichung vom ersten Grade zwischen x und y eine endliche zwischen x, y, p; eine vom zweyten Grade ist eine endliche zwischen x, y, p, q; eine vom dritten Grade ist eine endliche zwischen x, y, p, q, r; u. s. f.

3. So wie p der von der Quantität der Veränderungen abhängige Theil des Quotienten $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ ist, so ist es q in

Abſicht auf $\frac{\Delta^2 y}{\Delta x^2}$; r in Abſicht auf $\frac{\Delta^3 y}{\Delta x^3}$; s in Abſicht auf $\frac{\Delta^4 y}{\Delta x^4}$, u. ſ. f. wenn nämlich die durch x bezeichneten Größen eine Reihe mit gleich großen Unterſchieden ausmachen,

4. Darum iſt in dieſem Falle $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = q$; $\frac{\partial^3 y}{\partial x^3} = r$; $\frac{\partial^4 y}{\partial x^4} = s$; etc. Die Bezeichnungen der Differentialquotienten beziehen ſich auf eine ſtetiger Weiſe ſich verändernde Reihe. Man mag die eine oder die andere Bezeichnungsart gebrauchen. Die Differentialquotienten ſtellen oft die Relation der veränderlichen Größen und ihrer Veränderungen in einer ſtetigen Reihe am augenfälligſten dar.

5. Es ſey $y = x^m$, und x verändern ſich gleichförmig (oder ∂x ſey conſtant, oder $\partial^2 x = 0$), ſo iſt

$$\frac{\partial y}{\partial x} = m x^{m-1}$$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = m(m-1) x^{m-2}$$

$$\frac{\partial^3 y}{\partial x^3} = m(m-1)(m-2) x^{m-3}$$

u. ſ. f.

Wenn m eine ganze Zahl iſt, ſo iſt der mte Differentialquotient conſtant.

6. Hieraus iſt

$$\frac{\partial^2 y}{\partial y^2} = \frac{m-1}{m} \cdot \frac{1}{y}$$

$$\frac{\partial^3 y}{\partial y^3} = \frac{m-1 \cdot m-2}{m^2} \cdot \frac{1}{y^2}$$

u. ſ. f.

7. Es sey $z = xy$, und ∂x constant, so ist

$$\partial z = y\partial x + x\partial y$$
$$\partial^2 z = 2\partial x\partial y + x\partial^2 y$$
$$\partial^3 z = 3\partial x\partial^2 y + x\partial^3 y$$
$$\partial^4 z = 4\partial x\partial^3 y + x\partial^4 y$$

u. s. f.

oder

$$\frac{\partial z}{\partial x} = y + px; \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 2p + qx;$$
$$\frac{\partial^3 z}{\partial x^3} = 3q + rx; \quad \frac{\partial^4 z}{\partial x^4} = 4r + sx$$

u. s. f.

8. Es sey $z = \frac{y}{x}$, und ∂x constant, so ist

$$\partial z = \frac{\partial y}{x} - \frac{y\partial x}{xx}$$
$$\partial^2 z = \frac{\partial^2 y}{x} - \frac{2\partial x\partial y}{xx} + \frac{2y\partial x^2}{x^3}$$
$$\partial^3 z = \frac{\partial^3 y}{x} - \frac{3\partial x\partial^2 y}{x^2} + \frac{6\partial x^2\partial y}{x^3} - \frac{6y\partial x^3}{x^4}$$

u. s. f.

9. Es sey $y = \sin\varphi$, und $z = \cos\varphi$, so ist, wenn φ constant gesetzt wird,

$$\partial y = \cos\varphi . \partial\varphi \qquad \partial z = -\sin\varphi . \partial\varphi$$
$$\partial^2 y = -\sin\varphi . \partial\varphi^2 \qquad \partial^2 z = -\cos\varphi . \partial\varphi^2$$
$$\partial^3 y = -\cos\varphi . \partial\varphi^3 \qquad \partial^3 z = +\sin\varphi . \partial\varphi^3$$
$$\partial^4 y = +\sin\varphi . \partial\varphi^4 \qquad \partial^4 z = +\cos\varphi . \partial\varphi^4$$

u. s. f. u. s. f.

10. Es sey $t = \text{tang}\,\varphi$, und $\partial\varphi$ unveränderlich, so ist (Differentialformel, 31.)

$$\partial t = (1+t^2)\,\partial\varphi$$
$$\partial^2 t = 2t(1+t^2)\,\partial\varphi^2$$
$$\partial^3 t = 2(1+3t^2)(1+t^2)\,\partial\varphi^3$$
u. s. f.

11. Es sey $y = e^x$, und $z = e^{-x}$, wo e die Basis der natürlichen Logarithmen, und x der Logarithme der Zahl y und der Zahl $\frac{1}{y}$ ist. Es ist, wenn ∂x constant gesetzt wird,

$\partial y = e^x \partial x$	$\partial z = -e^{-x}\partial x$
$\partial^2 y = e^x \partial x^2$	$\partial^2 z = +e^{-x}\partial x$
$\partial^3 y = e^x \partial x^3$	$\partial^2 z = -e^{-x}\partial x$
u. s. f.	u. s. f.

12. Es sey $2ax - xx = yy$, so ist $a\partial x - x\partial x = y\partial y$. Setzt man sowohl ∂x als ∂y veränderlich, so ist

$$a\partial^2 x - \partial x^2 - x\partial^2 x = \partial y^2 + y\partial^2 y,$$

oder

$$(a-x)\frac{\partial^2 x}{\partial x^2} - y\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = 1 + \frac{\partial y^2}{\partial x^2}.$$

Der zweyte Theil dieser Gleichung ist, aus der Differentialgleichung vom ersten Grade,

$$= 1 + \left(\frac{a-x}{y}\right)^2 = \frac{a^2 - 2ax + x^2 + y^2}{y^2} = \frac{a^2}{y^2}.$$

Also ist

$$(a-x)\frac{\partial^2 x}{\partial x^2} - y\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{a^2}{y^2}.$$

Dieses ist eine unbestimmte Gleichung für die Differentialquotienten des zweyten Grades, da die Art, wie sich ∂x oder ∂y verändern sollen, nicht festgesetzt ist. Soll

chung eine bestimmte werden, ohne daß eines der
tiale unveränderlich sey, so muß irgend ein ande-
erential unveränderlich gesetzt werden. Man neh-
das $\sqrt{(\partial x^2 + \partial y^2)}$. Dadurch ist $\partial(\partial x^2 + \partial y^2)$
also $\partial x \partial^2 x + \partial y \partial^2 y = 0$. Durch die Sub-
des Werthes von $\partial^2 y$ oder $\partial^2 x$ aus dieser Glei-
der unbestimmt gelassenen wird nun diese eine be-

$$\frac{}{} = \frac{aa - ax}{y^2}, \quad \text{oder} \quad \frac{a\partial^2 x}{\partial y^2} = \frac{a}{a-x}.$$

an für $\partial^2 x$ seinen Werth durch $\partial^2 y$, so ist

$$\frac{y}{^2} = -\frac{a}{y}, \text{ oder } \frac{a\partial^2 y}{\partial y^2} = -\frac{ay}{(a-x)^2}.$$

hier zum Beyspiel genommene Gleichung ist für
reis, worin y der Sinus eines Bogens, x der
versus, $a - x$ der Cosinus für den Halbmesser a
ie Differentialformeln folgen auch aus denen für
d $\partial^2 z$ in (9.), wenn a statt der Einheit, und
für az gesetzt wird, durch Elimination von $\partial\varphi$,

Exempel. Da die Differentialverhältnisse auch
liche kleine Differenzen beynahe gelten, so suche
s Verhältniß der zweyten Unterschiede dreyer Si-
dem Quadrate des Unterschiedes des ersten und
, oder des zweyten und dritten Cosinus, z. B. zu
inkel $\varphi = 30°$, mit einem Unterschiede von 1 Gr,
folgenden Winkel. Es ist

	I. Unterſch.	II. Unterſch.
$° = 0{,}5000000$		
$° = 0{,}5150381$	150381	
$° = 0{,}5299193$	148812	— 1569
$° = 0{,}8660254$		
$° = 0{,}8571673$	— 88581	
$° = 0{,}8480481$	— 91192	

Die Einheit für die Unterſchiede iſt, wie man von ſelbſt bemerken wird, ein Zehnmillionentheilchen. Sieht man $\partial^2 y$ und ∂z (oder ∂x) als endliche Größen an, ſo iſt hier $\partial^2 y = -0{,}0001569$, und $\partial x = 0{,}0088581$. nämlich als Differenz des Sinus verſus. Das Quadrat davon iſt $= 0{,}000078466\ldots$ Jener zweyte Unterſchied mit $y = 0{,}5$ multiplicirt giebt zum Producte $0{,}00007845$, welches von dem Quadrate erſt in der achten Stelle verſchieden iſt. Das Quadrat des Unterſchiedes von $\text{col}\,31°$ und $\text{col}\,32°$ weicht mehr ab.

14. Setzt man $y\partial x = \text{conſt.}$ oder läßt die Kreisabſchnitte über dem Sinus verſus gleichförmig wachſen, ſo iſt

$$\frac{a\partial^2 x}{\partial x^2} = -\frac{a^2 - ax}{y^2};$$

$$\frac{a\partial^2 y}{\partial x^2} = -\frac{(2a^3 - ay^2)}{y^3}.$$

15. Aus dem Beyſpiele für den Kreis in (12.) ſieht man deutlich, wie eine Differentialgleichung eine unbeſtimmte iſt, wenn kein Differential als unveränderlich angeſehen wird. Es erhellt ſchon hieraus, daß um eine Differentialgleichung zwiſchen x und y zu einer beſtimmten für jeden Werth von x und den dazu gehörigen von y zu machen, entweder eines der Differentiale ∂x, ∂y, oder das von irgend einer Function derſelben als conſtant angenommen werden müſſe. Dieſes erhellt allgemein aus dem, was in dem Artikel Differenzenrechnung (45.) von der Nothwendigkeit einer beſtändigen Differenz bemerkt worden iſt. Die Anfangsglieder der Differenzreihen zu einer Hauptreihe von Größen, die nach irgend einem Geſetze gebildet werden, erhalten keine beſtimmte Werthe, wenn jene Größen nicht einer arithmetiſchen Reihe von Stellen, Zahlen oder Repräſentanten der Stellen, zugeordnet werden.

16. Es ſey in einer Differentialgleichung zweyten Grades zwiſchen x und y das Differential einer derſelben

oder einer Function von ihnen unveränderlich gesetzt, man will statt desselben aber ein anderes Differential als unveränderlich ansetzen, so hat man zu dem Ende folgendergestalt zu verfahren.

Man setze $p = \frac{\partial y}{\partial x}$; $q = \frac{\partial p}{\partial x}$, ohne weder ∂x noch ∂y unveränderlich anzunehmen, so ist

$$q = \frac{\partial x \partial^2 y - \partial y \partial^2 x}{\partial x^3}.$$

Hiemit verbinde man die Differentialgleichung, welche aus der Annahme des beständigen Differentials entspringt, so kann man die zweyten Differentiale wegschaffen, und dafür q nebst p einführen. In der verwandelten Gleichung setze man für q den Werth $\frac{\partial x \partial^2 y - \partial y \partial^2 x}{\partial x^3}$, so erhält man eine Gleichung, worin kein Differential constant ist.

17 Fall. I. Es sey ∂x constant genommen, so ist bey dieser Annahme, $q = \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$. Setzt man nun $q \partial x^2$ für $\partial^2 y$, und darauf $\partial^2 y - \frac{\partial y \partial^2 x}{\partial x}$ für $q \partial x^2$, so ist dieses eben so gut, als unmittelbar für $\partial^2 y$ setzen $\partial^2 y - \frac{\partial y \partial^2 x}{\partial x}$.

18. Fall. II. Es sey ∂y constant genommen, so hat man für $\partial^2 y$ zu setzen $\partial^2 x - \frac{\partial x \partial^2 y}{\partial y}$. Hier sind nur für die Buchstaben x und y in Fall I. gesetzt y und x.

19. Fall. III. Es sey $y \partial x$ (das Differential der Area einer Curve bey rechtwinklichten Coordinaten) con-

stant gesetzt, so ist $\partial y \partial x = -y\partial^2 x$, also ist $q\partial x^3 = \partial x \partial^2 y + \frac{\partial y^2 \partial x}{y}$. Dafür ist nun zu setzen $\partial x \partial^2 y - \partial y \partial^2 x$. Folglich ist für $\partial^2 x$ zu setzen $-\frac{\partial y \partial x}{y}$. Ferner ist eben daher, $\partial^2 y = q\partial x^2 - \frac{\partial y^2}{y}$, folglich ist für $\partial^2 y$ zu setzen $\partial^2 y = -\frac{\partial y \partial^2 x}{\partial x} - \frac{\partial y^2}{y}$.

20. Fall. IV, Es sey das Differential $\sqrt{(\partial x^2 + \partial x^2)}$ oder das Differential eines Bogens, als unveränderlich angenommen. Dadurch ist $\partial x \partial^2 x + \partial y \partial^2 y = 0$, also $q = -\frac{(\partial x^2 + \partial y^2)\partial^2 x}{\partial x^2 \partial y}$. Daher ist für $\partial^2 x$ zu setzen $\frac{\partial y \partial^2 x - \partial x \partial y \partial^2 y}{\partial x^2 + \partial y^2}$. Auf gleiche Art wird gefunden, daß für $\partial^2 y$ zu setzen ist $\frac{\partial x^2 \partial^2 y - \partial x \partial y \partial^2 x}{dx^2 + \partial y^2}$, worin nur x und y für y und x in jener Formel stehen.

21. Die Substitutionen für $\partial^3 x$ und $\partial^3 y$ in diesem Falle giebt Euler in Calc. diff. P. I. Cap. 8. Die Rechnungsprobe ist, daß, wenn mit der verwandelten Gleichung diejenige verbunden wird, welche das beständige Differential differentiirt giebt, die zuerst gegebene wieder hervorgehen muß.

22. Die Differentialformeln zeigen zum Theil merkwürdige Fortschreitungen, wenn kein Differential constant gesetzt wird.

23. Es sey $z = xy$, so ist

$$\partial z = y\partial x + x\partial y$$
$$\partial^2 z = y\partial^2 x + 2\partial x\partial y + x\partial^2 y$$
$$\partial^3 z = y\partial^3 x + 3\partial^2 x\partial y + 3\partial x\partial^2 y + x\partial^3 y$$
$$\partial^4 z = y\partial^4 x + 4\partial^3 x\partial y + 6\partial^2 x\partial^2 y + 4\partial x\partial^3 y + x\partial^4 y$$

Man sieht gleich, daß die numerischen Coefficienten die Binomialcoefficienten nach der Folge der Potenzen sind. Dieses allgemein einzusehen, setze man die Binomialcoefficienten in der nten Potenz 1, A, B, C, D, ... B, A, 1, und nehme an, daß

$$\partial^n z = y\partial^n x + A\partial^{n-1} x\partial y + B\partial^{n-2} x\partial^2 y + C\partial^{n-3} x\partial^3 y + D\partial^{n-4} x\partial^4 y \ldots + B\partial^2 x\partial^{n-2} y + A\partial x\partial^{n-1} y + x\partial^n y,$$

so ist

$$\partial^{n+1} z = y\partial^{n+1} x + (1+A)\partial^n x\partial y + (A+B)\partial^{n-1} x\partial^2 y + (B+C)\partial^{n-2} x\partial^3 y + (C+D)\partial^{n-3} x\partial^4 y \ldots + (B+A)\partial^2 x\partial^{n-1} y + (A+1)\partial x\partial^n y + x\partial^{n-1} y,$$

Es sind aber 1; $1+A$; $A+B$; $B+C$; ..... $B+A$; $A+1$; 1, die Binomialcoefficienten in der $(n+1)$ten Potenz. Gilt also die Form des Differentials mit den numerischen Coefficienten für irgend eine Ordnung, so gilt sie auch für die nächst höhere, und daher für alle folgende. Sie gilt aber für die ersten vier Ordnungen, also auch für die fünfte, sechste und alle folgenden.

Leibnitz hat dieses Gesetz für die successiven vollständigen Differentiale von xy bemerkt, s. Commerc. epist. Leibn. et Bernoullii, T. I. p. 46.

24. Man setze für x^n das Differential ∂x veränderlich, so ist, $y = x^n$ gesetzt, wenn A, B, C, etc. die Bedeutung in (23.) behalten,

Eben dieses findet man aus der endlichen Gleichung $yy = ax$, wenn sowohl a als x veränderlich gesetzt werden.

23. Es sey $\partial y = P\partial x$, und P eine Function von x, y, a, nebst andern Constanten, die außer a vorhanden seyn mögen. Man setze, daß die variirte Gleichung sey $\partial y = P\partial x + R\partial a$, so daß $P\partial x - \partial y + R\partial a = 0$ sey. Damit diese Gleichung real sey, muß zufolge (17.) seyn,

$$-\left(\frac{\partial R}{\partial x}\right) + R\left(\frac{\partial P}{\partial y}\right) = P\left(\frac{\partial R}{\partial y}\right) - \left(\frac{\partial P}{\partial a}\right),$$

oder

$$\left(\frac{\partial R}{\partial x}\right) + P\left(\frac{\partial R}{\partial y}\right) = R\left(\frac{\partial P}{\partial y}\right) + \left(\frac{\partial P}{\partial a}\right),$$

indem das dortige Q hier $= -1$, also $\partial Q = 0$ ist. Das z daselbst steht hier a.

Nikol. Bernoulli (Bruderſohn von Jakob und Johann Bernoulli) hat diese Aufgabe schon aufgelöst, aber auf einem andern Wege. Sein Verfahren steht in Joh. Bernoulli Opp. T. II. p. 443. Für das hiesige

$$y,\ x,\ P,\ R,\ \frac{\partial P}{\partial y},\ \frac{\partial P}{\partial a},$$

steht bey ihm

$$x,\ y,\ p,\ q,\ T,\ R$$

Er findet die Gleichung, $Tq\partial y + R\partial y = \partial q$. Es fehlt also der Terminus $P\left(\frac{\partial R}{\partial y}\right)$.

Euler hat sich früh sehr viel mit dieser ganzen Untersuchung beschäftigt, wie seine Abhandlungen in den Comm. Petrop. vet. T. VII. VIII. IX. zeigen.

24. Das $\int P\partial x$, wo P eine Function von x und y ist, in Absicht auf y differentiiren, nennt man, unter dem Integralzeichen differentiiren. Dieſs

Differential ist $= \partial y \int \left(\frac{\partial P}{\partial y}\right) \partial x$, nach (21.), wo a ist, was hier durch y bezeichnet wird.

Differentio-Differentialrechnung ist die Entwickelung der Differentiale des zweyten Grades, und höherer, nach ihren Verhältnissen gegen einander, und zu den Potenzen derer vom ersten Grade. Ihr Gebrauch ist wichtig in der höhern Geometrie, und in der reinen Mechanik, deren erste Grundformeln Differentiale vom zweyten Grade enthalten. Sie werden in dem Taylorschen Lehrsatze zur Berechnung der endlichen Differenzen einer Function aus den Potenzen der Differenz der Functionalgröße angewandt.

1. In dem Artikel, Differentiale, (S. 822.), sind schon die Begriffe von den höhern Differentialen erklärt worden. Sie sind so wenig als die des ersten Grades als Größen absolut zu betrachten, sondern bezeichnen, ohne Rücksicht auf bestimmte Quantität, Glieder eines Verhältnisses, welches im Allgemeinen endlich ist, in einzelnen Fällen das von 1:0, oder das von 0:1 seyn kann, und, wenn es 0:0 wird, mehrdeutig ist.

2. Es sey zuerst eine Relation zwischen zwey veränderlichen Größen, x und y, angenommen. Man setze $\frac{y}{x} = p$; $\frac{\partial p}{\partial x} = q$; $\frac{\partial q}{\partial x} = r$; $\frac{\partial r}{\partial s} = s$, u. s. f; so ist eine Differentialgleichung vom ersten Grade zwischen x und y eine endliche zwischen x, y, p; eine vom zweyten Grade ist eine endliche zwischen x, y, p, q; eine vom dritten Grade ist eine endliche zwischen x, y, p, q, r; u. s. f.

3. So wie p der von der Quantität der Veränderungen unabhängige Theil des Quotienten $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ ist, so ist es q in

Abſicht auf $\frac{\Delta^2 y}{\Delta x^2}$; r in Abſicht auf $\frac{\Delta^3 y}{\Delta x^3}$; s in Abſicht a

$\frac{\Delta^4 y}{\Delta x^4}$, u. ſ. f. wenn nämlich die durch x bezeichneten Größ

eine Reihe mit gleich großen Unterſchieden ausmachen,

4. Darum iſt in dieſem Falle $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = q$; $\frac{\partial^3 y}{\partial x^3} = r$

$\frac{\partial^4 y}{\partial x^4} = s$; etc. Die Bezeichnungen der Differentialqu

tienten beziehen ſich auf eine ſtetiger Weiſe ſich verände

de Reihe. Man mag die eine oder die andere Bezeich

nungsart gebrauchen. Die Differentialquotienten ſtell

oft die Relation der veränderlichen Größen und ihrer Ve

änderungen in einer ſtetigen Reihe am augenfälligſten v.

5. Es ſey $y = x^m$, und x verändern ſich gleichförmig

(oder ∂x ſey conſtant, oder $\partial^2 x = 0$), ſo iſt

$$\frac{\partial y}{\partial x} = m x^{m-1}$$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = m(m-1) x^{m-2}$$

$$\frac{\partial^3 y}{\partial x^3} = m(m-1)(m-2) x^{m-3}$$

u. ſ. f.

Wenn m eine ganze Zahl iſt, ſo iſt der mte Differential-

quotient conſtant.

6. Hieraus iſt

$$\frac{\partial^2 y}{\partial y^2} = \frac{m-1}{m} \cdot \frac{1}{y}$$

$$\frac{\partial^3 y}{\partial y^3} = \frac{m-1 \cdot m-2}{m^2} \cdot \frac{1}{y^2}$$

u. ſ. f.

Es sey $z = xy$, und ∂x constant, so ist

$$\partial z = y\partial x + x\partial y$$
$$\partial^2 z = 2\partial x\partial y + x\partial^2 y$$
$$\partial^3 z = 3\partial x\partial^2 y + x\partial^3 y$$
$$\partial^4 z = 4\partial x\partial^3 y + x\partial^4 y$$

u. s. f.

$$\frac{\partial z}{\partial x} = y + px; \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 2p + qx;$$
$$\frac{\partial^3 z}{\partial x^3} = 3q + rx; \quad \frac{\partial^4 z}{\partial x^4} = 4r + sx$$

u. s. f.

. Es sey $z = \frac{y}{x}$, und ∂x constant, so ist

$$z = \frac{\partial y}{x} - \frac{y\partial x}{xx}$$
$$^2z = \frac{\partial^2 y}{x} - \frac{2\partial x\partial y}{xx} + \frac{2y\partial x^2}{x^3}$$
$$^3z = \frac{\partial^3 y}{x} - \frac{3\partial x\partial^2 y}{x^2} + \frac{6\partial x^2\partial y}{x^3} - \frac{6y\partial x^3}{x^4}$$

u. s. f.

9. Es sey $y = \sin\varphi$, und $z = \cos\varphi$, so ist, wenn constant gesetzt wird,

$$y = \cos\varphi . \partial\varphi \qquad \partial z = -\sin\varphi . \partial\varphi$$
$$y = -\sin\varphi . \partial\varphi^2 \qquad \partial^2 z = -\cos\varphi . \partial\varphi^2$$
$$y = -\cos\varphi . \partial\varphi^3 \qquad \partial^3 z = +\sin\varphi . \partial\varphi^3$$
$$y = +\sin\varphi . \partial\varphi^4 \qquad \partial^4 z = +\cos\varphi . \partial\varphi^4$$

u. s. f. u. s. f.

10. Es sey $t = \text{tang}\,\varphi$, und $\partial\varphi$ unveränderlich, so ist (Differentialformel, 31.)

$$\partial t = (1+t^2)\,\partial\varphi$$
$$\partial^2 t = 2t(1+t^2)\,\partial\varphi^2$$
$$\partial^3 t = 2(1+3t^2)(1+t^2)\,\partial\varphi^3$$
u. s. f.

11. Es sey $y = e^x$, und $z = e^{-x}$, wo e die Basis der natürlichen Logarithmen, und x der Logarithme der Zahl y und der Zahl $\frac{1}{z}$ ist. Es ist, wenn ∂x constant gesetzt wird,

$\partial y = e^x \partial x$	$\partial z = -e^{-x}\partial x$
$\partial^2 y = e^x \partial x^2$	$\partial^2 z = +e^{-x}\partial x$
$\partial^3 y = e^x \partial x^3$	$\partial^3 z = -e^{-x}\partial x$
u. s. f.	u. s. f.

12. Es sey $2ax - xx = yy$, so ist $a\partial x - x\partial x = y\partial y$. Setzt man sowohl ∂x als ∂y veränderlich, so ist

$$a\partial^2 x - \partial x^2 - x\partial^2 x = \partial y^2 + y\partial^2 y,$$

oder

$$(a-x)\frac{\partial^2 x}{\partial x^2} - y\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = 1 + \frac{\partial y^2}{\partial x^2}.$$

Der zweyte Theil dieser Gleichung ist, aus der Differentialgleichung vom ersten Grade,

$$= 1 + \left(\frac{a-x}{y}\right)^2 = \frac{a^2 - 2ax + x^2 + y^2}{y^2} = \frac{a^2}{y^2}.$$

Also ist

$$(a-x)\frac{\partial^2 x}{\partial x^2} - y\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{a^2}{y^2}.$$

Dieses ist eine unbestimmte Gleichung für die Differentialquotienten des zweyten Grades, da die Art, wie sich ∂x oder ∂y verändern sollen, nicht festgesetzt ist. Soll

die Gleichung eine bestimmte werden, ohne daß eines der Differentiale unveränderlich sey, so muß irgend ein anderes Differential unveränderlich gesetzt werden. Man nehme dazu das $\sqrt{(\partial x^2 + \partial y^2)}$. Dadurch ist $\partial(\partial x^2 + \partial y^2) = 0$, also $\partial x \partial^2 x + \partial y \partial^2 y = 0$. Durch die Substitution des Werthes von $\partial^2 y$ oder $\partial^2 x$ aus dieser Gleichung in der unbestimmt gelassenen wird nun diese eine bestimmte.

$$\frac{a\partial^2 x}{\partial x^2} = \frac{aa - ax}{y^2}, \quad \text{oder} \quad \frac{a\partial^2 x}{\partial y^2} = \frac{a}{a - x}.$$

Setzt man für $\partial^2 x$ seinen Werth durch $\partial^2 y$, so ist

$$\frac{a\partial^2 y}{\partial x^2} = -\frac{a}{y}, \text{ oder } \frac{a\partial^2 y}{\partial y^2} = -\frac{ay}{(a-x)^2}.$$

Die hier zum Beyspiel genommene Gleichung ist für einen Kreis, worin y der Sinus eines Bogens, x der Sinus versus, $a - x$ der Cosinus für den Halbmesser a ist. Die Differentialformeln folgen auch aus denen für $\partial^2 y$ und $\partial^2 z$ in (9.), wenn a statt der Einheit, und $a - x$ für az gesetzt wird, durch Elimination von $\partial\varphi$.

13. Exempel. Da die Differentialverhältnisse auch für endliche kleine Differenzen beynahe gelten, so suche man das Verhältniß der zweyten Unterschiede dreyer Sinus zu dem Quadrate des Unterschiedes des ersten und zweyten, oder des zweyten und dritten Cosinus, z. B. zu dem Winkel $\varphi = 30°$, mit einem Unterschiede von 1 Gr, für die folgenden Winkel. Es ist

		I. Unterſch.	II. Unterſch.
sin 30°	= 0,5000000		
sin 31°	= 0,5150381	150381	
sin 32°	= 0,5299193	148812	— 1569
cos 30°	= 0,8660254		
cos 31°	= 0,8571673	— 88581	
cos 32°	= 0,8480481	— 91192	

Die Einheit für die Unterschiede ist, wie man von selbst bemerken wird, ein Zehnmilliontheilchen. Sieht man $\partial^2 y$ und ∂z (oder ∂x) als endliche Größen an, so ist hier $\partial^2 y = -0{,}0001569$, und $\partial x = 0{,}0088581$. nämlich als Differenz des Sinus versus. Das Quadrat davon ist $= 0{,}000078466\ldots$ Jener zweyte Unterschied mit $\frac{1}{2} = 0{,}5$ multiplicirt giebt zum Producte 0,00007845, welches von dem Quadrate erst in der achten Stelle verschieden ist. Das Quadrat des Unterschiedes von cos 31° und cos 32° weicht mehr ab.

14. Setzt man $y\partial x = \text{const.}$ oder läßt die Kreisabschnitte über dem Sinus versus gleichförmig wachsen, so ist

$$\frac{a\partial^2 x}{\partial x^2} = -\frac{a^2 - ax}{y^2};$$

$$\frac{a\partial^2 y}{\partial x^2} = -\frac{(2a^2 - ay^2)}{y^3}.$$

15. Aus dem Beyspiele für den Kreis in (12.) sieht man deutlich, wie eine Differentialgleichung eine unbestimmte ist, wenn kein Differential als unveränderlich angesehen wird. Es erhellt schon hieraus, daß um eine Differentialgleichung zwischen x und y zu einer bestimmten für jeden Werth von x und den dazu gehörigen von y zu machen, entweder eines der Differentiale ∂x, ∂y, oder das von irgend einer Function derselben als constant angenommen werden müsse. Dieses erhellt allgemein aus dem, was in dem Artikel Differenzenrechnung (45.) von der Nothwendigkeit einer beständigen Differenz bemerkt worden ist. Die Anfangsglieder der Differenzreihen zu einer Hauptreihe von Größen, die nach irgend einem Gesetze gebildet werden, erhalten keine bestimmte Werthe, wenn jene Größen nicht einer arithmetischen Reihe von Stellen, Zahlen oder Repräsentanten der Stellen, zugeordnet werden.

16. Es sey in einer Differentialgleichung zweyten Grades zwischen x und y das Differential einer derselben

oder einer Function von ihnen unveränderlich gesetzt, man will statt desselben aber ein anderes Differential als unveränderlich ansetzen, so hat man zu dem Ende folgendergestalt zu verfahren.

Man setze $p = \frac{\partial y}{\partial x}$; $q = \frac{\partial p}{\partial x}$, ohne weder ∂x noch ∂y unveränderlich anzunehmen, so ist

$$q = \frac{\partial x \partial^2 y - \partial y \partial^2 x}{\partial x^3}.$$

Hiemit verbinde man die Differentialgleichung, welche aus der Annahme des beständigen Differentials entspringt, so kann man die zweyten Differentiale wegschaffen, und dafür q nebst p einführen. In der verwandelten Gleichung setze man für q den Werth $\frac{\partial x \partial^2 y - \partial y \partial^2 x}{\partial x^3}$, so erhält man eine Gleichung, worin kein Differential constant ist.

17 Fall. I. Es sey ∂x constant genommen, so ist bey dieser Annahme, $q = \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$. Setzt man nun $q \partial x^2$ für $\partial^2 y$, und darauf $\partial^2 y - \frac{\partial y \partial^2 x}{\partial x}$ für $q \partial x^2$, so ist dieses eben so gut, als unmittelbar für $\partial^2 y$ setzen $\partial^2 y - \frac{\partial y \partial^2 x}{\partial x}$.

18. Fall. II. Es sey ∂y constant genommen, so hat man für $\partial^2 y$ zu setzen $\partial^2 x - \frac{\partial x \partial^2 y}{\partial y}$. Hier sind nur für die Buchstaben x und y in Fall I. gesetzt y und x.

19. Fall. III. Es sey $y \partial x$ (das Differential der Area einer Curve bey rechtwinklichten Coordinaten) con-

Der erste Partialdividendus ist 32965 hunderttausend, weil 3296 Millionen keine Millionen zum Quotienten geben. Da der dekadische Werth des ersten Partialquotienten, hunderttausend, bestimmt ist, so hat man nun noch nur den Zahlwerth desselben zu suchen, wozu man die 32965 als bloße Einer anzusehen hat. Das Product aus diesem Zahlwerthe 7 in den Divisor, nämlich 30506, ist zur Seite gesetzt, und von 32965 abgezogen. So auch die übrigen Partialproducte. Dieses Verfahren erspart Raum. Den Quotienten setzt man am bequemsten und deutlichsten über den Dividendus, so daß die Ziffern von gleichem dekadischen Werthe über einander zu stehen kommen.

Ein geübter Rechner kann sich die Hinsetzung der Producte ersparen, und jedes Partialproduct dieser Producte sogleich von dem Dividendus abziehen. Das obige Exempel bekommt sonach diese Gestalt:

Divisor	756429 Quotient
4358	3296517582 Dividendus
	245919320
	2806620
	18290
	130
	0

Die Partialdividenden laufen mit einem Theile schräg hinauf: der lezte ganz und gar. Die erste Art erfordert weniger Anstrengung, und gewährt eine leichte Revision, erlaubt auch das Ausstreichen eines zu groß oder klein genommenen Products.

Man hat noch eine Art, wo die Reste jedes Partialdividendus überhalb des ganzen Dividendus gesetzt werden, wie in folgendem Beyspiele, wo 582758 durch 463 getheilt sind, und 304 zum Reste bleiben.

$$\partial z = y\partial x + x\partial y$$
$$\partial^2 z = y\partial^2 x + 2\partial x\partial y + x\partial^2 y$$
$$\partial^3 z = y\partial^3 x + 3\partial^2 x\partial y + 3\partial x\partial^2 y + x\partial^3 y$$
$$\partial^4 z = y\partial^4 x + 4\partial^3 x\partial y + 6\partial^2 x\partial^2 y + 4\partial x\partial^3 y + x\partial^4 y$$

Man sieht gleich, daß die numerischen Coefficienten die Binomialcoefficienten nach der Folge der Potenzen sind. Dieses allgemein einzusehen, setze man die Binomialcoefficienten in der nten Potenz 1, A, B, C, D, ... B, A, 1, und nehme an, daß

$$\partial^n z = y\partial^n x + A\partial^{n-1} x\partial y + B\partial^{n-2} x\partial^2 y + C\partial^{n-3} x\partial^3 y + D\partial^{n-4} x\partial^4 y \ldots + B\partial^2 x\partial^{n-2} y + A\partial x\partial^{n-1} y + x\partial^n y,$$

so ist

$$\partial^{n+1} z = y\partial^{n+1} x + (1+A)\partial^n x\partial y + (A+B)\partial^{n-1} x\partial^2 y + (B+C)\partial^{n-2} x\partial^3 y + (C+D)\partial^{n-3} x\partial^4 y \ldots + (B+A)\partial^2 x\partial^{n-1} y + (A+1)\partial x\partial^n y + x\partial^{n-1} y,$$

Es sind aber $1; 1+A; A+B; B+C; \ldots\ldots B+A; A+1; 1$, die Binomial-Coefficienten in der $(n+1)$ten Potenz. Gilt also die Form des Differentials mit den numerischen Coefficienten für irgend eine Ordnung, so gilt sie auch für die nächst höhere, und daher für alle folgende. Sie gilt aber für die ersten vier Ordnungen, also auch für die fünfte, sechste und alle folgenden.

Leibnitz hat dieses Gesetz für die successiven vollständigen Differentiale von xy bemerkt, s. **Commerc. epist. Leibn. et Bernoullii, T. I. p. 46.**

24. Man setze für x^n das Differential ∂x veränderlich, so ist, $y = x^n$ gesetzt, wenn A, B, C, etc. die Bedeutung in (23.) behalten,

$$\partial y = \mathfrak{A} x^{n-1} \partial x$$
$$\partial^2 y = \mathfrak{A} x^{n-1} \partial^2 x + \mathfrak{B} x^{n-2} . 2 \partial x^2$$
$$\partial^3 y = \mathfrak{A} x^{n-1} \partial^3 x + \mathfrak{B} x^{n-2} 6 \partial x \partial^2 + \mathfrak{C} x^{n-3} 6 \partial x^3$$
$$\partial^4 y = \mathfrak{A} x^{n-1} \partial^4 x + \mathfrak{B} x^{n-2} (8 \partial x . \partial^3 x + 6 (\partial^2 x)^2)$$
$$+ \mathfrak{C} x^{n-3} 36 \partial x^2 . \partial^2 x + \mathfrak{D} x^{n-4} . 24 \partial x^4$$
$$\partial^5 y = \mathfrak{A} x^{n-1} \partial^5 x + \mathfrak{B} x^{n-2} (10 \partial x . \partial^4 x + 20 \partial^2 x . \partial^3 x)$$
$$+ \mathfrak{C} x^{n-3} (60 \partial x^2 . \partial^3 x + 90 \partial x . (\partial^2 x)^2)$$
$$+ \mathfrak{D} x^{n-4} . 240 \partial x^3 . \partial^2 x + \mathfrak{E} x^{n-5} . 120 \partial x^5$$

u. ſ. f.

25. Die Formen dieſer Differentiale ſind den Coefficienten der nten Potenz des Polynomium, $a + bx + cx^2 + dx^3 + ex^4 + \text{etc.}$ ähnlich, nur die numeriſchen Coefficienten ſind verſchieden.

Man nehme aber die Reihe,

$$v = a + bx + \frac{c}{1.2} x^2 + \frac{d}{1.2.3} x^3 + \frac{e}{1..4} x^4 + \text{etc.}$$

und ſetze

$$v^n = A + \frac{B}{1} x + \frac{C}{1.2} x^2 + \frac{D}{1.2.3} x^3 + \frac{E}{1.2.3.4} x^4 + \text{etc.}$$

ſo iſt (combinat. Analyſis, S. 492),

$$A = a^n$$
$$B = \mathfrak{A} a^{n-1} b$$
$$C = \mathfrak{A} a^{n-1} c + \mathfrak{B} a^{n-2} . 2 b^2$$
$$D = \mathfrak{A} a^{n-1} d + \mathfrak{B} a^{n-2} . 6 bc + \mathfrak{C} a^{n-3} . 6 b^3$$
$$E = \mathfrak{A} a^{n-1} e + \mathfrak{B} a^{n-2} (8 bd + 6 c^2)$$
$$+ \mathfrak{C} a^{n-3} . 36 b^2 c + \mathfrak{D} a^{n-4} . 24 b^4$$
$$F = \mathfrak{A} a^{n-1} f + \mathfrak{B} a^{n-2} (10 be + 20 cd)$$
$$+ \mathfrak{C} a^{n-3} (60 b^2 d + 90 bc^2)$$
$$+ \mathfrak{D} a^{n-4} . 240 b^3 c + \mathfrak{E} a^{n-5} . 120 b^5.$$

etc.

Hier iſt die Formation ganz dieſelbe mit der für die ſucceſſiven Differentiale gefundenen.

Da dieſe nach einem beſtimmten Geſetze gebildet werden, und die Polynomial-Coefficienten ebenfalls, und da die Form hier bis zu dem fünften Differential einerley iſt mit der Form der Coefficienten des Polynomium, ſo iſt die Induction hinlänglich, um den Satz aufzuſtellen, daß ſie auch für höhere Differentiale und die folgenden Coefficienten dieſelbe bleibe.

25. In den Polynomial-Coefficienten werden a, b, c, d, e, etc. ſo wie A, B, C, D, E, etc. jedes mit dem nachfolgenden vertauſcht, um die Coefficienten folgweiſe aus einander herzuleiten. Eben dies geſchieht in den Differentialformeln mit x, ∂x, ∂²x, ∂³x, etc. und mit y, ∂y, ∂²y, ∂³y etc. Da die erſten Formeln beiderley Art zuſammen ſtimmen, ſo geſchieht dies auch mit allen folgenden.

Die hier bemerkte Derivation iſt der in dem Artikel, combinatoriſche Analyſis (46.), angegebenen ähnlich,

27. Setzt man $a = x$; $b = \partial x$; $c = \partial^2 x$; $d = \partial^3 x$; etc. und nimmt die Scale der Coefficienten in der Reihe p,

$$\left(x, \frac{\partial z}{1}, \frac{\partial^2 z}{1.2}, \frac{\partial^3 z}{1.2.3}, \text{etc.}\right)$$

ſo iſt, nach der combinatoriſchen Bezeichnungsart,

$$\partial^m x^n = 1.2.3 \ldots m\, p^n\, x\, (m+1).$$

Eine andere Methode, die höhern Differentiale von x^n zu finden, gebraucht Pfaff in der Hindenburgiſchen Sammlung c. a. Abhandlungen, II. nr. V. Man vergleiche etwa auch noch meine Bemerkungen über den polynomiſchen Lehrſatz in dem erſten Bande, S. 80 ff.

Bedingungsgleichung der Realität einer jeden Differentialgleichung zwiſchen zwey veränderlichen Größen.

28. Es ſeyn zwey veränderliche Größen, x, y; und $\partial y = p\partial x$; $\partial p = q\partial x$; $\partial q = r\partial x$; $\partial r = s\partial x$; etc. Eine Function der Größen x, y, p, q, r, s, etc. ſey V, und das gegebene Differential dieſer Function

$$\partial V = M\partial x + N\partial y + P\partial p + Q\partial q + R\partial r + S\partial s + \text{etc.}$$

Iſt hieraus

$$N - \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial^2 Q}{\partial x^2} - \frac{\partial^3 R}{\partial x^3} + \frac{\partial^4 S}{\partial x^4} - \text{etc.} = 0,$$

wobey das Differential ∂x unveränderlich genommen wird, ſo iſt die Differentialformel $V\partial x$ integrirbar, was auch die Relation zwiſchen x und y ſeyn mag.

29. Euler trägt dieſen Satz in dem Calculo variationum, der dem dritten Theile ſeines Werks über die Integralrechnung beygefügt iſt, vor, §. 92. Er hat den Satz aus der Lehre von den Variationen hergeleitet, und ſagt, daß ein directer Weg ihn zu erweiſen (das iſt, aus unmittelbaren Gründen der Differentialrechnung), ſchwer zu finden ſeyn möchte. Lexell hat in den Novis Comm. Petrop. T. XV. in der Abhandlung de criteriis integrabilitatis formularum differentialium einen verwickelten Beweis vorgetragen, den er in einer folgenden Abhandlung T. XVI. noch abändert, weil er ihm noch nicht Genüge thut. Der Verfaſſer der Anzeige dieſer Abhandlungen in denſelben Commentarien verſichert, daß Euler wenigſtens 16 Jahre vor der Ausgabe ſeiner Integralrechnung den Satz gefunden gehabt hätte. Er habe ihn einem Mathematiker in Frankreich mitgetheilt, und dadurch habe der Marquis de Condorcet vermuthlich Kenntniß davon erhalten, und ſey veranlaßt worden, einen Beweis zu ſuchen, den er der Pariſer Akademie im J. 1764 vorgelegt hat, worauf er ferner in ſeiner Schrift über die Integralrechnung die Lehre von den Kennzeichen der Integrabilität ausführlich vorgetragen hat. Nachher haben Couſin und la Croix in ihren Lehrbüchern über die Differential- und Integralrechnung Beweiſe des Satzes gegeben, jener in dem erſten Bande §. 240; dieſer in dem 1. Cap. §. 86.

30. Ein leichtes Beyſpiel iſt folgendes. Es ſey

$$V\partial x = \left(\frac{P}{y} - \frac{xpp}{yy} + \frac{xq}{y}\right)\partial x;$$

Diese Formel ist integrabel, da sie aus der, $\int V \partial x = \frac{xp}{y}$ hergeleitet ist. Setzt man nun $\partial V = M\partial x + N\partial y + P\partial p + Q\partial q$, so ist

$$M = -\frac{pp}{yy} + \frac{q}{y}; \quad N = \frac{-p}{yy} + \frac{2xpp}{y^3} - \frac{xq}{yy};$$

$$P = \frac{1}{y} - \frac{2xp}{yy}; \quad Q = \frac{x}{y}.$$

Hieraus $\frac{\partial P}{\partial x} = \frac{-3p}{yy} + \frac{4xpp}{y^3} - \frac{2xq}{yy}$,

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{1}{y} - \frac{xp}{yy},$$

ferner $\frac{\partial^2 Q}{\partial x^2} = \frac{-2p}{yy} + \frac{2xpp}{y^3} - \frac{xq}{yy}$.

Folglich $\frac{\partial P}{\partial x} - \frac{\partial^2 Q}{\partial x^2} = \frac{-p}{yy} + \frac{2xpp}{y^3} - \frac{xq}{yy}$,

welcher Werth dem von N gleich ist.

Dignität einer Zahl bedeutet ein Product von gleichen Factoren. In deutschen Schriften ist Potenz gewöhnlicher.

Dimensionen, s. Abmessung.

Dimensionszeichen sind Bezeichnungen der Coefficienten in einer Reihe und den Potenzen derselben, welche E. G. Fischer in seiner Schrift: Theorie der Dimensionszeichen, Halle, 1792, gebraucht, um bey den Substitutionen dieser Potenzen in einer andern Reihe das Gesetz der dadurch entstehenden Coefficienten in dieser leicht anschaulich zu machen, und insbesondere dadurch zu einer allgemeinen Auflösung algebraischer Gleichungen, und Umkehrungsmethode der Reihen zu gelangen.

Die Coefficienten in einer Reihe bekommen alle dasselbe Symbol, aber mit Ziffern oder allgemeinen Zahlzei-

ſetzt, daß der Bruch auf die kleinſte Benennung gebracht ſey. Duodecimalbrüche brechen ab, wenn der Nenner bloß 2 und 3 zu Factoren hat. Es giebt von 1 bis zu irgend einer Zahl N mehr Zahlen, die 3, als ſolche, die 5 zum Factor haben.

Darum kann man aber nicht das dekadiſche Syſtem abſchaffen, und das dodekadiſche einführen, wie es Wernebuͤrg in ſeiner Begeiſterung will, der es jedem redlichen Manne, ſelbſt jeder gebildeten vernünftigen Regierung zur Pflicht macht, das dodekadiſche Syſtem zu verbreiten und geſetzlich zu machen. Er hat dazu eigene neue Wörter und Ziffern angegeben, und ein ſtarkes Rechenbuch, nach der von ihm ungrammatiſch ſogenannten Teliſadik (dem allein vollkommenen unter allen Zahlen-Syſtemen) ausgearbeitet, wovon der erſte Theil im J. 1660 (dodekadiſch) erſchienen iſt.

Dodekagonalzahl, ſ. Polygonalzahl.

Doppelbruch, ſ. Bruch. S. 362.

Doppelpunct iſt ein Punct einer Curve, worin ſich zwey Zweige derſelben ſchneiden, oder auch eine Spitze bilden. In jenem Falle hat die Subtangente, daher auch $\frac{\partial y}{\partial x}$, zwey Werthe, ſo daß für dieſen Quotienten eine quadratiſche Gleichung gefunden wird. In dem andern Falle wird $\frac{\partial y}{\partial x}$ auch durch eine quadratiſche Gleichung, aber mit zwey gleichen Wurzeln gefunden. S. berührende Linie, und krumme Linie.

Doppeltgerade ganze Zahl iſt, die ſich zweymahl durch 2 theilen läßt, oder ein Vielfaches von 4.

Doppelverhältniß, ſ. duplicirtes Verhältniß.

Dragma iſt in der alten Algebra die gegebene Größe in einer Gleichung. (Käſtners Geſchichte der Mathem.

Hier sind diese Symbole ebenfalls Reihen- Local- und ombinations- Zeichen zugleich mit Einschluß der Ver- zungszahl zu jedem Bestandtheile.

Diese, zwar nicht ganz neue Bezeichnungsart, oder ne ähnliche, ist sehr dienlich, die Fundamental- Einrich- ng einer zusammengesetzten Reihe deutlich und einfach rzustellen, gleichsam das Skelett einer Reihe zu zeigen. hne die Combinationstheorie aber möchte das Verfahren y der Entwickelung noch dunkel bleiben. Da Fischer ese nicht mit in seinen Vortrag gehörig aufnahm, so sind m weitläufige Hülfstafeln nöthig geworden. Übrigens sein Werk den Liebhabern der feinern Analysis zur Übung der Behandlung der Reihen und Gleichungen sehr zu npfehlen. Es ist mit Fleiß, Genauigkeit und viele enntniß ausgearbeitet, welches desto rühmlicher ist, da is Amt des Verfassers, als Lehrers der lateinischen Spra- e an einer gelehrten Schule in Berlin, ihm nur erlaubte, Lebenstunden der Mathematik zu widmen.

Diminutus numerus, eben das, was defi- ens numerus, s. oben S. 719.

Diophanteische Analysis, Aufgaben, s. unbe- immte Analytik.

Diorismus, s. oben S. 88.

Directrix, oder linea dirigens, ist diejenige ge- de Linie, längs welcher die Bewegung einer andern ge- den Linie oder einer Ebene geschieht, bey der Beschrei- ung einer ebenen Figur oder eines Körpers. So ent- eht ein Parallelogramm, indem die eine Seite längs der ndern, der dirigirenden, sich parallel bleibend fortgescho- n wird, oder ein Prisma durch die Bewegung längs der nen Seitenlinie. Die Basis der Conchoide, von wel- er aus die gegebene gerade Linie auf einer, um einen fe- en Punct sich drehenden, geraden Linie genommen wird, eißt auch linea directrix Conchoidis.

das Dreyeck spitzwinklicht (acutangulum, oxygonium); ist ein Winkel stumpf, so ist es ein stumpfwinklichtes (obtusangulum, amblygonium).

Die beiden Seiten eines rechtwinklichten Dreyecks, welche den rechten Winkel einschließen, heißen Katheten; die gegenüber stehende Seite heißt die Hypotenuse.

3. Ein geradlinichtes Dreyeck stellt zugleich ein System von drey sich gegenseitig schneidenden geraden Linien dar, wenn die Seiten desselben unbestimmt verlängert werden. Der äußere Winkel, welchen eine verlängerte Seite mit der anliegenden Seite des Dreyecks macht, ist gleich der Summe der beiden innern entgegengesetzten Winkel. Daher ist die Summe der drey innern Winkel zwey Rechten gleich. — In dem gleichseitigen Dreyeck sind alle drey Winkel gleich groß; in dem gleichschenklichten sind die Winkel an der Grundlinie sich gleich; in dem ungleichseitigen sind alle Winkel ungleich. — Der größern Seite steht der größere Winkel gegen über, der kleinern Seite der kleinere Winkel, und umgekehrt.

4. Ein Dreyeck wird vollkommen bestimmt, 1) durch zwey Seiten mit dem eingeschlossenen Winkel; 2) durch zwey Winkel und eine Seite; 3) durch alle drey Seiten. — Rechtwinklichte Dreyecke sind ganz bestimmt durch zwey Seiten; schiefwinklichte können mit zwey Seiten und einem von ihnen nicht eingeschlossenen Winkel auf zweyerley Art verzeichnet werden. Das eine ist spitzwinklicht, das andere stumpfwinklicht.

5. Dreyecke, welche die genannten Bestimmungen gemein haben, sind congruent, oder decken sich. Die Winkel, welche in ihnen denselben Seiten gegen über liegen, sind sich gleich; so auch die Seiten, welche denselben Winkeln gegen über stehen.

6 Dreyecke, wie ABC, abc (Fig. 116, Tab. VIII.) sind ähnlich, erstlich, wenn die Winkel des einen den

Winkeln des andern gleich sind, A = a; B = b; C = c.
Zweytens, wenn A = a, und AB : AC = ab : ac ist.
Drittens, wenn die Seiten einerley Verhältnisse haben, nämlich, wenn AB : AC = ab : ac, und AB : BC = ab : bc, oder AC : BC = ac : bc ist. In allen drey Fällen liegen die übereinstimmenden Winkel denjenigen Seiten gegenüber, welche gleichnamige Glieder der Proportionen sind, und umgekehrt sind diejenigen Seiten gleichnamige Glieder der Proportionen, welche den übereinstimmenden Winkeln gegen über stehen.

In dem ersten Falle ist AB : AC = ab : ac und AB : BC = ab : bc; auch AC : BC = ac : bc. In dem zweyten ist B = b; C = c, woraus dann die beiden übrigen Proportionen folgen. In dem dritten Falle ist A = a; B = b; C = c.

7. Rechtwinklichte Dreyecke sind ähnlich, wenn zwey Seiten in dem einen sich verhalten wie zwey Seiten in dem andern, es sey, daß beide den rechten Winkel einschließen, oder daß beide einen der spitzen enthalten.

8. In dem Dreyeck ABC (Fig. 117.) sey DE parallel mit BC, so ist AB : AC = AD : AE, und AD : BD = AE : EC. Auch AB : BC = AD : DE; und AC : BC = AE : DE. Die Dreyecke ABC, ADE sind sich ähnlich.

9. In dem Dreyeck ABC (Fig. 118.) sey der Winkel BAC durch die Linie AD halbirt, welche BC in D schneidet, so ist AB : AC = BD : CD. Denn man ziehe DE parallel mit AC, so ist der W. EDA = DAC = DAE, also DE = AE. Wegen der ähnlichen Dreyecke ABC, BDE ist AB : AC = BE : ED = BE : AE = BD : DC, aus (8.).

10. Die Seite AB des Dreyecks ABC (Fig. 119.) werde nach AE hin verlängert, und der äußere Winkel CAE werde durch die Linie AD halbirt, welche die verlängerte BC in D schneidet; es ist AB : AC = BD : CD.

große Theile, nebst einem Theile, der $\frac{1}{3}$ eines dieser Theile ist, eingetheilt vorstellen, und der Quotient ist einer der 12 gleichen Theile. Ist der Divisor ein eigentlicher Bruch, z. B. $\frac{3}{4}$, so enthält der Dividendus in diesem Falle von 5 Theilen des Quotienten nur 3, und auf ähnliche Art in ähnlichen Fällen.

Das Product aus dem Quotienten (der Größe des Theils) in den Divisor (die Menge der Theile) giebt den Dividendus. Daher kann man die Beziehungen verwechseln, und den Divisor auch als die Größe des Theils, und den Quotienten als die Anzahl der Theile in dem Dividendus betrachten. Diese zweyfache Beziehung ist wichtig bey der Division einer benannten Zahl. Wenn 36 Thlr. in 9 gleiche Theile zu theilen sind, so ist der Divisor die Anzahl der Theile, und der Quotient 4 Thlr. die Größe des Theils, von einerley Art mit dem Dividendus. Fragt man aber, wie oft 9 Thlr. in 36 Thlrn. enthalten sind, so zeigt der Divisor die Größe des Theils an, und der Quotient 4 die Anzahl der gleichen Theile. Der Quotient bekommt bey der Antwort oder in dem Facit den Zusatz, mahl.

Bey der Erfindung des Quotienten sieht man den Divisor als die Größe des Theils an, und den Quotienten als die Anzahl der gleichen Theile. Denn man zieht den Divisor von dem Dividendus so oft ab, bis dieser erschöpft ist, und, wenn dieses nicht der Fall ist, verwandelt man den nicht mehr theilbaren Rest in eine Anzahl kleinerer Theile, und nimmt von dem Divisor ebenfalls einen gewissen Theil. In dem beygefügten Schema ist ABCD der Dividendus, AB der Divisor.

A * * * * * C
* * * * *
B * * * * * D

Setzt man diesen so oft hin, bis die Menge der Einer in ABCD erschöpft ist, so ist AC der Quotient, so groß als die Anzahl der gleichen in ABCD enthaltenen AB. Aber AC ist nun auch die Größe des Theils, der in ABCD so vielmahl enthalten ist, als die Einheit in dem Divisor AB.

Da es fast immer sehr beschwerlich seyn würde, den
tienten durch wiederholtes Abziehen des Divisors zu
n, so muß die Arithmetik zeigen, wie dieses bequemer
möglichst leicht geschehen könne.

Man theile also den Dividendus in mehrere Partialdi-
nden, deren jeder ein Vielfaches des Divisors sey, doch
t über das Neunfache, so fern sie als Einer ohne Rück-
auf ihren dekadischen Werth betrachtet werden.
Einheiten dieser Partialdividenden nehmen dekadisch
Wenn der letzte, der die Einer enthält, kein Viel-
es des Divisors ist, so wird der Überschuß in kleinere
le aufgelöset. Die Partialquotienten sind jeder gleich-
ig mit dem Dividendus, woraus sie entstehen, so daß
ieser Rücksicht der Quotient die Größe des Theils an-
t. Den ersten findet man, wenn man in dem Divi-
us von der linken Hand an so viele Ziffern nimmt,
diese als eine Anzahl von Einern betrachtet, größer
der Divisor, aber kleiner als sein Zehnfaches sind.
n sucht nun die größte Zahl des Vielfachen vom Di-
, welches hierin als in einer Anzahl von Einern steckt,
dieses Vielfache ab, und fügt zu dem Reste, als
ner betrachtet, die nächstfolgende Ziffer des Quotien-
als Einer. Mit diesem zweyten Partialdividendus
ährt man wie mit dem ersten, u. s. f. bis man zum
n Dividendus bloße Einer erhält.

Exempel. Die Zahl 3296517582 zu dividiren
h 4358.

Divisor	
4358	756429, Quotient
	3296517582, Dividendus
30506	24591
21790	28017
26148	18695
17432	12638
8716	39222
39222	0 Rest.

nun RQ von AO ſo geſchnitten wird, ſo muß AO verlängert die Seite BC halbiren.

Der Punct O iſt der Schwerpunct des Dreyecks.

17. Über die Lage dieſer vier merkwürdigen Puncte in einem Dreyeck hat Euler eine algebraiſche Unterſuchung angeſtellt. Solutio facilis problematum quorundam geometricorum, Novi Comm. Petrop. T. XI. a. a. 1765. Er erweiſet, daß der Mittelpunct des umgeſchriebenen Kreiſes, der Durchſchnitt der Perpendikel von den Winkelpuncten auf die Seiten, und der Schwerpunct allemahl in gerader Linie liegen, und zwar ſo, daß der letztere immer zwiſchen jenen beiden liegt, von dem zweyten zweymahl ſo weit entfernt als von dem erſten.

18. In einem rechtwinklichten Dreyeck iſt das Quadrat von der Hypotenuſe ſo groß als die Summe der Quadrate von den Katheten. Hievon in dem Artikel, pythagoriſcher Lehrſatz.

19. In dem ſpitzwinklichten Dreyeck ABC (Fig. 126.) ſey CD ſenkrecht auf AB; es iſt

$$BC^2 + 2AB \times AD = AB^2 + AC^2.$$

Denn es iſt $AB^2 = AD^2 + 2AD \times BD + BD^2$, und $AD^2 + AC^2 = 2AD^2 + 2AD \times BD + BD^2 + CD^2 = BC^2 + 2AB \times AD$.

20. In dem bey A ſtumpfwinklichten Dreyeck ABC (Fig. 127.) iſt CD auf die verlängerte BA ſenkrecht gezogen; es iſt $BC^2 = AB^2 + AC^2 + 2AB \times AD$.

Denn $BD^2 = AB^2 + 2AB \times AD + AD^2$ alſo $BC^2 = AB^2 + 2AB \times AD + AD^2 + CD^2 = AB^2 + AC^2 + 2AB \times AD$.

21. In beiden Fällen iſt $BC^2 - AC^2 = BD^2 - AD^2$. Wäre in dem ſpitzwinklichten Dreyeck BC kleiner als AC, ſo iſt $AC^2 - BC^2 = AD^2 - BD^2$.

22. Dadurch iſt $(BC + AC)(BC - AC) = (BD + AD)(BD - AD)$, oder in dem ſpitzwinklichten Dreyeck, $AB : BC + AC = BC - AC : BD - AD$;

b in dem ſtumpfwinklichten, AB : BC + AC
: BC − AC :: BD + AD.

Die Verwandlung des Unterſchiedes zweyer Quadrate
ein Rechteck mag hier aus arithmetiſchen Gründen
Buchſtabenrechn. 18.) angenommen werden. Man kann
aber leicht nach Euklideiſcher Art erweiſen.

23. Die Seite AB, auf welche, oder auf deren Ver-
ngerung das Perpendikel von C gelaſſen iſt, werde in
halbirt; es iſt 2 AB : BC + AC = BC — AC : DE.

Denn in dem ſpitzwinklichten Dreyeck (Fig. 126.) iſt
D — AD = AE + DE — AD = 2 DE, ſo daß
ſe Proportion die in (22.) gefundene iſt. In dem
umpfwinklichten (Fig. 127.) iſt BD + AD = AE
· ED + AD = 2 ED, alſo iſt die zweyte Proportion
enfalls die hier aufgeſtellte.

Dieſe Proportion wird in den Elementen angewandt,
is den Seiten eines Dreyecks die Winkel zu finden.
er Unterſchied zwiſchen AE und DE iſt AD, und
C : AD = 1 : cos A.

24. In eben dieſen Dreyecken ziehe man von C nach
r Mitte E von AB die Linie CE; es iſt AC² + BC²
= 2 AE² + 2 EC².

Denn das ſpitzwinklichte (Fig. 126.) zerfällt in das
itzwinklichte ACE, und das ſtumpfwinklichte BCE.
n jenem iſt AC² + 2 AE × DE = AE² + CE²,
19.), in dieſem iſt BC² = BE² + CE² + 2 BE
: DE (20.). Beide Gleichungen zuſammengenommen,
ben die aufgeſtellte.

Das ſtumpfwinklichte Dreyeck ABC (Fig. 127.) zer-
llt in zwey ſtumpfwinklichte ACE, BCE, für deren
ſteres aber der Satz in (19), nämlich AC² + 2 AE × DE
= AE² + EC² gilt, weil der von AE, CE eingeſchloſ-
ne Winkel E ſpitz iſt.

25. In dem Dreyeck ABC (Fig. 128.) ſey der Winkel
. durch die Linie AD halbirt; es iſt AB × AC = AD²
. DB × DC.

Man fälle von C die senkrechte CE auf AD, wenn nämlich der an der Seite des spitzen Winkels ADC liegende Winkel des Dreyecks durch C bezeichnet wird. Man nehme EF = ED, und ziehe CF, so ist W. AFC = ADB, und △ACF ähnlich dem △ABD; also ist

$$BD : AD = FC : AF = DC : AF,$$

und $AB : AD = AC : AF$.

Ferner ist aus (20.), $AC^2 = AF^2 + FC^2 + 2AF \times FE = DC^2 + AF(AF + FD) = DC^2 + AF \times AD$.

Aus der ersten der angezeigten Proportionen, oder aus $BD : DC = AD : AF$ wird erhalten $BD \times DC : DC^2 = AD^2 : AF \times AD$; hieraus $BD \times DC + AD^2 : DC^2 + AF \times AD = AD^2 : AF \times AD = AD : AF$, das ist $BD \times DC + AD^2 : AC^2 = AD : AF$. Die zweyte Proportion, oder die, $AB : AC = AD : AF$, giebt $AB \times AC : AC^2 = AD : AF$.
Folglich ist $AB \times AC = AD^2 + BD \times DC$.

26. In dem Dreyeck ABC (Fig. 129.) sey AD senkrecht auf BC, und AE willkührlich gezogen. Aus (22.) ist

I. $BC : AC + AB = AC - AB : CD - BD$;
II. $BE : AE + AB = AE - AB : ED - BD$;
III. $EC : AC + AE = AC - AE : CD + ED$.

Wenn BD größer als CD oder als ED ist, so werden die Unterschiede entgegengesetzt genommen. Das vierte Glied dieser Proportionen bezeichne man in I. durch a; in II. durch b; in III. durch c, so ist

$$a - b = EC;\quad c - a = BE;\quad c - b = BC.$$

Behandelt man diese Proportionen arithmetisch, so ist

$$\text{I. } \frac{AC^2 - AB^2}{BC} - \frac{AE^2 - AB^2}{BE} = EC,$$

$$\text{II. } \frac{AC^2 - AE^2}{EC} - \frac{AC^2 - AB}{BC} = BE,$$

$$\text{III. } \frac{AC^2 - AE^2}{EC} - \frac{AE^2 - AB^2}{BE} = BC,$$

ıd daraus

$$BE(AC^2 - AB^2) - BC(AE^2 - AB^2) =$$
$$BC(AC^2 - AE^2) - EC(AC^2 - AB^2) =$$
$$BE(AC^2 - AE^2) - EC(AE^2 - AB^2)$$

27. In dem gleichschenklichten Dreyeck ABC (Fig. 30.) sey willkührlich AE bis an die Grundlinie BC gegen; es ist $AB^2 = AE^2 + CE \times BE$.

Denn man ziehe die senkrechte AD, so ist $AE^2 = AD^2 - DE^2$, und $AD^2 + BD^2 = AB^2$, daraus $AE^2 - BD^2 - DE^2 = AB^2$, oder $AE^2 + (BD + DE)(BD - DE) = AB^2$, welches die Aussage des Satzes ıthält.

Inhalt der Dreyecke.

28. Dreyecke, die über derselben Grundlinie gleiche ıöhe haben, sind gleich groß — Bey einerley Höhe erhalten sie sich wie die Grundlinien, bey einerley Grundnie wie die Höhen. — Das Verhältniß ungleicher Dreyecke wird zusammengesetzt aus den Verhältnissen der Grundlinien und der Höhen. Dieses Verhältniß arithıetisch auszudrucken, werden Grundlinien und Höhen ıurch eine willkührliche lineariſche Einheit ausgedruckt, ınd so ist das Verhältniß der Dreyecke gleich dem Verältnisse der Producte aus den Grundlinien in die Höhen. ?. B. die Grundlinien seyn 12 und 20; die Höhen 9 und ', so verhalten sich die Dreyecke wie 108 : 140.

29. Verhalten sich die Grundlinien umgekehrt wie die Höhen, so sind die Dreyecke gleich groß, z. B. wenn die Grundlinien 12 und 20, die Höhen 15 und 9 sind.

30. Dreyecke, welche in einem ihrer Winkel übereinkommen, und in welchen die Seiten an diesem Winkel wiederkehrend proportional sind, sind gleich groß.

Es seyn (Fig. 131.) in den Dreyecken BAC, DAE die Winkel bey A gleich groß, so daß, wenn AB, AE in eine gerade Linie fallen, auch AC, AD eine gerade ausmachen, und es sey dabey AC : AD = AE : AB. Man ziehe BD, so ist $\triangle BAC : \triangle BAD = AC : AD$; und $\triangle DAE : \triangle BAD = AE : AB$; daher ist $\triangle BAC : \triangle BAD = \triangle DAE : \triangle BAD$. Da das zweyte Glied der Verhältnisse dasselbe ist, so ist $\triangle BAC = \triangle DAE$.

31. Ähnliche Dreyecke verhalten sich wie die Quadrate der gleichnamigen Seiten. Verhalten sich diese z. B. wie 1 : 2 : 3 : 4, etc. so verhalten sich die Flächenräume der Dreyecke wie 1 : 4 : 9 : 16 : etc.

32. Ein Dreyeck ist die Hälfte eines Parallelogramms, das dieselbe Grundlinie und Höhe wie jenes hat.

33. Wenn Grundlinie und Höhe durch eine lineariſche Einheit arithmetiſch ausgedruckt werden, so giebt das halbe Product beider die Zahl an, wie vielmahl das Dreyeck das Quadrat enthalte, dessen Seite jene lineariſche Einheit ist. Z. B. Die Grundlinie sey 7, (Zoll, Fuß) die Höhe $4\frac{3}{5}$, so ist der Inhalt des Dreyecks $16\frac{1}{10}$ Quadraten (Qu. Zollen oder Qu. Fußen) gleich. Die Grundlinie sey $\frac{4}{5}$, die Höhe $\frac{3}{5}$, so ist das Dreyeck $\frac{3}{25}$ des Quadrats, welches zur Einheit oder zum Maaße dient.

34. Die drey Seiten eines Dreyecks ABC (Fig. 126. 127.) werden folgendergestalt bezeichnet, BC = a; AC = b; AB = c; die gegenüberliegenden Winkel durch A, B, C; es ist der Inhalt des Dreyecks $= \frac{1}{4}\sqrt{(a+b+c)(b+c-a)(a+c-b)(a+b-c)}$, oder, wenn

$+ b + c = s$ ist, und das Dreyeck durch T bezeichnet wird, $T = \sqrt{\frac{1}{2}s\,(\frac{1}{2}s - a)\,(\frac{1}{2}s - b)\,(\frac{1}{2}s - c)}$.

Man halbire AB in E, und ziehe CD senkrecht auf dieselbe, so ist $DE = \frac{a^2 - b^2}{2c}$ (23.), und $BD = \frac{1}{2}c - \frac{a^2 - b^2}{2c} = \frac{c^2 + a^2 - b^2}{2c}$. Man setze $DE = d$, und $CD = p$, so ist $p^2 = a^2 - (\frac{1}{2}c + d)^2 = (a + \frac{1}{2}c + d)(a - \frac{1}{2}c - d)$. Nun ist $a + \frac{1}{2}c + d = \frac{a^2 + 2ac + c^2 - b^2}{2c} = \frac{(a + c)^2 - b^2}{2c} = \frac{(a + c + b)(a + c - b)}{2c}$. Ferner ist $a - \frac{1}{2}c - d = a - \frac{c^2 + a^2 - b^2}{2c} = \frac{b^2 - a^2 + 2ac - c^2}{2c} = \frac{b^2 - (a - c)^2}{2c} = \frac{(b + a - c)(b - a + c)}{2c}$. Folglich ist

$$p^2 = \frac{(a + c + b)(a + c - b)(b + a - c)(b - a + c)}{4cc}$$

der Inhalt des Dreyecks arithmetisch ausgedruckt ist $\frac{1}{2}pc$. So erhellt die Aussage des Satzes.

35. Der Satz ist hier arithmetisch ausgedruckt, und durch allgemeine Rechnung erwiesen. Wollte man denselben nach geometrischer Art ausdrucken, so würde er folgendergestalt lauten: Das Verhältniß des Quadrats von der Summe aller Seiten eines Dreyecks zu der Fläche desselben wird zusammengesetzt aus den subduplicirten Verhältnissen von 2 : 1, und von der Summe zu dem Unterschiede der halben Summe und jeder einzelnen Seite. — Das subduplicirte Verhältniß zweyer Größen m : p ist nämlich das von m zu der mittlern proportionalen n zwischen beiden, wenn $m : n = n : p$ ist.

36. Der Satz ist zu Berechnungen sehr brauchbar, da Winkel und Perpendikel dadurch entbehrlich gemacht werden, auch keine genaue Zeichnung nöthig ist. Er kommt zuerst in der Geodäsie (praktischen Geometrie) des jüngern Hero vor, der im achten Jahrhundert oder später gelebt hat. Montucla führt den Satz daraus an, (Histoire des Mathem. nouv. ed. T. I. p. 343.), und Pfleiderer theilt in seiner ebenen Trigonometrie, S. 389, eine Stelle aus einer Pariser Handschrift mit, welche der Diaconus Camerer daraus abgeschrieben hat. Die Regel wird darin ohne Beweis vorgetragen, und durch ein Beyspiel erläutert. In der Ausgabe der Geodäsie nebst einem Buche von Kriegsmaschinen durch Barocius, Venedig 1572, ist die Regel nicht befindlich. Die erst gedruckte Schrift, worin der Satz mit dem Beweise vorkommt, ist des Minoriten Lucas de Burgo Summa de Arithmetica, Geometria, cet. 1494. Derselbe Beweis steht in des Tartalea Trattato de numeri e misure, daher bisweilen der Satz diesem letztern zugeschrieben wird. Ramus theilt ihn auch mit in den Scholis mathematicis, ist aber damit unzufrieden, wegen der dunkeln Hysterologie, worunter er vielleicht den Mangel des kunstgerechten geometrischen Vortrages versteht. Er schreibt den Beweis dem Jordanus Nemorarius und Tartalea zu, von welchen der erstere im 13ten Jahrhundert gelebt haben mag. Sie hätten, sagt er, dadurch sehr gute Geschicklichkeit in der Mathematik, aber nicht in der Logik gezeigt. Denselben Beweis trägt van Ceulen vor, in den Fundamentis arithm. et geom. probl. 35, wobey der Übersetzer, Snellius, erinnert, daß alle, welche sich desselben bedient hätten, sich einen Fehler gegen die wahre Methode zu Schulden kommen ließen, durch die planoplanorum stereometriam, wie er es nennt. Er verändert daher den Beweis etwas, um diesen Mangel zu heben. Newtons Beweis in der Arithm. univ. probl. geom. XI. kommt im Wesentlichen mit dem hier gegebenen überein, ist aber in der Form verschieden, weil er ganz geometrisch ist, außer daß noch

die Quadratwurzel aus dem Product von vier Linien gezogen wird. Boscovich (Operum T. V. Opusc. XIV.) sucht den Halbmesser des in ein Dreyeck einzuschreibenden Kreises durch eine theils geometrische, theils trigonometrische Methode. Wenn dieser gefunden ist, so wird auch unmittelbar daraus der Inhalt des Dreyecks hergeleitet. Euler (Novi Comm. Petrop. T. I. a. a. 1747, 48.) sucht durch eine rein geometrische Construction den Werth dieses Halbmessers. Einen Beweis durch analytische Trigonometrie allein, unabhängig von irgend einer Construction, findet man in Karstens Matheſi theoretica elementari et sublimiori, 1760. §. 43. pag. 313, und Lehrbegriff der Mathematik, 2. Th. 461 §. auch in Kästners Anfangsgründen, Trigonometrie 20 u. 21. Satz, und in meiner analytischen Trigonometrie, S. 25. Die linearischen Nachrichten von diesem Lehrsatze, und die Methoden ihn zu beweisen, sind ausführlich in Pfleiderers ebenen Trigonometrie S. 374 — 394. mitgetheilt.

37. Da der Raum auf Tab. VIII. noch verstattet, eine Figur beyzufügen, so benutze ich denselben, um den von Euler a. a. O. gegebenen feinen geometrischen Beweis des Lehrsatzes mitzutheilen.

In dem Dreyeck ABC (Fig. 132.) werden die Winkel durch die Linien AO, BO, CO, halbirt, die sich in O schneiden, (15.). Von O werden die senkrechten OP, OQ, OR auf die Seiten gezogen. Der Inhalt des Dreyecks ist $= \frac{1}{2}(AB+AC+BC)\,OP$, oder so groß als des Rechtecks, dessen eine Seite die halbe Summe von $AB+AC+BC$, die andere die senkrechte OP ist. Nun hat man diesen Ausdruck in einen andern zu verwandeln, worin die senkrechte OP nicht vorhanden ist.

Zuerst bemerke man, daß $AR = AQ$; $BR = BP$; $CP = CQ$ ist. Daher ist $AR + BP + CQ$ die halbe Summe der Seiten, und der Inhalt des Dreyecks $= (AR + BP + CQ)\,OP$.

Nun suche man vermittelst ähnlicher Dreyecke einen Ausdruck, der diesem gleich ist, und ganz durch die Seiten des Dreyecks gegeben wird.

das Dreyeck spitzwinklicht (acutangulum, oxygonium); ist ein Winkel stumpf, so ist es ein stumpfwinklichtes (obtusangulum, amblygonium).

Die beiden Seiten eines rechtwinklichten Dreyecks, welche den rechten Winkel einschließen, heißen Katheten; die gegenüber stehende Seite heißt die Hypotenuse.

3. Ein geradlinichtes Dreyeck stellt zugleich ein System von drey sich gegenseitig schneidenden geraden Linien dar, wenn die Seiten desselben unbestimmt verlängert werden. Der äußere Winkel, welchen eine verlängert Seite mit der anliegenden Seite des Dreyecks macht, ist gleich der Summe der beiden innern entgegengesetzten Winkel. Daher ist die Summe der drey innern Winkel zwey Rechten gleich. — In dem gleichseitigen Dreyecke sind alle drey Winkel gleich groß; in dem gleichschenklichten sind die Winkel an der Grundlinie sich gleich; in dem ungleichseitigen sind alle Winkel ungleich. — Der größern Seite steht der größere Winkel gegen über, der kleinern Seite der kleinere Winkel, und umgekehrt.

4. Ein Dreyeck wird vollkommen bestimmt, 1) durch zwey Seiten mit dem eingeschlossenen Winkel; 2) durch zwey Winkel und eine Seite; 3) durch alle drey Seiten. — Rechtwinklichte Dreyecke sind ganz bestimmt durch zwey Seiten; schiefwinklichte können mit zwey Seiten und einem von ihnen nicht eingeschlossenen Winkel auf zweyerley Art verzeichnet werden. Das eine ist spitzwinklicht, das andere stumpfwinklicht.

5. Dreyecke, welche die genannten Bestimmungen gemein haben, sind congruent, oder decken sich. Die Winkel, welche in ihnen denselben Seiten gegen über liegen, sind sich gleich; so auch die Seiten, welche denselben Winkeln gegen über stehen.

6. Dreyecke, wie ABC, abc (Fig. 116, Tab. VIII.) sind ähnlich, erstlich, wenn die Winkel des einen den

$$\frac{AR}{OR} \times \frac{BP}{OP} \times \frac{CQ}{OQ} = \frac{AR}{OR} + \frac{BP}{OP} + \frac{CQ}{OQ}.$$

ie Quotienten ſind nach ihrer Folge die Cotangenten der ülften von den Winkeln A, B, C, ſo daß

$$\cot\tfrac{1}{2}A.\cot\tfrac{1}{2}B \times \cot\tfrac{1}{2}C = \cot\tfrac{1}{2}A + \cot\tfrac{1}{2}B + \cot\tfrac{1}{2}C;$$

nn $A+B+C = 2$ Rechten iſt. Der Satz wird in der niometrie II. durch Rechnung erwieſen.

39. Aus der Gleichung in (37.) ergiebt ſich auch der erth des Halbmeſſers des in ein Dreyeck einzuſchreiben- Kreiſes durch die Seiten deſſelben.

Von der Verwandlung eines Dreyecks in ein anderes r in eine mehrſeitige Figur, von der Theilung nach geſſen Bedingungen, von der Verbindung mit dem Kreiſe, Verwandlung der Figuren, Theilung der Figuren, eis.

Mancherley Sätze und Aufgaben über die Dreyecke, van Ceulen Fundamentis arithm. et geom. 1615. — eg. a Sto Vincentio opere geometrico, p. 21–36. — n Schooten exercit. geometricis 1657. — Newni Arithmetica univerſali. — Gilberts Geome- nach Le Gendre, Simpſon u. m. 1798.

Dreytheilig, ſ. Trinomiſch.

Duodecimal-Maaß iſt die Eintheilung der Ein- in 12 gleiche Theile, und eines dieſer Theile in 12, ſo ferner. Die Brucheinheiten machen die Reihe

$$\frac{1}{12.12};\ \frac{1}{12.12.12};\ \frac{1}{12^4};\ \frac{1}{12^5},\ \text{u. ſ f. aus.}$$

B. die Ruthe werde in 12 Fuß, der Fuß in 12 Zoll, Zoll in 12 Linien, die Linie in 12 Theile, Skrupel, r wie man ſie nennen will, getheilt, ſo mißt und rechman nach dem Duodecimalmaaße. Die leichtere Einilungsart hat dieſes Maaß bey Feldmeſſern und Handrksleuten beliebt gemacht. Die Zahl 12 läßt ſich in

2, 3, 4, 6 gleiche Theile theilen, die Zahl 10 un
und 5.

Nach diesem Maaße enthält eine Quadratruth
Quadratfuß; 144 mahl 144 Quadrat-Zoll; 144
144 mahl 144 Quadratlinien. Eine Cubikruthe e
1728 Cubikfuß, 1728 mahl 1728 Cubikzoll; 172
1728 mahl 1728 Cubiklinien. S. Cubik-Einheit.

Duodecimalrechnung ist die Rechnung nach
decimalmaaß. Sie ist nur darin von der dodekad
verschieden, daß die Menge der Haupteinheiten dek
ausgedruckt wird, und daß die kleinern Einheiten bey
chenrechnungen die Progression $\frac{1}{144}$, $\frac{1}{144^2}$, $\frac{1}{144^3}$
bey Cubikrechnungen die Progression $\frac{1}{1728}$, $\frac{1}{172}$
$\frac{1}{1728^3}$, etc. bilden.

Die Addition und Subtraction ist sehr leicht,
nichts als eine gemeine mit benannten Zahlen. Die
tiplication und Division macht nach der gewöhnlichen
Schwierigkeit; folgendes Verfahren macht sie leicht.

Ein Rechteck hat die Länge 5° 6′ 7″ und
2° 3′ 5″, Duodecimalmaaß; man soll den Inhalt
ben. Man multiplicire diese dodekadischen Zahlen
Art der dekadischen in einander, folgendergestalt:

$$\begin{array}{r}
5 \,.\, 6 \,.\, 7 \\
2 \,.\, 3 \,.\, 5 \\
\hline
2 \,.\, 3 \,.\, 8 \,.\, 11 \\
1 \,.\, 4 \,.\, 7 \,.\, 9 \quad\quad \\
11 \,.\, 1 \,.\, 2 \quad\quad\quad\quad \\
\hline
1 \,.\, 0 \,.\, 8 \,.\, 1 \,.\, 5 \,.\, 11
\end{array}$$

Die beiden niedrigsten dodekadischen Ziffern, 5 . 11,
Quadratlinien; die beiden vorhergehenden, 8 . 1,

Quadratzolle, und 1.0 sind Quadratruthen, da die Längen-Zolle durch $\frac{1}{12}$, und die Linien durch $\frac{1}{144}$ bezeichnet werden. Also ist der Inhalt 12° 97′ 71″ Quadratmaaß.

Es sey der Inhalt eines senkrechten Prisma zu finden, dessen Länge 5° 6′ 7″, Breite 2° 3′ 5″, Höhe 7′ 2″ ist. Man multiplicire die gefundene Grundfläche, aber dodekadisch ausgedruckt, in die Höhe 7′ 2″, wie folget

1 . 0 . 8 . 1 . 5 . 11
7 . 2
2 . 1 . 4 . 2 . 11 . 10
7 . 4 . 8 . 10 . 5 . 5
7 . 6 . 10 . 2 . 8 . 4 . 10

Die drey letzten dodekadischen Ziffern sind Cubikzolle, die drey vorhergehenden Cubikfuße; die höchste bedeutet Cubikruthen. Die Reduction auf dekadische Werthe giebt den Inhalt 7° 986′ 1210″ Cubikmaaß.

Die Division geschieht wie in dem Artikel, Division, gezeigt ist, nachdem man aber die dekadischen Zahlen auf dodekadische gebracht hat, um die Progression der Einheiten nach den Potenzen von 12 zu erhalten.

Exempel einer Reduction von einem Maaße auf das andere. — Es sollen 584 Cubfuß 622 Cubzoll Decimalmaaß in Duodecimalmaaß verwandelt werden. Die Ruthe ist die Einheit.

Es sind 584622 Cubzoll (dek.) = 2.4.2.3.10.6 Cubzoll (dodek.). Nun verhält sich die Menge der Cubikzoll Decim. zu der Menge der Cubikzoll Duodec. wie $10^6 : 12^6$. Daher ist die Zahl 2.4.2.3.10.6 mit 12^6 (d. i. 1.0.0.0.0.0.0, zu multipliciren, und mit 10^6 das ist, 4.0.2.8.5.4 (dodek.), zu dividiren. Die Rechnung ist folgende.

	Diviſor	Quotient
	4.0.2.8.5.4	7.0.2.2.8.7
Dividend	2[4.2.8.10.6.0.0.0.0.0	
	2.4.1.6.11.1.4	
1. Reſt	8.11.4.8.0.0	
	8.0.5.4.10.8	
2. Reſt	10.11.8.1.4.0	
	8.0.5.4.10.8	
3. Reſt	2.10.9.8.5.4.0	
	2.8.1.9.7.6.8	
4. Reſt	2.7.10.9.9.4.0	
	2.4.1.6.11.1.4	
5. Reſt	3.9.2.10.2.8	

Der Quotient iſt 7.0.2. Cubf. 2.8.7. Cubzoll. Das iſt, 1010 Cubf. 391 Cubz. Duod. Maaß, aber dekadiſch ausgedruckt.

Das Exempel, nach gemeiner Art berechnet, ſteht in Karſtens Anfangsgründen, I. Th. 636 S. wo noch Cubiklinien und Cubſcr. zugefügt ſind.

Setzt man die Diviſion weiter fort, ſo ſind die 3 folgenden Ziffern des Quotienten 11.3.0. Nämlich:

Diviſor	Dividend	Quot.
4.0.2.8.5.4	3.9.2.10.2.8.0.0.0	11.3.0
	3.8.2.5.8.10.8	
	1.0.4.5.9.4.0.0	
	1.0.0.8.1.4.0	
	3.9.8.0.0.0	

Die 11.3.0. Cublin. ſind 1620 Cublin. dekadiſch gezählt, wofür genauer 1621 zu ſetzen ſind. Karſten hat

über 1621 Cublin. noch eine Anzahl Cubſcr. durch einen Rechnungsfehler.

Wären die 1010 Cubf. 391 Cubz. 1621 Cublin. Duod. Maaß auf Decimalmaaß zu reduciren, ſo wäre die Rechnung etwas leichter, weil, nachdem die dekadiſchen Zahlen auf dodekadiſche gebracht ſind, das Ganze durch 4.0.2.8.5.4 zu multipliciren, und durch 1.0.0.0.0.0.0 zu dividiren iſt.

Duplicirtes, zweyfaches, **Verhältniß** (ratio duplicata); iſt ein aus zwey gleichen Verhältniſſen zuſammengeſetztes. Das einfache ſey a:b, ſo iſt das zweyfache, aa:bb. Hier iſt der Exponent das Quadrat von dem des einfachen Verhältniſſes. In dem a:2b, iſt der Exponent das gedoppelte von dem in jenem. Wenn man dieſes Verhältniß mit jenem vergleichen wollte, ſo müßte man es ratio dupla nennen. S. Verhältniß.

Duplicatio cubi, ſ. Deliſches Problem.

Durchmeſſer einer krummen Linie, iſt eine gerade Linie, welche alle parallelen Chorden an derſelben halbirt. In dem Kreiſe halbirt die gerade Linie, welche aus dem Mittelpuncte durch die Mitte einer Chorde gezogen iſt, alle derſelben parallelen, und ſchneidet ſie unter einem rechten Winkel. In der Ellipſe und Hyperbel werden alle unter ſich parallelen Chorden, in welcher Lage ſie auch genommen werden, durch eine gerade Linie halbirt, die durch einen gegebenen Punct, den **Mittelpunct** der Curve, geht. Die beiden Hauptdurchmeſſer ſchneiden die coordinirten Chorden unter einem rechten Winkel. In der Parabel ſind alle Durchmeſſer der Axe parallel. Unter den krummen Linien höherer Gattungen haben viele keine Durchmeſſer, andere nur einen oder einige.

In einem allgemeinern Sinne heißt Durchmeſſer einer krummen Linie eine gerade Linie, welche alle an eine Curve gezogenen Parallelen ſo ſchneidet, daß die Summe der zwiſchen ihr und den Puncten der Curve, auf jeder dieſer

Parallelen, enthaltenen Abschnitte an der einen Seite so groß ist als an der andern. In diesem Sinne hat jede algebraische Curve unendlich viele Durchmesser.

Eine krumme Linie ist in Beziehung auf eine andere ihr Durchmesser, wenn die Summe der positiven Producte aus den zwischen beiden enthaltenen Abschnitten gerader parallelen Linien so groß ist als die Summe der negativen, bey einer bestimmten Anzahl der combinirten Abschnitte. Der krummlinichte Durchmesser ist ein Kegelschnitt, wenn je zwey Abschnitte in einander multiplicirt werden.

Euleri Introd. in Anal. Inf. T. II. cap. XV.
Cramer Analyse des lignes courbes algebriques, Ch. VI.
Newtoni enumer. lin. tertii ordinis, art. II. M. In dieser Abhandlung sind Beyspiele von Linien der dritten Ordnung mit einem Durchmesser.

Durchschnitt, (Sectio) ist der Punct, worin sich zwey Linien, oder die Linie, worin sich zwey Flächen schneiden. Wenn ein Körper von einer Fläche durchschnitten wird, so ist der Theil der Fläche, der innerhalb des Körpers liegt, der Schnitt, oder Durchschnitt des Körpers. Dieser wird begränzt von dem Durchschnitt der schneidenden Fläche und der Oberfläche des Körpers.

Dyadik, dyadisches Zahlensystem, dyadische (zweyziffrige) Form der Zahlen, ist die Vertheilung der Zahlen in Classen von zweyfach steigenden Einheiten, deren jede Classe zwey enthält, so daß zwey Einheiten einer Classe eine Einheit der nächst höhern Classe ausmachen. Jede Zahl wird demnach bloß aus den Gliedern der geometrischen Reihe

1 : 2 : 4 : 8 : 16 : 32 : 64 : 128 : etc.

zusammengesetzt. Es ist, um jede Zahl dadurch auszudrucken, nur ein einziges Zeichen, 1, nebst der o nöthig. Die Eins in der ersten Stelle rechter Hand bedeutet eine

Einer, in der zweyten 2, in der dritten 4, u. s. f. Z. B. die dyadische Zahl

11001100111

ist, von der rechten Hand her gelesen, dekadisch = 1 + 2 + 4 + 32 + 64 + 128 + 1024 + 2048 = 3303. Hieraus sieht man, daß in diesem System der Classen zu viele werden, so wie es auch sehr viele Benennungen der Classen erfordern würde. Die Rechnungen nach demselben sind zwar sehr einfach, aber erfordern zu vieles Schreiben.

Eine dekadische Zahl in eine dyadische zu verwandeln, dividire man sie durch 2; den Quotienten wieder durch 2; den zweyten Quotienten wieder durch 2, und so fort: die Reste, mit Einschluß der 0 bey geraden Dividenden, schreibe man der Reihe nach von der Rechten zur Linken hin, so hat man die dyadische Form der gegebenen Zahl. Z. B. die Zahl 35351 dyadisch auszudrucken.

Dividend	Rest	Dividend	Rest	Divid.	Rest
35351	1	1104	0	34	0
17675	1	552	0	17	1
8837	1	276	0	8	0
4418	0	138	0	4	0
2209	1	69	1	2	0
1104		34		1	1

Die dekadische Zahl 35351 ist
dyadisch = 1000101000001011.

Die Verwandlung einer dyadischen Zahl in eine dekadische kann man folgendergestalt, ohne eine Tafel der Potenzen von 2, vornehmen. Man nehme die höchste Ziffer doppelt, addire dazu die folgende, verdopple die Summe und addire dazu die dritte, fahre auf diese Art fort bis zu Ende. Z. B. die obige dyadische Zahl

11001100111

Die folgweise erhaltenen Summen sind: 3; 6; 12; 25; 51; 103; 206; 412; 825; 1651; 3303. Die letzte

Zahl 3303 ist die gesuchte dekadische. Den Grund des Verfahrens wird man bey einigem Nachdenken leicht finden.

Die Verwandlung einer dyadischen Zahl in eine dekadische kann man auch auf eine ähnliche Art als die umgekehrte vornehmen. Man muß nämlich jene mit Zehn, d. i. 1010, dividiren, den Quotienten wieder dadurch, und so fortfahren, bis man auf einen Quotienten unter Zehn kommt, der nun selbst der letzte Rest wird. Alle die einzelnen Reste geben die Ziffern der reducirten Zahl. Als Beyspiel der Division folgt hier die erste Operation.

Divisor	Quotient
1010	1010011010
Dividend	110011100111
	1011
	1100
	1011
Rest	11

Der erhaltene Quotient mit 1010 dividirt giebt zum Rest 0; der nächste Quotient giebt zum Rest 11, und durch die Division zum Quotienten 11. So wird die dekadische Zahl = 3303.

Wenn gleich die dyadische Form zur praktischen Rechnung nicht brauchbar ist, so giebt sie doch einen und den andern Vortheil zur Einsicht in die Zusammensetzung und Zerlegung der Zahlen an die Hand. Erstlich, man sieht daraus, wie jede Zahl sich bloß aus den Zahlen der Progression 1:2:4:8:16:32: etc. zusammensetzen läßt. Dies ist beym Abwägen der Körper nützlich, um es mit der kleinsten Anzahl von Gewichten zu bewerkstelligen. Man kann z. B. mit den Gewichten 1; 2; 4; 8; 16; 32 Pfund alle Gewichte von 1 bis 63 ganzen Pfunden zusammensetzen. Denn die dyadische Zahl 111111 ist die nächst kleinere vor 1000000, als welche man erhält, wenn man zu jener 1 setzt. Alle kleinere Zahlen werden aus einigen jener sechs Zahlen zusammengesetzt. Z. B. die dekadische Zahl 51

iſt dyadiſch 110011, ſo daß zu 51 Pf. die Gewichte 1; 2; 16; 32 erfordert werden.

Zweytens fällt bey der dyadiſchen Form ſehr oft die Theilbarkeit der Zahlen in die Augen. Bloß die Symmetrie in der Folge der 1 und 0 macht ſie manchmahl ſichtbar, weil dieſe Symmetrie bey der dyadiſchen Form, da ſie nur zweyerley Zeichen enthält, öfter vorkommen, als bey der dekadiſchen. Z. B. 11011 (=27) iſt durch 11 (=3) theilbar; 101101 (=45) durch 101 (=5); 1010101 (=85) durch 101 (=5) und durch 10001. Zuweilen kann man eine nicht ſymmetriſche Folge durch Zerlegung ſymmetriſch machen. So iſt 1101 = 10100
101
Es läßt ſich alſo dieſe Zahl (=25) durch 5 theilen. In der oben zum Beyſpiel gebrauchten Zahl
1000101000010111 (=35351)
iſt keine ſymmetriſche Folge; allein der erſte Theil ihrer Ziffern 1000101 läßt ſich in die Theile
10111
10111
zerlegen, welche mit dem letzten Theile der Zahl nach den 4 Nullen überein kommen. Daher iſt die Zahl durch 10111 (=23) theilbar.

Das dyadiſche Zahlenſyſtem hat zuerſt Joh. Caramuel, ein Biſchof von Campagna und Satriano im Königreiche Neapel, in ſeiner Mathesis biceps, vetus et nova, Campaniae 1670. T. I. pag. XLV. medit. prooemialis, angegeben, wo er zugleich die Zahlenſyſteme mit den Grundzahlen Drey bis Zehn, das dodekadiſche und das ſechszigtheilige beſchreibt. Ohne von dieſer in einem wuſtvollen Werke verſteckten Angabe etwas zu wiſſen, iſt Leibnitz auf das dyadiſche Zahlenſyſtem gerathen, und hat gezeigt, wie man es zum Rechnen und andern Zwecken gebrauchen möge. In einem Schreiben an den Herzog Rudolph Auguſt von Braunſchweig vom J. 1697 wendet er es zu einer allegoriſchen Vorſtellung der Schöpfung aus Nichts an. Auf der Zeichnung zu einer Schaumünze entwirft er Licht und Finſterniß hinter einer mit dyadiſchen Zah-

Zahl 3303 iſt die geſuchte dekadiſche. Den Grund des Verfahrens wird man bey einigem Nachdenken leicht finden.

Die Verwandlung einer dyadiſchen Zahl in eine dekadiſche kann man auch auf eine ähnliche Art als die umgekehrte vornehmen. Man muß nämlich jene mit Zehn, d. i. 1010, dividiren, den Quotienten wieder dadurch, und ſo fortfahren, bis man auf einen Quotienten unter Zehn kommt, der nun ſelbſt der letzte Reſt wird. Alle die einzelnen Reſte geben die Ziffern der reducirten Zahl. Als Beyſpiel der Diviſion folgt hier die erſte Operation.

Diviſor	Quotient
1010	1010010010
Dividend	110011100111
	1011
	1100
	1011
Reſt	11

Der erhaltene Quotient mit 1010 dividirt giebt zum Reſt 0; der nächſte Quotient giebt zum Reſt 11, und durch die Diviſion zum Quotienten 11. So wird die dekadiſche Zahl = 3303.

Wenn gleich die dyadiſche Form zur praktiſchen Rechnung nicht brauchbar iſt, ſo giebt ſie doch einen und den andern Vortheil zur Einſicht in die Zuſammenſetzung und Zerlegung der Zahlen an die Hand. Erſtlich, man ſieht daraus, wie jede Zahl ſich bloß aus den Zahlen der Progreſſion 1:2:4:8:16:32: etc. zuſammenſetzen läßt. Dies iſt beym Abwägen der Körper nützlich, um es mit der kleinſten Anzahl von Gewichten zu bewerkſtelligen. Man kann z. B. mit den Gewichten 1; 2; 4; 8; 16; 32 Pfund alle Gewichte von 1 bis 63 ganzen Pfunden zuſammenſetzen. Denn die dyadiſche Zahl 111111 iſt die nächſt kleinere vor 1000000, als welche man erhält, wenn man zu jener 1 ſetzt. Alle kleinere Zahlen werden aus einigen jener ſechs Zahlen zuſammengeſetzt. Z. B. die dekadiſche Zahl 51

ist dyadisch 110011, so daß zu 51 Pf. die Gewichte 1; 2; 16; 32 erfordert werden.

Zweytens fällt bey der dyadischen Form sehr oft die Theilbarkeit der Zahlen in die Augen. Bloß die Symmetrie in der Folge der 1 und 0 macht sie manchmahl sichtbar, weil diese Symmetrie bey der dyadischen Form, da sie nur zweyerley Zeichen enthält, öfter vorkommen, als bey der dekadischen. Z. B. 11011 (=27) ist durch 11 (=3) theilbar; 101101 (=45) durch 101 (=5); 1010101 (=85) durch 101 (=5) und durch 10001. Zuweilen kann man eine nicht symmetrische Folge durch Zerlegung symmetrisch machen. So ist 1101 = 10100
101
Es läßt sich also diese Zahl (=25) durch 5 theilen. In der oben zum Beyspiel gebrauchten Zahl
1000101000010111 (=35351)
ist keine symmetrische Folge; allein der erste Theil ihrer Ziffern 1000101 läßt sich in die Theile
10111
10111
zerlegen, welche mit dem letzten Theile der Zahl nach den 4 Nullen überein kommen. Daher ist die Zahl durch 10111 (=23) theilbar.

Das dyadische Zahlensystem hat zuerst Joh. Caramuel, ein Bischof von Campagna und Satriano im Königreiche Neapel, in seiner Mathesis biceps, vetus et nova, Campaniae 1670. T. I. pag. XLV. medit. prooemialis, angegeben, wo er zugleich die Zahlensysteme mit den Grundzahlen Drey bis Zehn, das dodekadische und das sechszigtheilige beschreibt. Ohne von dieser in einem wustvollen Werke versteckten Angabe etwas zu wissen, ist Leibnitz auf das dyadische Zahlensystem gerathen, und hat gezeigt, wie man es zum Rechnen und andern Zwecken gebrauchen möge. In einem Schreiben an den Herzog Rudolph August von Braunschweig vom J. 1697 wendet er es zu einer allegorischen Vorstellung der Schöpfung aus Nichts an. Auf der Zeichnung zu einer Schaumünze entwirft er Licht und Finsterniß hinter einer mit dyadischen Zah-

Auf eine der ihren Winkel halbirenden Linien, wie CO, die hier zu verlängern ist, ziehe man aus einem der beiden andern Winkel, B, die senkrechte BMN, welche der verlängerten PO in N begegne. Es ist der W. $BOM = \frac{1}{2}B + \frac{1}{2}C$, also OBM das Complement dieser beiden zum Rechten. Da $A + B + C =$ zwey Rechten, so ist $\frac{1}{2}A$ auch das Complement von $\frac{1}{2}B + \frac{1}{2}C$ zum Rechten, also W. $OBM = OAR$. Daher sind die rechtwinklichten Dreyecke BMO, ARO sich ähnlich, und es ist $BM : MO = AR : OR = AR : OP$. Da der W. BNP, so wie BCM, jeder das Complement von CBM zum Rechten sind, so ist W. $BCM = BNP$, und in den ähnlichen Dreyecken BMC, OMN ist $BM : BC = MO : ON$, oder $BM : MO = BC : ON$, folglich ist $BC : ON = AR : OP$, also

$$AR \times ON = BC \times OP.$$

Zu beiden Rechtecken addire man das $AR \times OP$, so ist $AR \times PN = (AR + BC)OP = (AR + BP + CQ)OP$. Wegen der ähnlichen Dreyecke BPN, OPC ist $PN : Pp = CP : OP$, also $PN \times OP = BP \times CP = BP \times CQ$. Aus der Gleichheit jener Rechtecke folgt die Gleichheit der Prismen $AR \times PN \times OP$ und $(AR + BP + CQ)OP^2$; also ist

$$AR \times BP \times CQ = (AR + BP + CQ)OP^2.$$

Hieraus ergiebt sich nun sogleich der Satz, wie der Inhalt eines Dreyecks durch die Seiten gefunden wird. Es sey die Summe aller drey Seiten $= S$, so ist $AR + BP + CQ = \frac{1}{2}S$; $AR + BC = \frac{1}{2}S$; $BP + AC = \frac{1}{2}S$; $CQ + AB = \frac{1}{2}S$, und es ist $(\frac{1}{2}S - BC)(\frac{1}{2}S - AC)(\frac{1}{2}S - AB) = \frac{1}{2}S \times OP^2$ und der arithmetische Ausdruck des Inhalts des Dreyecks ist

$$= \sqrt{\tfrac{1}{2}S(\tfrac{1}{2}S - AB)(\tfrac{1}{2}S - BC)(\tfrac{1}{2}S - AC)}.$$

38. Die in (37.) gefundene Gleichung verwandle man in diese,

$$\frac{AR}{OR} \times \frac{BP}{OP} \times \frac{CQ}{OQ} = \frac{AR}{OR} + \frac{BP}{OP} + \frac{CQ}{OQ}.$$

Quotienten sind nach ihrer Folge die Cotangenten der
en von den Winkeln A, B, C, so daß

$$\cot\tfrac{1}{2}A \times \cot\tfrac{1}{2}B \times \cot\tfrac{1}{2}C = \cot\tfrac{1}{2}A + \cot\tfrac{1}{2}B + \cot\tfrac{1}{2}C;$$

$A+B+C = 2$ Rechten ist. Der Satz wird in der
ometrie II. durch Rechnung erwiesen.

9. Aus der Gleichung in (37.) ergiebt sich auch der
h des Halbmessers des in ein Dreyeck einzuschreiben-
reises durch die Seiten desselben.

Von der Verwandlung eines Dreyecks in ein anderes
in eine mehrseitige Figur, von der Theilung nach ge-
n Bedingungen, von der Verbindung mit dem Kreise,
rwandlung der Figuren, Theilung der Figuren,

Mancherley Sätze und Aufgaben über die Dreyecke,
n Ceulen Fundamentis arithm. et geom. 1615. —
. a Sto Vincentio opere geometrico, p. 21–36. —
Schooten exercit. geometricis 1657. — New-
Arithmetica universali. — Gilberts Geome-
ach Le Gendre, Simpson u. m. 1798.

Dreytheilig, s. Trinomisch.

Duodecimal-Maaß ist die Eintheilung der Ein-
n 12 gleiche Theile, und eines dieser Theile in 12,
o ferner. Die Brucheinheiten machen die Reihe

$$\frac{1}{12.12};\ \frac{1}{12.12.12};\ \frac{1}{12^4};\ \frac{1}{12^5},\ \text{u. s. f. aus.}$$

. die Ruthe werde in 12 Fuß, der Fuß in 12 Zoll,
oll in 12 Linien, die Linie in 12 Theile, Skrupel,
wie man sie nennen will, getheilt, so mißt und rech-
an nach dem Duodecimalmaaße. Die leichtere Ein-
ngsart hat dieses Maaß bey Feldmessern und Hand-
leuten beliebt gemacht. Die Zahl 12 läßt sich in

2, 3, 4, 6 gleiche Theile theilen, die Zahl 10 nu
und 5.

Nach diesem Maaße enthält eine Quadratruth
Quadratfuß; 144 mahl 144 Quadrat-Zoll; 14
144 mahl 144 Quadratlinien. Eine Cubikruthe
1728 Cubikfuß, 1728 mahl 1728 Cubikzoll; 172
1728 mahl 1728 Cubiklinien. S. Cubik-Einheit.

Duodecimalrechnung ist die Rechnung nac
decimalmaaß. Sie ist nur darin von der dodeka
verschieden, daß die Menge der Haupteinheiten de
ausgedruckt wird, und daß die kleinern Einheiten be

chenrechnungen die Progression $\frac{1}{144}$, $\frac{1}{144^2}$, $\frac{1}{144^3}$

bey Cubikrechnungen die Progression $\frac{1}{1728}$, $\frac{1}{17}$

$\frac{1}{1728^3}$, etc. bilden.

Die Addition und Subtraction ist sehr leicht,
nichts als eine gemeine mit benannten Zahlen. Die
tiplication und Division macht nach der gewöhnliche
Schwierigkeit; folgendes Verfahren macht sie leicht.

Ein Rechteck hat die Länge 5° 6′ 7″ und
2° 3′ 5″, Duodecimalmaaß; man soll den Inhalt
ben. Man multiplicire diese dodekadischen Zahlen
Art der dekadischen in einander, folgendergestalt:

$$\begin{array}{r}
5 \,.\, 6 \,.\, 7 \\
2 \,.\, 3 \,.\, 5 \\
\hline
2 \,.\, 3 \,.\, 8 \,.\, 11 \\
1 \,.\, 4 \,.\, 7 \,.\, 9 \quad\quad \\
11 \,.\, 1 \,.\, 2 \quad\quad\quad\quad \\
\hline
1 \,.\, 0 \,.\, 8 \,.\, 1 \,.\, 5 \,.\, 11
\end{array}$$

Die beiden niedrigsten dodekadischen Ziffern, 5 . 11,
Quadratlinien; die beiden vorhergehenden, 8 . 1;

Quadratzolle, und 100 sind Quadratruthen, da die Längen-Zolle durch $\frac{1}{12}$, und die Linien durch $\frac{1}{144}$ bezeichnet werden. Also ist der Inhalt 12° 97′ 71″ Quadratmaaß.

Es sey der Inhalt eines senkrechten Prisma zu finden, dessen Länge 5° 6′ 7″, Breite 2° 3′ 5″, Höhe 7′ 2″ ist. Man multiplicire die gefundene Grundfläche, aber dodekadisch ausgedruckt, in die Höhe 7′ 2″, wie folget

1	0	8	1	5	11	
					7	2
2	1	4	2	11	10	
7	4	8	10	5	5	
7	6	10	2	8	4	10

Die drey letzten dodekadischen Ziffern sind Cubikzolle, die drey vorhergehenden Cubikfuße; die höchste bedeutet Cubikruthen. Die Reduction auf dekadische Werthe giebt den Inhalt 7° 986′ 210″ Cubikmaaß.

Die Division geschieht wie in dem Artikel, Division, gezeigt ist, nachdem man aber die dekadischen Zahlen auf dodekadische gebracht hat, um die Progression der Einheiten nach den Potenzen von 12 zu erhalten.

Exempel einer Reduction von einem Maaße auf das andere. — Es sollen 584 Cubfuß 622 Cubzoll Decimalmaaß in Duodecimalmaaß verwandelt werden. Die Ruthe ist die Einheit.

Es sind 584622 Cubzoll (dek.) = 2.4.2.3.10.6 Cubzoll (dodek.). Nun verhält sich die Menge der Cubikzoll Decim. zu der Menge der Cubikzoll Duodec. wie $10^6 : 12^6$. Daher ist die Zahl 2.4.2.3.10.6 mit 12^6 d. i. 1.0.0.0.0.0.0, zu multipliciren, und mit 10^6 zu dividiren. Die Rechnung ist folgende.

	Divisor	Quotient
	4.0.2.8.5.4	7.0. 2. 2. 8.7
Dividend	2[.]4.2.8.10.	6.0. 0. 0. 0.0.0
	2.4.1.6.11. 1.4	
1. Rest	8.11. 4.8. 0. 0	
	8. 0. 5.4.10. 8	
2. Rest	10.11.8. 1. 4. 0	
	8. 0.5. 4.10. 8	
3. Rest	2.10.9. 8. 5. 4.0	
	2. 8.1. 9. 7. 6.8	
4. Rest	2.7.10. 9. 9.4.0	
	2.4. 1. 6. 11.1.4	
5. Rest	3. 9. 2.10.2.8	

Der Quotient ist 7.0.2. Cubf. 2.8.7. Cubzoll. Das ist, 1010 Cubf. 391 Cubz. Duod. Maaß, aber dekadisch ausgedruckt.

Das Exempel, nach gemeiner Art berechnet, steht in Karstens Anfangsgründen, I. Th. 636 S. wo noch Cubiklinien und Cubser. zugefügt sind.

Setzt man die Division weiter fort, so sind die 3 folgenden Ziffern des Quotienten 11.3.0. Nämlich:

Divisor	Dividend	Quot.
4.0.2.8.5.4	3.9.2.10.2. 8.0.0.0	11.3.0
	3.8.2. 5.8.10.8	
	1.0. 4.5. 9.4.0.0	
	1.0. 0.8. 1.4.0	
	3.9. 8.0.0.0	

Die 11.3.0. Cublin. sind 1620 Cublin. dekadisch gezählt, wofür genauer 1621 zu setzen sind. Karsten hat

ber 1621 Cublin. noch eine Anzahl Cubſcr. durch einen
lechnungsfehler.

Wären die 1010 Cubf. 391 Cubz. 1621 Cublin.
)uod. Maaß auf Decimalmaaß zu reduciren, ſo wäre
e Rechnung etwas leichter, weil, nachdem die dekadi-
ſchen Zahlen auf dodekadiſche gebracht ſind, das Ganze
urch 4.0.2.8.5.4 zu multipliciren, und durch
.0.0.0.0.0.0 zu dividiren iſt.

Duplicirtes, zweyfaches, **Verhältniß** (ratio
uplicata); iſt ein aus zwey gleichen Verhältniſſen zuſam-
engeſetztes. Das einfache ſey a:b, ſo iſt das zweyfache,
a:bb. Hier iſt der Exponent das Quadrat von dem
s einfachen Verhältniſſes. In dem a:2b, iſt der Ex-
nent das gedoppelte von dem in jenem. Wenn man dies
s Verhältniß mit jenem vergleichen wollte, ſo müßte man
ratio dupla nennen. S. Verhältniß.

Duplicatio cubi, ſ. Deliſches Problem.

Durchmeſſer einer krummen Linie, iſt eine gerade Linie,
elche alle parallelen Chorden an derſelben halbirt. In dem
reiſe halbirt die gerade Linie, welche aus dem Mittelpuncte
rch die Mitte einer Chorde gezogen iſt, alle derſelben paral-
en, und ſchneidet ſie unter einem rechten Winkel. In
r Ellipſe und Hyperbel werden alle unter ſich parallelen
)orden, in welcher Lage ſie auch genommen werden,
rch eine gerade Linie halbirt, die durch einen gegebenen
unct, den Mittelpunct der Curve, geht. Die bei-
n Hauptdurchmeſſer ſchneiden die coordinirten Chorden
ter einem rechten Winkel. In der Parabel ſind alle
urchmeſſer der Axe parallel. Unter den krummen Linien
herer Gattungen haben viele keine Durchmeſſer, andere
r einen oder einige.

In einem allgemeinern Sinne heißt Durchmeſſer einer
ummen Linie eine gerade Linie, welche alle an eine Curve
)genen Parallelen ſo ſchneidet, daß die Summe der
iſchen ihr und den Puncten der Curve, auf jeder dieſer

Als Beyſpiel der Diviſion folgt hier die e

Diviſor	Quotient
1010	10100101
Dividend	1100111100111
	1011
	1100
	1011
Reſt	1

Der erhaltene Quotient mit 1010 dividir
0; der nächſte Quotient giebt zum Reſt
die Diviſion zum Quotienten 11. So
ſche Zahl = 3303.

Wenn gleich die dyadiſche Form zur
nung nicht brauchbar iſt, ſo giebt ſie do
andern Vortheil zur Einſicht in die Zuſa
Zerlegung der Zahlen an die Hand. Erſtli
aus, wie jede Zahl ſich bloß aus den Zah
ſion 1:2:4:8:16:32: etc. zuſammenſet
beym Abwägen der Körper nützlich, um

r, in der zweyten 2, in der dritten 4, u. s. f. Z. B. yadische Zahl

IIOOIIIOOIII

von der rechten Hand her gelesen, dekadisch = 2 + 4 + 32 + 64 + 128 + 1024 + 2048 = 3303. aus sieht man, daß in diesem System der Classen zu werden, so wie es auch sehr viele Benennungen der en erfordern würde. Die Rechnungen nach demsel- sind zwar sehr einfach, aber erfordern zu vieles reiben.

Eine dekadische Zahl in eine dyadische zu verwandeln, ire man sie durch 2; den Quotienten wieder durch en zweyten Quotienten wieder durch 2, und so fort: Reste, mit Einschluß der o bey geraden Dividenden, ibe man der Reihe nach von der Rechten zur Linken so hat man die dyadische Form der gegebenen Zahl. B. die Zahl 35351 dyadisch auszudrucken.

Dividend	Rest	Dividend	Rest	Divid.	Rest
35351	1	1104	0	34	0
17675	1	552	0	17	1
8837	1	276	0	8	0
4418	0	138	0	4	0
2209	1	69	1	2	0
1104		34		1	1

dekadische Zahl 35351 ist

isch = 1000101000010111.

Die Verwandlung einer dyadischen Zahl in eine deka- e kann man folgendergestalt, ohne eine Tafel der Po- en von 2, vornehmen. Man nehme die höchste Ziffer pelt, addire dazu die folgende, verdopple die Summe addire dazu die dritte, fahre auf diese Art fort bis zu de. Z. B. die obige dyadische Zahl

IIOOIIIOOIII

folgweise erhaltenen Summen sind: 3; 6; 12; 25; 103; 206; 412; 825; 1651; 3303. Die letzte

Zahl 3303 iſt die geſuchte dekadiſche. Den Grund des Verfahrens wird man bey einigem Nachdenken leicht finden.

Die Verwandlung einer dyadiſchen Zahl in eine dekadiſche kann man auch auf eine ähnliche Art als die umgekehrte vornehmen. Man muß nämlich jene mit Zehn, d. i. 1010, dividiren, den Quotienten wieder dadurch, und ſo fortfahren, bis man auf einen Quotienten unter Zehn kommt, der nun ſelbſt der letzte Reſt wird. Alle die einzelnen Reſte geben die Ziffern der reducirten Zahl. Als Beyſpiel der Diviſion folgt hier die erſte Operation.

Diviſor	Quotient
1010	1010011010
Dividend	11001111001111
	1011
	1100
	1011
Reſt	11

Der erhaltene Quotient mit 1010 dividirt giebt zum Reſt 0; der nächſte Quotient giebt zum Reſt 11, und durch die Diviſion zum Quotienten 11. So wird die dekadiſche Zahl = 3303.

Wenn gleich die dyadiſche Form zur praktiſchen Rechnung nicht brauchbar iſt, ſo giebt ſie doch einen und den andern Vortheil zur Einſicht in die Zuſammenſetzung und Zerlegung der Zahlen an die Hand. Erſtlich, man ſieht daraus, wie jede Zahl ſich bloß aus den Zahlen der Progreſſion 1:2:4:8:16:32: etc. zuſammenſetzen läßt. Dies iſt beym Abwägen der Körper nützlich, um es mit der kleinſten Anzahl von Gewichten zu bewerkſtelligen. Man kann z. B. mit den Gewichten 1; 2; 4; 8; 16; 32 Pfund alle Gewichte von 1 bis 63 ganzen Pfunden zuſammenſetzen. Denn die dyadiſche Zahl 111111 iſt die nächſt kleinere vor 1000000, als welche man erhält, wenn man zu jener 1 ſetzt. Alle kleinere Zahlen werden aus einigen jener ſechs Zahlen zuſammengeſetzt. Z. B. die dekadiſche Zahl 51

iſt dyadiſch 110011, ſo daß zu 51 Pf. die Gewichte 1; 2; 16; 32 erfordert werden.

Zweytens fällt bey der dyadiſchen Form ſehr oft die Theilbarkeit der Zahlen in die Augen. Bloß die Symmetrie in der Folge der 1 und 0 macht ſie manchmahl ſichtbar, weil dieſe Symmetrie bey der dyadiſchen Form, da ſie nur zweyerley Zeichen enthält, öfter vorkommen, als bey der dekadiſchen. Z. B. 11011 (=27) iſt durch 11 (=3) theilbar; 101101 (=45) durch 1001 (=5); 10100101 (=85) durch 101 (=5) und durch 10001. Zuweilen kann man eine nicht ſymmetriſche Folge durch Zerlegung ſymmetriſch machen. So iſt $1101 = 10100 \atop 101$

Es läßt ſich alſo dieſe Zahl (=25) durch 5 theilen. In der oben zum Beyſpiel gebrauchten Zahl

1000101000010111 (=35351)

iſt keine ſymmetriſche Folge; allein der erſte Theil ihrer Ziffern 1000101 läßt ſich in die Theile

101110
10111

zerlegen, welche mit dem letzten Theile der Zahl nach den 4 Nullen überein kommen. Daher iſt die Zahl durch 10111 (=23) theilbar.

Das dyadiſche Zahlenſyſtem hat zuerſt Joh. Caramuel, ein Biſchof von Campagna und Satriano im Königreiche Neapel, in ſeiner Mathesis biceps, vetus et nova, Campaniae 1670. T. I. pag. XLV. medit. prooemialis, angegeben, wo er zugleich die Zahlenſyſteme mit den Grundzahlen Drey bis Zehn, das dodekadiſche und das ſechszigtheilige beſchreibt. Ohne von dieſer in einem wuſtvollen Werke verſteckten Angabe etwas zu wiſſen, iſt Leibnitz auf das dyadiſche Zahlenſyſtem gerathen, und hat gezeigt, wie man es zum Rechnen und andern Zwecken gebrauchen möge. In einem Schreiben an den Herzog Rudolph Auguſt von Braunſchweig vom J. 1697 wendet er es zu einer allegoriſchen Vorſtellung der Schöpfung aus Nichts an. Auf der Zeichnung zu einer Schaumünze entwirft er Licht und Finſterniß hinter einer mit dyadiſchen Zah-

len beſchriebenen Tafel, nebſt der Umſchrift: Omnibus ex nihilo ducendis ſufficit unum. Er fügt hinzu, daß er ſeine Vorſtellung der Zahlen an den Pater Grimaldi in China ſchicken wolle, in der Hoffnung, daß dieſes Sinnbild des Geheimniſſes der Schöpfung dem Chineſiſchen Kaiſer des chriſtlichen Glaubens Vortrefflichkeit vor Augen legen werde. Wenn dieſes auch nicht bewirkt ſeyn mag, ſo hat doch dadurch ein anderer Miſſionär in China, der P. Bouvet, eine chineſiſche, bis dahin ganz unverſtändliche Schrift, entziffert. Sie enthält bloße Striche, von welchen ein Theil aus zwey Stücken beſteht. Sie wird dem Kaiſer Fohi, dem Gründer des Reichs und der chineſiſchen Gelehrſamkeit, zugeſchrieben. Die ganzen Striche bedeuten nach der Erklärung dyadiſche Einheiten, die zertheilten Null, ſo daß das dyadiſche Syſtem überaus alt iſt, da Fohi vor mehr als 4000 Jahren gelebt haben ſol. Leibnitz erzählt dieſes in einem Aufſatze über die zweyfache Rechenkunſt (Arithmétique binaire), der in den Mém. de l'Acad. des Sciences a. 1703. und in der Sammlung ſeiner Werke, T. III. nr. 68. befindlich iſt, auch mit dem oben gedachten Schreiben beſonders abgedruckt von Nolten 1734 herausgegeben worden. Er empfiehlt ſie nicht zum Gebrauch ſtatt der gewöhnlichen, ſondern weil ſie Gelegenheit zu Entdeckungen über den Bau der Zahlen geben könne.

Dyadiſche Arithmetik, Arithmetica dyadica ſive binaria, die Rechnung mit Zahlen nach der binariſchen Form. Brander hat eine gute Anweiſung dazu gegeben. Arithmetica binaria ſ. dyadica, d. i. die Kunſt nur mit zwey Zahlen (Ziffern) in allen Fällen zu rechnen. Augsburg 1769 u. 1775.

Ende des erſten Theils, erſte Abtheilung.

Druckfehler.

6	Z.	1	ſt. $\frac{ab}{ef} + cd$, l. $\frac{ab}{ef} \times cd$.
15	—	10	v. u. ſt. Vierecke l. Vielecke.
17	—	17	ſt. anylitiſche l. analytiſche.
21	—	3	v. u. ſt. Tab. l. Tom.
22	—	3	ſt. Integralrechnung l. Integralgleichung.
24	—	17	ſt. $\frac{u^2}{1.2} + \frac{d^2\Psi y}{dy^2}$ l. $\frac{u^2}{1.2} \cdot \frac{d^2\Psi y}{dy^2}$.
25	—	19	ſt. $\Psi x + $ l. $\Psi x =$
44	—	13	v. u. ſt. Würfeln l. Wurzeln.
47	—	3	das Wort, poſitiven, wegzulaſſen.
74	—	2	ſt. $\div z$ l. $+ z$.
86	—	9	ſt. Mathematik l. Mechanik.
89	—	9	ſt. Walis l. Wales.
92	—	10	v. u. ſt. AP, PM l. AP : PM.
96	—	1	nach Linie zu ſetzen AB.
103	—	9	im Nenner des Bruchs ſt. A^{m-1} zu ſetzen B^{m-1}.
110	—	13	ſt. Geometrie l. Gohiometrie.
2ſ.	—	21	ſt. a (a × x). l. a (a + x).
113	—	10	ſt. — 2AD, AP. coſ DAP l. — 2AD. AP. coſ DAP.
118	—	6	v. u. ſt. ΔANIA l. ΔANQ.
119	—	7	v. u. ſt. q^2 l. y^2.
126	—	6	v. u. ſt. 2 sin φ, coſ φ l. 2 sin φ. coſ φ.
128	—	8	v. u. ſt. 52 : 180 l. 180 : 52.
129	—	9	ſt. $x^2 (b-x)^2$ l. $a^2(b-x)^2$.
165	—	8	v. ob. ſt. $\sqrt{1}$ l. $\sqrt{-1}$.
188	—	13	ſt. Progreſſion l. Proportion.
192	—	14	ſt. + vor der Wurzelgröße zu ſetzen ±. Eben ſo Z. 17 u 19.
201	Z.	5	v. u. ſt. ΔA l. ΔA.
247	—	9	v. u. ſt. $3A-1$ l. 3^A-1.
249	—	5	ſt. 2 + l. + 2.
264	—	7	dem Abſatze vorzuſetzen 15*.

Seite 193 Zeile 2 [illegible]

— 199 Columne 1 st. $\Delta^6 x$ l. $\Delta^6 y$.

— 204 Zeile 7 v. u. st. $r 2 x + 1$ l. $r, r + 1$.

— 209 — 19 Nach a^{n+1} einzuschieben $(a + b)^{n+1}$, und in allen Exponenten $n + 1$ zu setzen.

— 219 — 16 v. u. l. Arithmomantica.

— 242 In dem Columnentitel zu setzen: Brunische Aufgabe.

— 249 — 1 und 2 von unten. Zu verbessern folgendergestalt: Die Gleichung, $x^2 - 62 x - 63 = 0$ hat eine positive Wurzel $= 63$. Man hat also für R erst von 67 an die Primzahlen zu versuchen. Auf Seite 250 Zeile 2. 3. fällt nun weg: die erste Bedingung macht 61 unbrauchbar.

— 250 — 9 v. u. st. einer in, l. in einen.

— 252 der Columnentitel heisse: Bekanntes Glied.

— 252 Zeile 20 l. comparationis.

— 254 — 4 v. u. st. $\frac{7}{2}$ l. $\frac{7}{3}$.

— 255 — 8 v. u. st. 1. 2 3 l. 1. 2. 3.

— 257 — 1 in dem dritten Gliede st. φ l. φ^5.

— 257 — 2 in dem zweyten Gliede st. φ l. φ^3.

— 257 — 7 l. $\frac{1 + \cos \varphi}{2}$

— 257 — 8 l. $z \varphi$.

— 262 — 6 l. $b x y^2$.

— 262 — 11 nach y^3 eine) st. 1.

— 262 — 16 l. $d (z^2 + z x + x^2)$.

— 262 — 1 v. u. st. $a z - x$ sey a^{z-x}.

— 263 — 3 l. $+ \frac{(z-x)(z-x-1)(z-x-2)}{1. \; 2 \; 3.} b^3$.

— 263 — 7 hinter $\frac{z-x}{n-y}$ fehlt das Multiplicationszeichen, oder das y aus der folgenden Zeile ist dahinter zu setzen.

— 272 — 10 l. $\frac{CP\,(Ct - CM)}{CM.\,Ct}$

— 272 — 5 v. u. st. φd l. $d \varphi$.

— 279 — 17 st. CN l. PN.

— 296 — 9 st. $D \times E$ l. $D \times E$.

— 304 — 20 l. $(1 - x^2)^m$.

— 317 — 9 l. $a - 3 X$.

— 331 — 1 st. des zweyten z^2 l. z^3.

— 336 — 7 st. 16 l. 64.

— 341 — 2 v. u. ließ Transactionen.

— 353 — 14 v. u. st. (5) . (6).

— 355 — 2 l. infiniment.

— 370 — 11 st. E l. D.

Seite 380 Zeile 1 v. u. Die hier ausgelassene Reihe II. stehe S. 382 Z. 1.

— 385 — 1 l. $\frac{a}{b}:1$

— 388 — 4 l. 9,5228787. S. 389 Z. 6 v. u. nach A eine). S. 389 Z. 1 v. u. st. n = l. u =, Ebds. nach — n ein).

— 390 — 10 l. $\sqrt[3]{}$ Q.

— 391 — 4 st. 1A l. 1a. S. 391 Z. 12 st. 1C³ l. 1C'. S. 391 Z. 17 st. AC l. aC. S. 392 Z. 5 v. u. l $(1 \pm \sqrt{} - 3)$. S. 393 Z. 2 l. neun. S. 393 Z. 13 st. P_1 l. P. S. 394 Z. 5 l. $\frac{1}{2}\sqrt{}(p-3n)$. S. 396 Z. 16 st. a^2x^b l. $a \cdot x^2$. S. 396 Z. 17 l. $z^2 = y_1^2 + x^2$.

— 396 — 3 v. u. st. $y^4 2au^3 + 2au^2$ l. $y^4 + 2au^3 + 2auy^2$.

— 396 — 2 v. u. st. a l. u.

— 397 — 2 v. u. l. $y^2 = x^3 a^2$.

— 399 — 7 v. u. l. Dominicus. S. 401 Z. 13 st. Ap l. AP. S. 402 Z. 3 l. $p + \Delta p$.

— 404 — 9 l. $\frac{(1+pp)\,dx d^2p}{2dp^2}$

— 404 — 7 v. u. st. u—pp l. 1—pp.

— 404 — 5 v. u. l. $\frac{(1+pp)\,dx d^2p}{2dp^{2n}}$

— 405 — 11 l. $2\sqrt{}(1+pp)$.

— 406 — 7 st. p^2dx l. y^2dx.

— 410 — 3 v. u. l. MRN $= \frac{ds}{r}$, u. setze nach $\frac{ds}{r}$ ein;.

— 411 — 9 v. u. st. (G.) l. (10. VI.).

— 412 — 4 st. α+S, l. a+α+S.

— 413 — 19 l. (7–9).

— 423 — 15 v. u. st. d Summe l. Summe.

— 430 — 3 st. $\frac{4}{3}\pi r^2$ l. $\frac{4}{3}\pi r^3$

— 434 — 3 v. u. st. AP^2 l. AP^3.

461 in der siebenten horizont. Reihe, im 5ten Felde statt b c f. b+c. Ebendaselbst im sechsten Felde st $b^5 . b^5$.

461 in der letzten horizont. Reihe, im 4n Felde st. $bh^3 .. b^3h$.

462 Zeile 15 l. Abtheilung.

463 — 18 l. gz^6. S. 464 Z. 16 st. 01244 l. 01234.

466 — 2 v. u. st. f. a^{m-3} l. f a^m, und st. f. abc $\times^{m-3}$ l. f. abc $\times$ f. a^{m-3}.

472 — 1 v. u. l. qualibet. S. 477 Z. 6 l. invoslutorischen. S. 478 die Seitenzahl unrichtig.

478 Zeile 10 v. u. l. die Summe der Stellenzahlen ihrer Elemente.

478 — 8 v. u. l. Combinationen.

479 — 14 v. u. st. die l. der.

Seite 183 Zeile 2 statt des zweyten 100 l. 200.
— 199 Columne 1 st. $\Delta^5 x$ l. $\Delta^5 y$.
— 204 Zeile 7 v. u. st. $r2r+1$ l. $r,r+1$.
— 209 — 19 Nach a^{n+1} einzuschalten $(a+b)^{n+1}$, und in allen Exponenten $n+1$ zu setzen.
— 219 — 16 v. u. l. Arithmomantica.
— 242 In dem Columnentitel zu setzen: Geometrische Aufgabe.
— 249 — 1 und 2 von unten. Zu verbessern folgendergestalt: Die Gleichung, $x^2-62x-63=0$ hat eine positive Wurzel $=63$. Man hat also für B erst von 67 an die Primzahlen zu versuchen. Auf Seite 250 Zeile 2. 3. fällt nun weg: die erste Bedingung macht 61 unbrauchbar.
— 250 — 9 v. u. st. einer in, l. in einer.
— 252 der Columnentitel heiße: Bekanntes Glied.
— 252 Zeile 20 l. comparationis.
— 254 — 4 v. u. st. $\frac{7}{2}$ l. $\frac{7}{3}$.
— 255 — 8 v. u. st. 1. 23 l. 1. 2. 3.
— 257 — 1 in dem dritten Gliede st. φ l. φ^5.
— 257 — 2 in dem zweyten Gliede st. φ l. φ^2.
— 257 — 7 l. $\frac{1+\cos\varphi}{2}$
— 257 — 8 l. $a\varphi$.
— 262 — 6 l. bxy^2.
— 262 — 11 nach y^3 eine) st. 1.
— 262 — 16 l. $d(z^2+zx+x^2)$.
— 262 — 1 v. u. st. $az-x$ l. a^{z-x}.
— 263 — 3 l. $+\frac{(z-x)(z-x-1)(z-x-2)}{1.\ 2.\ 3.}b^3$.
— 263 — 7 hinter $\frac{z-x}{u-y}$ fehlt das Multiplicationszeichen, oder das y aus der folgenden Zeile ist dahinter zu setzen.
— 272 — 10 l. $\frac{CP\,(Ct-CM)}{CM.\ Ct}$
— 272 — 5 v. u. st. φd l. $d\varphi$.
— 279 — 17 st. CN l. PN.
— 296 — 9 st. $D x E$ l. $D \times E$.
— 304 — 20 l. $(1-x^2)^m$.
— 317 — 9 l. $a-3$ M.
— 331 — 1 st. des zweyten z^2 l. z^3.
— 336 — 7 st. 16 l. 64.
— 341 — 2 v. u. ließ Transactionen.
— 353 — 14 v. u. st. (5) . (6).
— 55 — 2 l. infiniment.
— 370 — 11 st. E . D.

Seite 380 Zeile 1 v. u. Die hier ausgelassene Reihe II. stehe S. 382 Z. 1.

— 385 — 1 l. $\frac{a}{b}:1$

— 388 — 4 l. 9,5228787. S. 389 Z. 6 v. u. nach A eine). S. 389 Z. 1 v. u. st. n = l. u =. Ebds. nach — n ein).

— 390 — 10 l. $\sqrt[3]{}$ Q.

— 391 — 4 st. l A l. l a. S. 391 Z. 12 st. l C³ l. l C'. S. 391 Z. 17 st. AC l. aC. S. 392 Z. 5 v. u. l $(1 \pm \sqrt{\ } - 3)$. S. 393 Z. 2 l. neun. S. 393 Z. 13 st. P_1 l. P. S. 394 Z. 5 l. $\frac{1}{2}\sqrt{\ }(p - 3n)$. S. 396 Z. 16 st. $a^2 x^b$ l. $a \cdot x^2$. S. 396 Z. 17 l. $z^2 = y^2 + x^2$.

— 396 — 3 v. u. st. $y^4 2 a u^3 + 2 a u^2$ l. $y^4 + 2au^3 + 2auy^2$.

— 396 — 2 v. u. st. a l. u.

— 397 — 2 v. u. l. $y^2 = x^3 \cdot a^2$.

— 399 — 7 v. u. l. Dominicus. S. 401 Z. 13 st. Ap l. AP. S. 402 Z. 3 l. $p + \Delta p$.

— 404 — 9 l. $\frac{(1+pp)\, dx d^2p}{2dp^2}$

— 404 — 7 v. u. st. u — pp l. 1 — pp.

— 404 — 5 v. u. l. $\frac{(1+pp)\, dx d^2p}{2dp^{2n}}$

— 405 — 11 l. $2\sqrt{\ }(1 + pp)$.

— 406 — 7 st. $p^2 dx$ l. $y^2 dx$.

— 410 — 3 v. u. l. $MRN = \frac{ds}{r}$, u. setze nach $\frac{ds}{r}$ ein;.

— 411 — 9 v. u. st. (G.) l. (10. VI.).

— 412 — 4 st. α + S, l. a + α + S.

— 413 — 19 l. (7-9).

— 423 — 15 v. u. st. d Summe l. Summe.

— 430 — 3 st. $\frac{4}{3}\pi r^2$ l. $\frac{4}{3}\pi r^3$

— 434 — 3 v. u. st. AP^2 l. AP^3.

— 461 in der siebenten horizont. Reihe, im 5ten Felde statt b c l. b + c. Ebendaselbst im sechsten Felde st $b^5 . b^5$.

— 461 in der letzten horizont. Reihe, im 4n Felde st. bh^3 l. $b^3 h$.

— 462 Zeile 15 l. Abtheilung.

— 463 — 18 l. gz^6. S. 464 Z. 16 st. 01244 l. 01234.

— 466 — 2 v. u. st. f. a^{m-3} l. f a^m, und st. f. $abc \times^{m-3}$ l. f. $abc \times$ f. a^{m-3}.

— 472 — 1 v. u. l. qualibet. S. 477 Z. 6 l. invoslutorischen. S. 478 die Seitenzahl unrichtig.

— 478 Zeile 10 v. u. l. die Summe der Stellenzahlen ihrer Elemente.

— 478 — 8 v. u. l. Combinationen.

— 479 — 14 v. u. st. die l. der.

Seite 479 Zeile 12 v. u. st. $a\alpha$ Ac l. $a\alpha$ ⁷C.
— 481 — 8. 9 v. u. st. (in 10. 11) l. (in 9. 10.).
— 483 — 15 st. p]q l. p, q.
— 483 — 16 l. pqr]m.
— 490 — 3 v. u. nach etc. eine).
— 491 — 16 im Nenner statt δ. $\delta-1$ .. $\times$ etc. ließ $\delta.\delta-1 \ldots 1 \times$ etc.
— 492 — 9 v. u. links st. a^{m-8} l. a^{m-3}.
— 495 — 10 nach B^3 eine)
— 497 — 5 st. ^{n+3}C l. ^{n+2}C.
— 513 — 15 ist vor π noch der Faktor 2 zu setzen.
— 513 — 4 v. u. vor : eine).
— 514 — 16 st. $\frac{dy}{dx^2}$ l. $\frac{dy^2}{dx^2}$
— 514 — 5 muß der Exponent $\frac{3}{2}$ st. $\frac{2}{3}$ seyn.
— 518 — 6 st. o l. a.
— 518 — 12 das $\sqrt{}$ am Ende der Zeile ist wegzustreichen.
— 518 — 4 von unten ließ Goniometrie.
— 519 — 1 l. $\frac{bc}{aa} = \text{tang}\,\alpha.\ \text{sec}\,\alpha$.
— 519 — 11 st. $dy\,(c^2y^2+b^4)$ l. $\int dy\,\sqrt{(c^2y^2+b^4)}$.
— 519 — 13 das $\sqrt{}$ am Ende der Zeile ist wegzustreichen.
— 525 — 9 st. bei l. beide.
— 526 — 4 st. x. von l. von x.
— 527 — 5 v. u. st. ydy l. yd^2y.
— 534 — 11 v. u. st. $+$ l. $\pm$.
— 535 — 4 v. u. ist das Vorzeichen — vor $\frac{t}{u}\cdot\frac{du}{dy}$ ausgefallen.
— 539 — 2 v. u. st. $\sqrt{(a^2-y^2)^2}$ l. $\sqrt{(a^2-y^2)}$.
— 540 — 1 l. 29° 55' $\frac{1}{2}$ S. 550 Z. 21 st. $\sqrt{dx}$ l. Xdx. S. 566 Z. 1 v. u. st. a^r l. a^{2n}. S. 567 Z. 2 v. u. l. $+\frac{1}{10}$ cos α. S. 578 Z. 10 v. u. l. $\frac{1}{2}(1\pm\sqrt{5})$. S. 578 Z. 9 v. u. nach $\sqrt{3}$ eine). S. 581 Z. 4 v. u. vor 2ax eine (. S. 585 Z. 9 v. u. st. Ellipse l. Hyperbel. S. 585 Z. 1 v. u. st. mu l. 2mu. S. 587 Z. 7 v. u. nach AB zu setzen (Fig. 94.). S. 588 Z. 9 st. aa^2 l. a^2 S. 589 Z. 5 st. d^2 l. b^2; u. st. $2dydx$ l. $2bydx$. S. 605 Z. 14 l. $4a^2 \sin\frac{1}{2}\varphi^2.\,d\varphi^2$. S. 605 Z. 12 v. u. st. DR l. DE. S. 608 Z. 2 st. $\int\omega\ \text{cos}\ \omega^2\ d\omega$ l. $\omega\ \text{cos}\ \omega\ d\omega$. S. 608 Z. 5 st. $\frac{2}{3}\ \omega\omega$ l. $\frac{2}{3}\ \text{cos}\ \omega$.
— 608 — 17 st. π^3a^3 l. $2\pi^3a^3$.
— 608 — 3 v. u. st. da l. $d\omega$.
— 609 — 5 st. $\frac{1}{2}\sin\frac{1}{2}\omega d\omega$ l. $\frac{1}{2}\int\sin\frac{1}{2}\omega d\omega$.
— 624 — 13. v. u. st. $2(m+3)$ l. $2(2m+3)$.
— 629 — 5 st. 4 l. 46. S. 650 Z. 23 l. Fig. 102.
— 652 — 8 st. $=$ l. $-$. S. 660 Z. 1 st. $(\frac{1}{2})^5$ l. $(\frac{1}{2})^5$.

te 663 Zeile 4 v. u. im Zähler ſt. $4t^5$ l. $4t^4$. S. 671 Z. 4. v. u. ſt. 58. 55. l. 61. 58. S. 676 Z. 10 v. u. ſt. 56. 58. l. 59. 61.

· 677 — 2 nach cos (a + nb) zu ſetzen = ſt. +.

· 678 — 5 v. u. ſt. geometriſchen l. goniometriſchen.

· 679 — 18 ſt. sin A l. cos A.

· 689 — 12 v. u. ſt. 10 l. 100.

· 697 iſt die Seitenzahl unrichtig, und der Columnentitel iſt Cyklotechnie.

· 706 Zeile 6 v. u. l. Euklides.

· 717 — 20 ſt. Decimalrechnung l. Decimalbruch-Rechn.

· 735 — 4 im vierten Gliede ſt. x^2 l. x^3.

· 742 — 10 v. u. ſt. $\varphi\beta + \beta^n$ l. $\varphi\beta = \beta^n$.

· 765 — 5 ſt. Δz in dem 2n Theile der Gleichung l. Δx.

· 773 — 11 v. u. ſt. $+u^2$ l. $-u^2$. S. 777 Z. 6 v. u. ſt. 29 l. 26. S. 801 Z. 10 ſt. x+, l. x+1. S. 811 Z. 9 v. u. iſt $+\Delta yy$ wegzuſtreichen. S. 821 Z. 2 v. u. ſt. Kleinheit l. Klarheit. S. 825 Z. 5 ſt. nur l. zwar. S. 831 Z. 7 v. u. ſt. $x = o$ l. $x + o$. S. 865 Z. 7 ſt. $\alpha\beta$ l. $a\beta$.

· 876 — 2 v. u l. $e^{\Phi\sqrt{-1}}$.

· 885 — 10 v. u. iſt in dem Zähler von Q in dem dritten Gliede y^2 ausgefallen.

· 890 — 9 hinter $R\left(\frac{dP}{dy}\right)$ das Zeichen = zu ſetzen.

· 896 — 7 v. u. ſt. z^{m-3} l. x^{m-3}.

· 902 — 6 l. $\sqrt{(dx^2 + dy^2)}$.

· 910 — 3 ſt. Scheitels l. Schnittes.

· 918 — 1 ſt. V. l. IV.

· 933 — 16 ſt. linearischen l. literarischen.

· 934 — 15 v. u. ſt. Pp l. BP.

· 935 — 4 v. u. nach $\omega t + \frac{1}{2}A$ ſtatt, das Zeichen ×.

Verbeſſerungen in den Figuren.

T. 15 Tab. I. iſt ſtatt BD die Diagonale AC zu ziehen.

T. 19 Tab. I. iſt BD bis an d. Halbkreis Aea in b zu verlängern.

T. 53 Tab III. iſt die Chorde mn, wie auch die Chorde PQ zu ziehen.

T. 92 Tab. VI. fehlt am Ende der Linie BO der Buchſtab Z.

T. 97 Tab. VI. fehlt an dem Durchſchnitte der MQ mit dem Kreiſe d e der Buchſtab R.

T. 120 Tab. VIII. ſind die Buchſtaben C und D zu vertauſchen.

Druckfehler und Verbeſſerungen im zweyten Theile.

Ite 15 Zeile 1 v. u. ſt. q l. y.

· 33 — 15 l. CC = 784,00 der Schreibfehler, der aus einer Verwechslung entſtanden iſt, hat keinen Einfluß.

· 36 — 7 v u.. ſt. 16 l. 14. II. S. 87 Z. 7 ſetze Fig. 9. S. 91 Z. 1 v. u. l. T¹. S. 92 Z. 6 v. u. l. Chorde. S. 93 Z. 6 ſt. GQ l. CQ.

TAB. I.

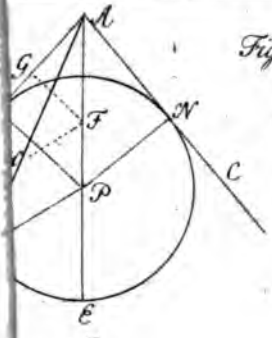
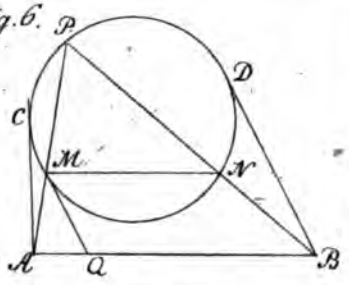


Fig. 6.



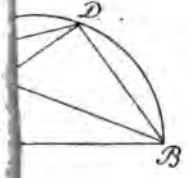


Fig. 7.

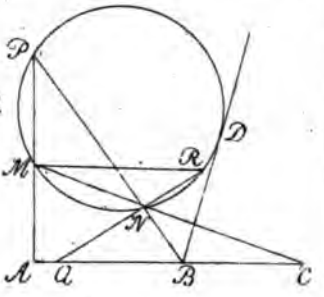
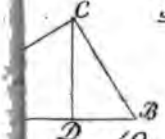
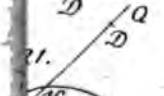
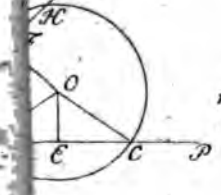


Fig. 13.





21.



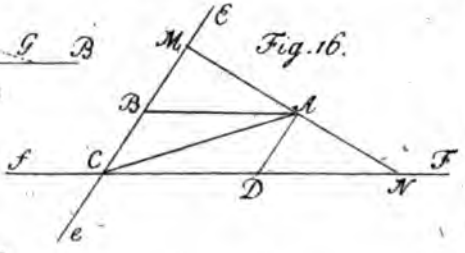
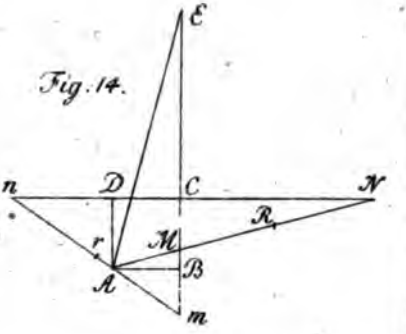
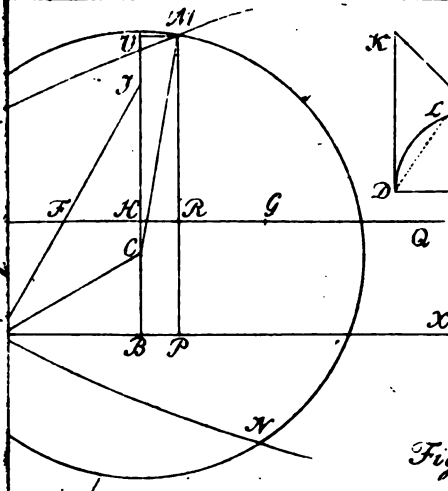


Fig. 14.





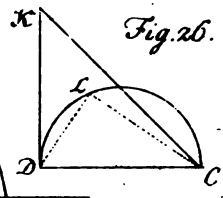


Fig. 26.

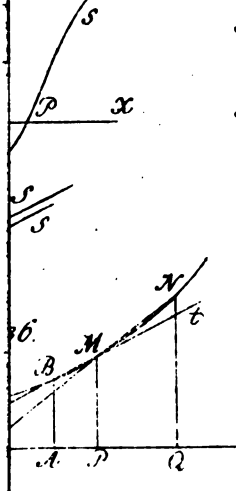
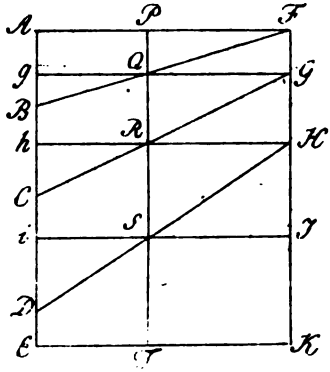


Fig. 29.



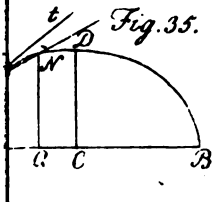


Fig. 35.

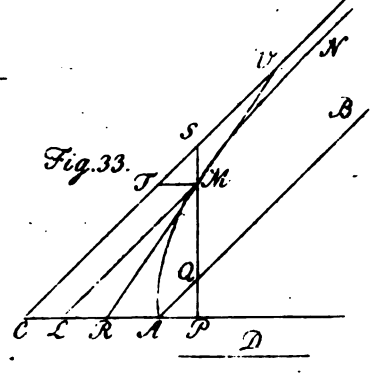


Fig. 33.

TAB. III.

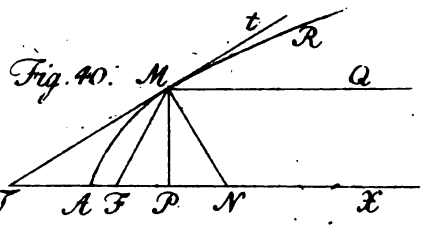


Fig. 40.

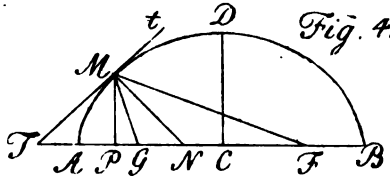
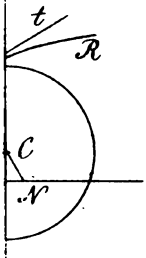


Fig. 41.



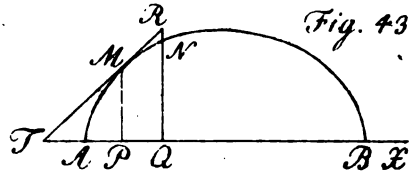
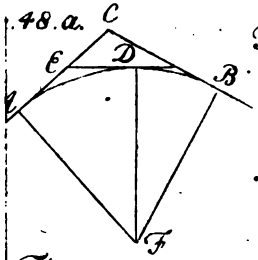


Fig. 43.



48. a.

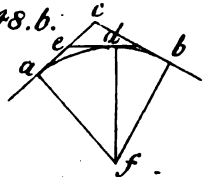


Fig. 48. b.

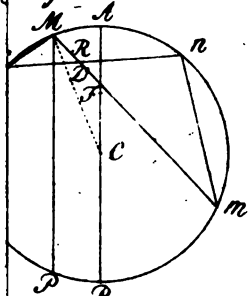


Fig. 52.

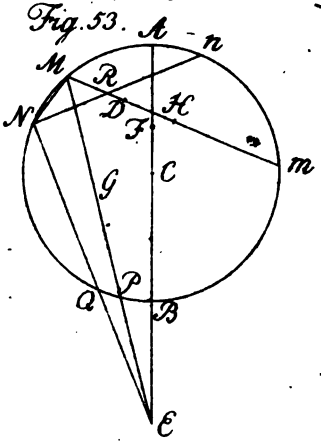


Fig. 53.

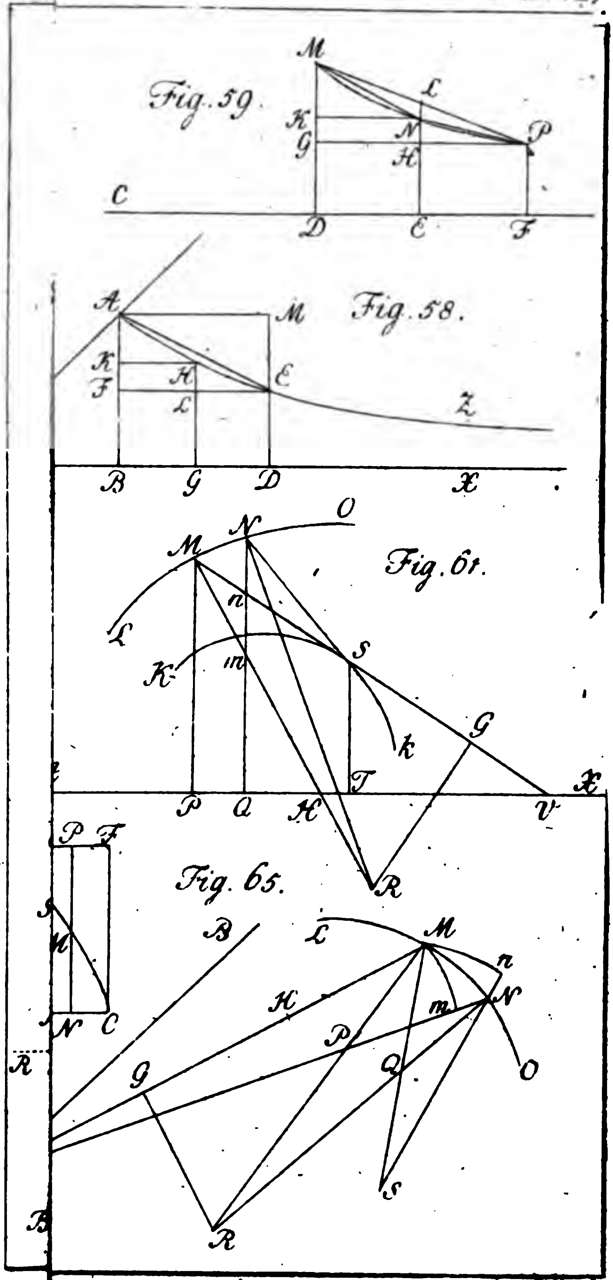


Fig. 59.
M
K
G
L
N
H
P
C
D
E
F
Fig. 58.
A
M
K
F
H
L
E
Z
B
G
D
X
Fig. 61.
O
N
M
n
L
K
m
S
k
G
T
X
P
Q
H
V
R
Fig. 65.
P F
S
M
N C
R
B
B
C
M
n
H
N
m
P
G
Q
O
S
R

Liebe sc.

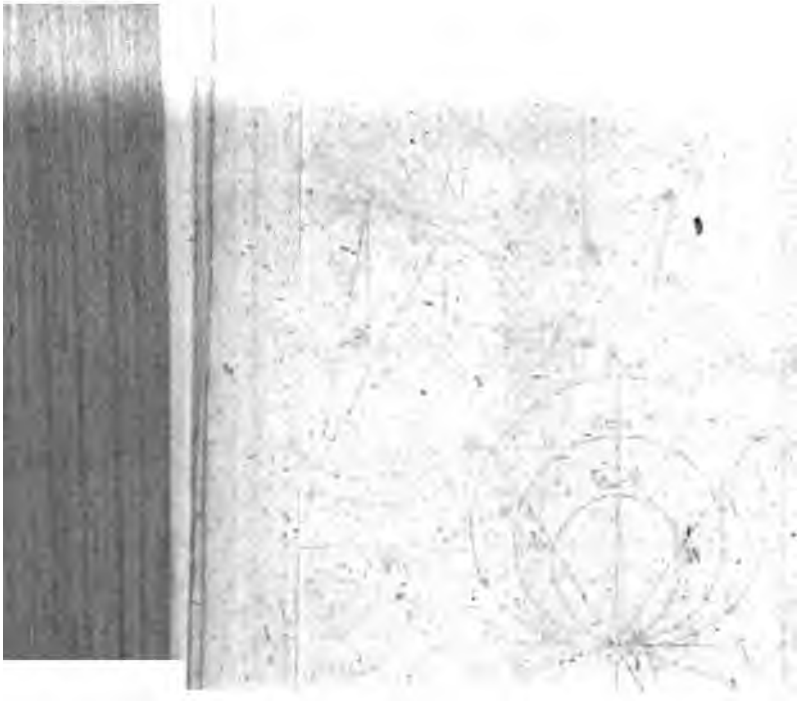


Fig. 73.

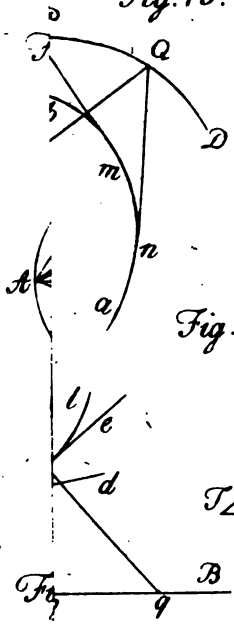


Fig. 74.

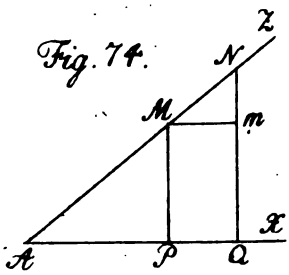


Fig. 75.

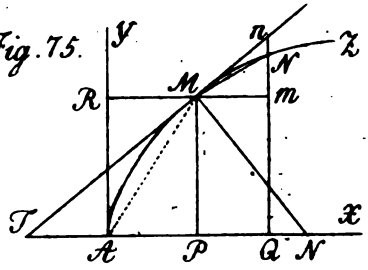


Fig. 78.

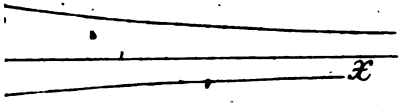
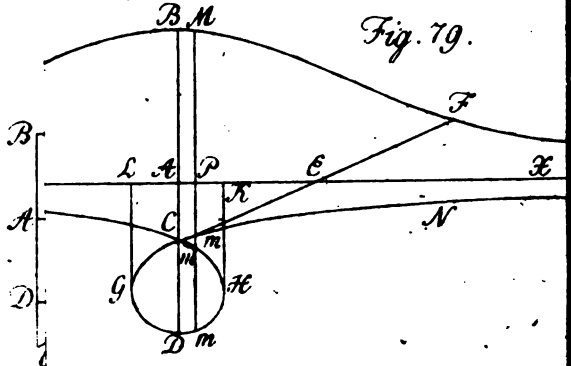


Fig. 79.



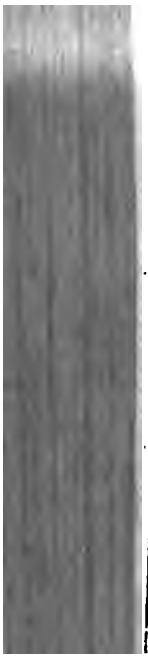


Fig. 86.

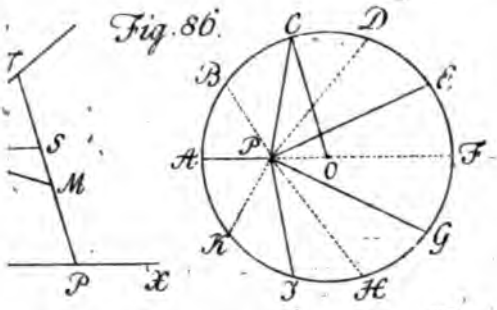


Fig. 87.

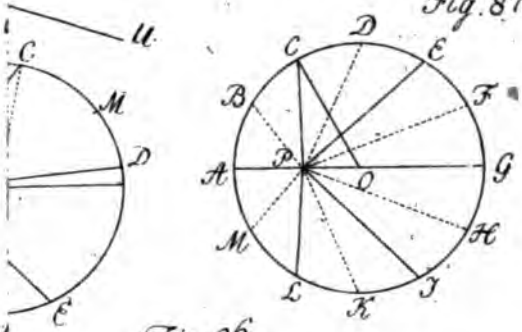


Fig. 96.

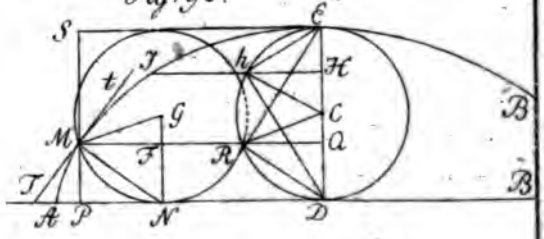


Fig. 98.

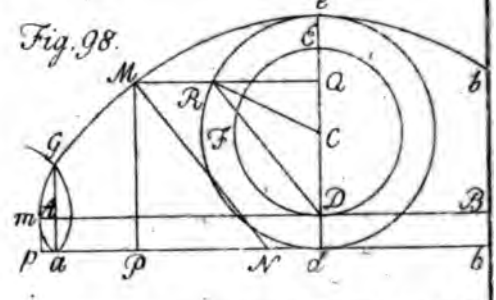


Fig. 101.

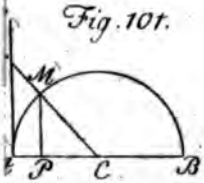


Fig. 102.

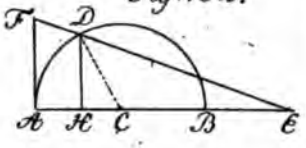
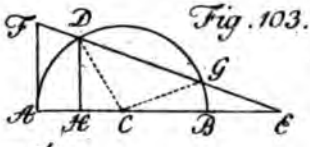


Fig. 103.



106.

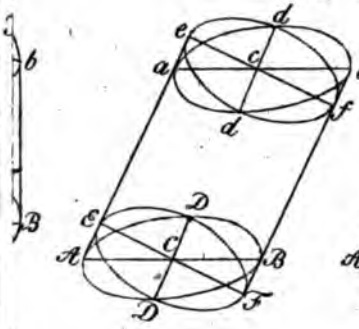


Fig. 107.

Fig. 108.

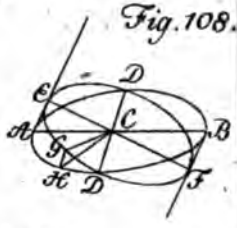


Fig. 109.

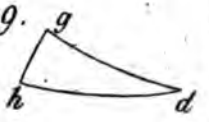
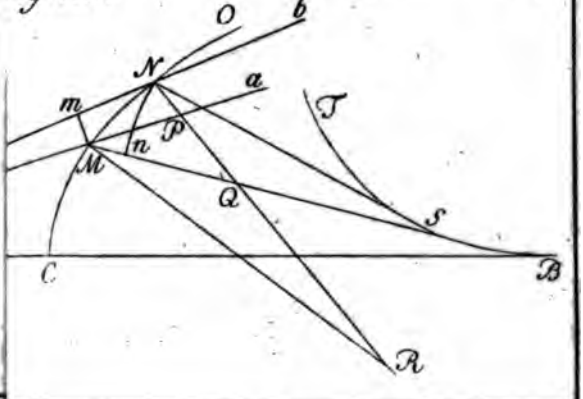


Fig. 113.



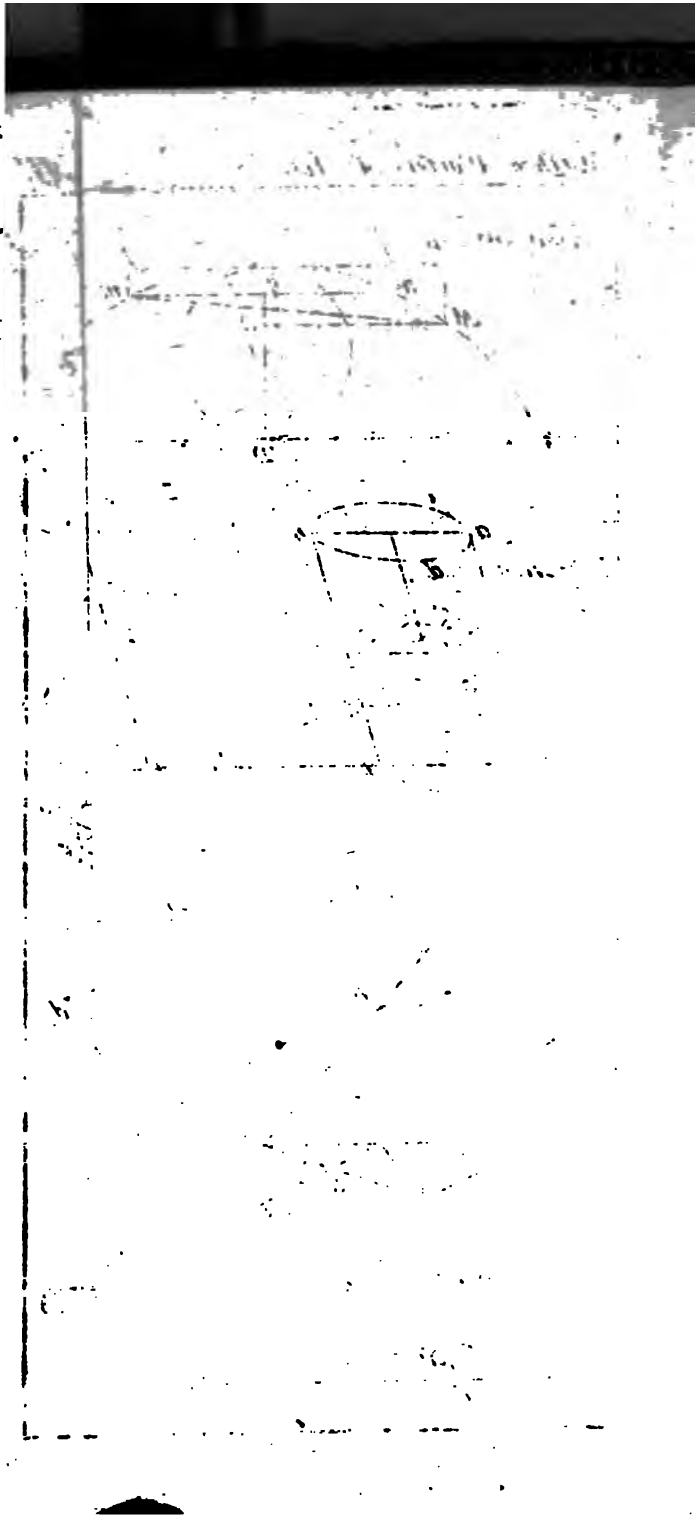
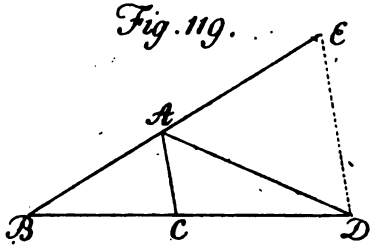


Fig. 119.



Fig

Fig. 124.

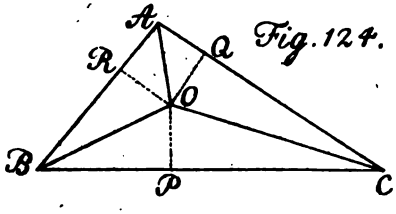
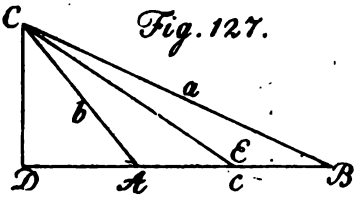


Fig.

Fig. 127.



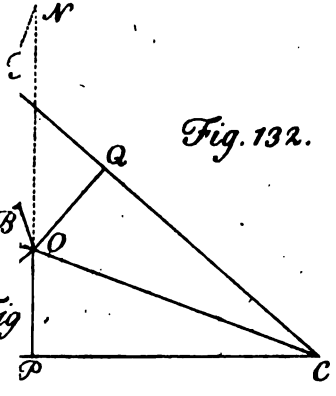
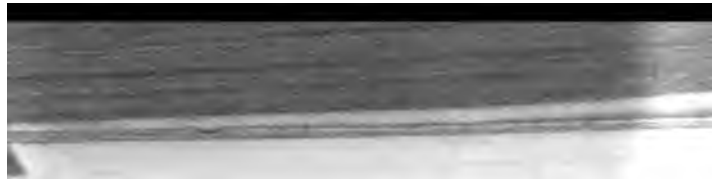


Fig. 132.

Fig

[redacted]